UNIVERSITY OF ILLINOIS
LIBRARY

Class 510 Book q0p7 Volume V2
cop. 2

Ja09-20M

MATHEMATICS LIBRARY

OPUSCOLI
MATEMATICI
E
FISICI

DI

DIVERSI AUTORI

TOMO SECONDO

MILANO
PRESSO PAOLO EMILIO GIUSTI
1834.

510
9 Op7
v2
c.2

Digitized by the Internet Archive
in 2022 with funding from
University of Illinois Urbana-Champaign

https://archive.org/details/opuscolimatemati02unse

MATHEMATICS LIBRARY

PARTE PRIMA

139209

AVVISO

S' apre il secondo volume degli Opuscoli Matematici e Fisici *con un Nome già tanto illustre fra i Geometri, che il lodarlo sarebbe superfluo. Il sig. Cauchy nell'inviarci la seguente insigne Memoria (che sembra destinata a produrre un cambiamento nelle formole dell'alta Astronomia, e un inatteso progresso in tutte le grandi applicazioni della Meccanica) ce ne permise la traduzione mostrandoci una fiducia di cui gli siamo assai riconoscenti. Ne pubblichiamo ora la prima parte preceduta da un Estratto già steso dallo stesso Autore per dare anticipata notizia della sua opera, e dichiariamo di esserci nella versione tenuti fedelmente al testo. A comodo poi di quei lettori che non avessero alla mano le opere del sig. Cauchy necessarie a consultarsi per l'intelligenza di alcuni passi: ed anche a fine di dare maggiore sviluppo a certe dottrine di somma utilità non solo per l'oggetto indicato ma per tutta l'analisi, abbiamo aggiunte alcune nostre Note. Avvertiamo che le Note si riferiscono alla Memoria e non all'antecedente Estratto il quale sarà facilmente inteso dopo la lettura della Memoria stessa. E quanto ad alcune teoriche d'analisi che si annunziano nell'Estratto e non entrano nella Memoria, tutto ciò che possiamo far di presente si è nudrire il desiderio di studiarle e voltarle egualmente nel nostro idioma quando l'Autore voglia onorarci della spedizione degli scritti che le contengono.*

I Traduttori della seguente Memoria.

SULLA MECCANICA CELESTE

E SOPRA UN NUOVO CALCOLO CHIAMATO

CALCOLO DEI LIMITI

MEMORIA

DI AGOSTINO LUIGI CAUCHY

MEMBRO DELL'ISTITUTO DI FRANCIA

Prima d'indicare in modo più preciso l'oggetto delle seguenti ricerche non sarà inutile dire in quale occasione esse furono intraprese (*).

I metodi che i Geometri hanno impiegati per dedurre dal principio della gravitazione i movimenti dei corpi celesti lasciavano ancora molto a desiderare. Spesso essi mancavano del conveniente rigore. Così in particolare non si trova in nessun luogo della meccanica celeste di Laplace una dimostrazione sufficiente della formola di Lagrange che nondimeno serve di base alla maggior parte delle teoriche esposte in quell'opera. D'altronde per determinare col mezzo di questi metodi i coefficienti numerici relativi a questa o a quella perturbazione dei movimenti planetarj, gli astronomi erano talvolta costretti ad intraprendere calcoli che esigevano molti anni di lavoro. Uno dei più distinti membri dell'Accademia di Torino il sig. Plana avendomi anche ultimamente parlato del tempo che esigevano simili calcoli, gli ho detto essere io persuaso che sarebbe possibile abbreviarli ed anche determinare immediatamente il coefficiente numerico corrispondente ad una data ineguaglianza. Di fatto dopo qualche giorno io gli ho comunicato alcune formole col mezzo delle quali si potevano risolvere simili quistioni, e di cui io aveva già fatta l'applicazione alla determinazione di certi numeri interessanti a considerarsi nella teorica di Saturno e di Giove. Alcuni giorni dopo, appoggiandosi sopra risultati ch'egli aveva ottenuti in una delle sue Memorie, il sig. Plana mi disse aver ritrovato o le stesse formole o formole dello stesso genere. Del resto per istabilire le formole di cui si tratta ed altre formole analoghe contenute nella Memoria qui

(*) L'estratto di cui qui diamo la traduzione fu letto dall'Autore all'Accademia di Torino nella Sessione 11 ottobre 1831.

annessa, basta applicare allo sviluppo della funzione indicata per R nella meccanica celeste alcuni teoremi ben noti, quali sono il teorema di Taylor e quello di Lagrange sopra lo sviluppo delle funzioni delle radici delle equazioni algebriche o trascendenti. Ma è d'uopo ricorrere ad altri principj ed a nuovi metodi, per giungere a risultati più importanti di cui ora m'accingo a dare un' idea.

Non disgiungendo dalla serie di Stirling o di Maclaurin il resto che la completa e presentando questo resto sotto la forma che gli ha data Lagrange o sotto forme dello stesso genere, si può in un gran numero di casi accertarsi che una funzione $f(x)$ della variabile x è sviluppabile per certi valori di x in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di questa variabile e si può determinare il limite superiore dei moduli (*) dei valori reali o immaginarj di x pei quali lo sviluppo sussiste.

Aggiungiamo che per isvolgere una funzione esplicita di più variabili x, y, z - - - secondo le potenze ascendenti di x, y, z - - -, vale a dire in una serie convergente di cui il termine generale sia una funzione intera ed omogenea di x, y, z - - -, basta surrogare alla funzione proposta $f(x, y, z$ - - -) la $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z$ - - -), poscia sviluppare la $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z$ - - -) secondo le potenze ascendenti di α e porre in seguito $\alpha = 1$. Per conseguenza la teorica dello sviluppo delle funzioni esplicite di più variabili viene ridotta immediatamente alla teorica dello sviluppo delle funzioni esplicite d' una sola variabile. Ma è importante osservare che l' applicazione delle regole col mezzo delle quali si può decidere se la serie di Stirling è convergente o divergente, diventa spesso assai difficile pel motivo che in questa serie il termine generale o proporzionale ad x^n contiene la derivata dell'ordine n della funzione $f(x)$, o per lo meno il suo valore corrispondente ad un valor nullo di x, e che esclusi alcuni casi particolari, la derivata dell'ordine n d'una funzione data prende una forma di più in più complicata a misura che n aumenta.

Quanto alle funzioni implicite, si sono date pel loro sviluppo in serie diverse formole dedotte il più delle volte dal metodo dei coefficienti indeterminati. Ma le dimostrazioni, che si è preteso dare di queste formole, sono generalmente insufficienti 1.° perchè non si è punto esaminato se le serie sono convergenti o divergenti, e conseguentemente non si può il più delle volte dire in

(*) Il modulo d' un valore immaginario di x è la radice quadrata positiva della somma che si ottiene aggiungendo il quadrato della parte reale al quadrato del coefficiente di $\sqrt{-1}$. Allorchè questo coefficiente svanisce il modulo si riduce al valore numerico di x.

quali casi le formole debbano essere ammesse o rigettate; 2.° perchè non si è punto badato a dimostrare che gli sviluppi ottenuti avevano per somma le funzioni sviluppate, mentre può accadere che una serie convergente provenga dallo sviluppo d'una funzione senza che la somma della serie sia equivalente alla funzione stessa. Vero è che lo stabilire regole generali proprie a determinare in quali casi gli sviluppi delle funzioni implicite siano convergenti, e rappresentino queste stesse funzioni, sembrava offrire grandi difficoltà. Non è difficile persuadersene leggendo attentamente la Memoria di Laplace sopra la convergenza o la divergenza della serie risultante nel moto elittico d'un pianeta dallo sviluppo del raggio vettore secondo le potenze ascendenti dell'eccentricità. Io penso adunque che i Geometri e gli Astronomi daranno qualche importanza al mio lavoro quand'essi conosceranno essere io pervenuto a stabilire sopra lo sviluppo delle funzioni sia esplicite che implicite principj generali e di facile applicazione, col sussidio dei quali si giunge non solamente a dimostrar con rigore le formole e ad indicare le condizioni della loro esistenza, ma ancora a fissare i limiti degli errori che si commettono trascurando i resti che devono completare le serie. Fra queste regole quelle che si riferiscono a fissare i limiti degli errori commessi presentano nel loro insieme un nuovo calcolo che io chiamerò col nome di *Calcolo dei limiti.* M'accontenterò di indicare qui in poche parole alcune delle proposizioni fondamentali sopra le quali posa il calcolo di cui si tratta.

Sia $f(x)$ una funzione della variabile x. Se si attribuisce a questa variabile un valore immaginario $\overline{x}$ di cui il modulo sia X, il rapporto di $\overline{x}$ ad X sarà un esponenziale della forma $e^{p\sqrt{-1}}$, indicando p un certo arco reale che si potrà supporre compreso fra i limiti $-\pi$ e $+\pi$, ed il modulo di $f(\overline{x})$ dipenderà congiuntamente dal modulo X e dall'arco p. Ora fra i valori che prenderà il modulo di $f(\overline{x})$ quando vi si farà variare p, ve ne avrà generalmente uno che sarà superiore a tutti gli altri. È appunto questo valore massimo del modulo di $f(\overline{x})$ che io specialmente considero nel calcolo dei limiti. Lo indico colla lettera caratteristica Λ collocata davanti alla funzione $f(\overline{x})$ e provo 1.° che la funzione $f(x)$ è sviluppabile col teorema di Stirling in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x allorchè il modulo di x essendo eguale od inferiore ad X, la funzione $f(x)$ resta finita e continua per il modulo X o per un modulo più piccolo della variabile reale o immaginaria x; 2.° che allora nello sviluppo di $f(x)$ secondo le potenze ascendenti di x il coefficiente di x^n offre un modulo inferiore al quoziente che si ottiene dividendo per X^n il modulo massimo di $f(\overline{x})$. Ciò posto, se si attribuisce ad x un valore

immaginario di cui il modulo sia designato per ξ, il modulo del termine generale nello sviluppo di $f(\overline{x})$ sarà inferiore al prodotto di $\Lambda f(\overline{x})$ per la n^{esima} potenza del rapporto $\frac{\xi}{X}$. D'altronde allorchè la funzione $f(x)$ è sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x, il resto che completa questa serie prolungata sino all' n^{esimo} termine equivale alla somma dei termini nei quali l'esponente di x è eguale o superiore ad n. Dunque il modulo di questo resto se esso è immaginario, o il suo valor numerico se esso è reale non sorpasserà la somma dei termini corrispondenti a quelli che noi abbiamo indicati nella progressione geometrica che ha per rapporto $\frac{\xi}{X}$, vale a dire il resto che completa questa progressione. Così la determinazione d'un limite superiore al resto che completa la serie propria a rappresentare lo sviluppo d'una funzione qualunque, si trova ridotta alla determinazione dei resti di progressioni geometriche, ossia ad una questione sciolta già da lungo tempo in analisi. Si sa difatto che nella progressione geometrica la quale ha per primo termine l'unità e per rapporto $\frac{\xi}{X}$, la somma dei termini nei quali ξ porta un esponente eguale o superiore ad n equivale al quoziente dell' n^{esimo} termine per la differenza $1 - \frac{\xi}{X}$. Allorchè il primo termine diventa $\Lambda f(\overline{x})$ bisogna moltiplicare per questo primo termine il quoziente di cui si tratta.

Importa osservare che, dietro ciò che si è detto, i limiti superiori ai moduli del termine generale della serie di Stirling e del resto che completa questa serie sono funzioni del modulo X che rappresentano i massimi relativi a p dei moduli di certe funzioni della variabile immaginaria $\overline{x} = Xe^{p\sqrt{-1}}$: d'altronde il modulo X deve sorpassare il modulo ξ ed essere determinato di maniera che la funzione $f(x)$ resti finita e continua per il modulo X della variabile x e per un modulo più piccolo. Ora fra i valori di X che adempiono queste due condizioni si dovrà evidentemente scegliere di preferenza quelli che rendono i limiti superiori di cui si tratta i più piccoli possibili: ed allora questi limiti, considerati come valori particolari delle funzioni di $\overline{x}$ qui sopra menzionate, saranno contemporaneamente massimi relativamente all'angolo p, e minimi relativamente al modulo X, o ciò che noi abbiamo chiamato in un'altra Memoria i moduli principali di queste stesse funzioni.

S'aggiunga che quando si ha di mira unicamente di calcolare limiti superiori ai moduli dei termini generali o dei resti delle serie, non è punto necessario determinare esattamente i moduli principali di cui è questione, può bastare la ricerca di numeri superiori a questi moduli.

È facile estendere i principj che noi abbiamo indicati alle funzioni di più variabili. Sia difatto $f(x, y, z - - -)$ una funzione data delle variabili $x, y, z - - -$. Se si attribuiscono a queste variabili valori immaginarj $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -$ i di cui moduli siano rispettivamente $X, Y, Z - - -$, il modulo di $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -)$ dipenderà contemporaneamente dai moduli $X, Y, Z - - -$ e dai rapporti immaginarj $\frac{\bar{x}}{X}, \frac{\bar{y}}{Y}, \frac{\bar{z}}{Z} - - -$. Ora si possono scegliere questi rapporti o piuttosto gli archi di circolo che essi contengono, di maniera che il modulo di $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -)$ acquisti il più gran valore possibile rimanendo gli stessi i moduli $X, Y, Z - - -$. È appunto questo valor più grande o questo valore massimo che io indico colla caratteristica Λ collocata davanti alla funzione $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -)$; e provo 1.° che la funzione $f(x, y, z - - -)$ è sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di $x, y, z - - -$ quando i moduli delle variabili $x, y, z - - -$ essendo eguali o inferiori ad $X, Y, Z - - -$ la funzione $f(x, y, z - - -)$ resta finita e continua per i moduli $X, Y, Z - - -$ di queste stesse variabili e per moduli più piccoli; 2.° che allora nello sviluppo di $f(x, y, z - - -)$ secondo le potenze ascendenti di $x, y, z - - -$ il coefficiente di $x^n y^{n'} z^{n''} - - -$ offre un modulo inferiore al quoziente che si ottiene dividendo per $X^n Y^{n'} Z^{n''} - - -$ il modulo massimo di $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -)$. Ciò posto se si attribuiscano ad $x, y, z - - -$ valori reali o immaginarj, i cui moduli $\xi, \eta, \zeta - - -$ siano più piccoli di $X, Y, Z - - -$, i diversi termini dello sviluppo della funzione $f(x, y, z - - -)$, offriranno moduli rispettivamente inferiori ai termini corrispondenti d'una funzione di $\xi, \eta, \zeta - - -$ che si otterrà moltiplicando il modulo massimo di $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -)$ per le somme delle progressioni geometriche che hanno per primi termini l'unità e per ragioni i rapporti $\frac{\xi}{X}, \frac{\eta}{Y}, \frac{\zeta}{Z} - - -$. Dunque se si trascurano nello sviluppo della prima funzione $f(x, y, z - - -)$ certi termini, per esempio quelli nei quali l'esponente di x è eguale o superiore ad n, l'esponente di y eguale o superiore ad n', l'esponente di z eguale o superiore ad $n'' - - -$ ecc. l'errore (*) commesso sarà più piccolo che la somma dei termini corrispondenti della seconda funzione e conseguentemente inferiore al prodotto di $\Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -)$ pei resti delle progressioni geometriche qui sopra menzionate.

Osserviamo ancora che dopo aver determinato in funzione di $X, Y, Z - - -$

(*) Allorchè i termini trascurati sono reali, l'errore commesso ha per misura il valore numerico della loro somma. Allorchè essi divengono immaginarj il modulo di questa stessa somma può servire a misurare l'errore di cui si tratta.

un limite superiore al resto della serie che rappresenta lo sviluppo di $f(x, y, z - - -)$ secondo le potenze ascendenti di $x, y, z - - -$, si dovranno scegliere $X, Y, Z - - -$ in modo da rendere questo limite il più piccolo possibile.

Se si volesse ottenere un limite superiore alla somma dei moduli dei termini che nello sviluppo di $f(x, y, z - - -)$ offrono un grado eguale o superiore ad n, vale a dire dei termini nei quali gli esponenti di $x, y, z - - -$ presentano una somma eguale o superiore ad n, basterebbe cercare un limite superiore al resto della serie rappresentante lo sviluppo di $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z - - -)$ secondo le potenze ascendenti di α e porre in questo limite $\alpha = 1$.

I principj che si sono da noi stabiliti s' applicano assai facilmente alle serie che rappresentano gli sviluppi delle funzioni esplicite d'una o di più variabili; e forniscono per queste serie non solamente regole generali di convergenza, ma ancora limiti superiori ai moduli dei termini generali ed agli errori che si commettono quando si calcola soltanto un certo numero di termini, trascurando tutti gli altri. Per estendere l' applicazione degli stessi principj alle serie che rappresentano gli sviluppi d' una o di più funzioni implicite determinate da una o più equazioni algebriche o trascendenti, basta osservare che in virtù della formola di Lagrange e delle formole analoghe che si deducono dal calcolo dei residui, i coefficienti dei termini generali in queste stesse serie possono essere, come nelle serie di Taylor e Stirling, espresse col mezzo delle derivate dei diversi ordini di certe funzioni, e che in conseguenza la determinazione dei limiti superiori ai moduli dei termini generali e ai resti delle serie può essere ridotta alla determinazione dei moduli massimi di queste stesse funzioni. Si potranno dunque per le serie proposte stabilire regole di convergenza e trovare limiti superiori ai resti delle serie o piuttosto ai loro moduli. La sola questione che resterà indecisa sarà di sapere se le serie, supposte convergenti, hanno effettivamente per somma le funzioni implicite dagli sviluppi delle quali provennero. Ora per risolvere questa questione si può partire da proposizioni generali simili a quelle che ora espongo.

1.° *Teorema.* Supponiamo che una funzione implicita u della variabile x sia determinata da un'equazione algebrica o trascendente, che essa si riduca ad u_0 per un valore nullo di x e che siasi sviluppata questa funzione implicita in una serie ordinata secondo le potenze ascendenti di x colla formola di Stirling, di Lagrange ecc., o ciò che torna lo stesso col metodo dei coefficienti indeterminati. La somma di questa serie rappresenterà la funzione u se il valore di x è scelto di tal maniera che, essendo convergente la serie, la funzione esplicita di x ed u che costituisce il primo membro dell' equazione data, sia essa stessa

sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti della variabile x e della differenza $u - u_0$.

2.° *Teorema.* Supponiamo che più funzioni implicite u, v, w - - - di più variabili x, y, z siano determinate da una o più equazioni algebriche o trascendenti, che esse si riducano ad u_0, v_0, w_0 - - - per valori nulli di x, y, z - - -, e che siansi sviluppate queste funzioni implicite in serie ordinate secondo le potenze ascendenti di x, y, z - - - colle formole di Stirling, Lagrange ecc., o ciò che torna lo stesso col metodo dei coefficienti indeterminati. Le somme di queste serie rappresenteranno i valori di u, v, w, - - - se i valori di x, y, z - - - sono talmente scelti che le serie essendo convergenti, le funzioni esplicite di x, y, z - - - u, v, w - - - costituenti i primi membri delle equazioni date siano esse stesse sviluppabili in serie convergenti ordinate secondo le potenze ascendenti delle variabili x, y, z - - - e delle differenze $u - u_0$, $v - v_0$, $w - w_0$ - - -.

Per dimostrare queste proposizioni basta evidentemente osservare che se le condizioni enunciate sono adempite, i primi membri delle equazioni date dopo le sostituzioni dei valori generali di $u - u_0$, $v - v_0$, $w - w_0$ - - - saranno ancora serie convergenti ordinate secondo le potenze ascendenti di x, y, z - - -, e che in queste serie convergenti il coefficiente di ciascun termine sarà identicamente nullo.

V' è di più: senza il soccorso di queste proposizioni ed appoggiandosi a formole generali fornite dal calcolo dei residui si possono stabilire direttamente regole degne di osservazione sopra la convergenza delle serie rappresentanti gli sviluppi delle funzioni implicite e sopra la determinazione di limiti superiori ai moduli dei resti che completano le serie.

Le proposizioni qui sopra menzionate possono ancora essere facilmente estese al caso in cui le funzioni implicite sarebbero determinate da equazioni alle differenze finite o infinitamente piccole, od alle differenze parziali o alle differenze miste. Così in particolare si potrà enunciare il teorema seguente.

3.° *Teorema.* Siano date più equazioni differenziali simultanee fra la variabile x, fra funzioni incognite y, z - - - di questa variabile e le loro derivate di diverso ordine y', z' - - - y'', z'' - - -. Supponiamo d'altronde che col metodo dei coefficienti indeterminati siansi sviluppate y, z - - - in serie ordinate secondo le potenze ascendenti di x. Le somme di queste serie rappresenteranno i valori generali di y, z - - - se il valore di x è scelto in modo che, le serie di cui si tratta e per conseguenza quelle che rappresenteranno le derivate di y, z - - - essendo convergenti, le funzioni esplicite di x, y, z - - - y', z', - - - che costituiscono i primi membri delle equazioni date, siano esse stesse svilup-

pabili in serie convergenti ordinate secondo le potenze ascendenti di x e delle differenze che si ottengono sottraendo dai valori generali delle $y, z, --- y', z' ---$ i loro valori iniziali corrispondenti ad $x = 0$.

Ho indicato rapidamente alcuni dei principali risultati che si trovano nella seguente Memoria. Essa contiene altresì 1.° una teorica della variazione delle costanti arbitrarie (*) più generale e per alcun lato più semplice di quella che si trova esposta nelle Memorie dei signori Lagrange, Laplace e Poisson; 2.° alcuni integrali definiti proprj a rappresentare nello sviluppo noto della funzione R il coefficiente del seno o del coseno d'un angolo dato; 3.° parecchi sviluppi nuovi della funzione R con formole proprie non solo a fornire i termini generali di questo sviluppo, ma ancora a determinare i limiti degli errori commessi quando si conservano soltanto alcuni termini trascurando tutti quelli che li seguono. Faccio altresì vedere in quali casi l'uno di questi sviluppi deve essere impiegato di preferenza all'altro. Così in particolare se si domanda la perturbazione prodotta nel moto d'un pianeta da un altro pianeta situato assai prossimamente alla stessa sua distanza dal sole, lo sviluppo impiegato sinora dagli astronomi dovrà essere rigettato e converrà sostituirvi uno degli altri sviluppi qui sopra mentovati. Si dovrà dunque ricorrere a questi nuovi sviluppi nella teorica dei piccoli pianeti quando si cercheranno le ineguaglianze che dipendono dalle loro scambievoli attrazioni.

Del resto potrò fra breve offrire altre Memorie nelle quali io mostrerò come si possa applicare il calcolo dei residui alla teorica dello sviluppo delle funzioni implicite, e come assicurarsi della convergenza delle serie che rappresentano gli integrali delle equazioni differenziali lineari o non lineari, e fissare limiti superiori ai moduli dei resti che completano queste stesse serie.

(*) In una Memoria presentata all'Istituto il sig. Ostrogradsky erasi pure occupato della variazione delle costanti arbitrarie ed aveva applicato, a quanto credo, una formola del sig. Fourier alla conversione dei termini che compongono lo sviluppo della funzione R in integrali definiti. Ma non rimanendomi che una ricordanza confusa di questa Memoria, tutto ciò che qui posso dire è che nel caso in cui alcune delle sue formole coincidessero con alcune delle mie, non pretendo punto contrastargli la priorità.

PARTE PRIMA

CONSIDERAZIONI GENERALI

Formole per lo sviluppo delle funzioni in serie.
Calcolo dei Limiti.

Sia p un arco reale ed n un numero intero, si troverà supponendo $n>0$,

$$(1) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} e^{np\sqrt{-1}}\,dp = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-np\sqrt{-1}}\,dp = 0,$$

e supponendo $n=0$,

$$(2) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} dp = 2\pi.$$

Sia di più

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

una funzione intera della variabile x. Se si attribuisce a questa variabile un valore immaginario $\overline{x}$ di cui il modulo sia X, in modo che si abbia

$$\overline{x} = X e^{p\sqrt{-1}},$$

si caverà dalle formole (1) e (2)

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(\overline{x})\,dp = \int_{-\pi}^{\pi} f\left(\frac{1}{\overline{x}}\right) dp = 2\pi a_0.$$

Si avrà dunque

$$(3) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(\overline{x})\,dp = 2\pi f(0).$$

Egli è sempre facile estendere la formola (3) al caso in cui $f(\overline{x})$ cessa di essere una funzione intera di x: di fatto si ha generalmente

$$\frac{df(\overline{x})}{dX} = \frac{1}{X\sqrt{-1}}\,\frac{df(\overline{x})}{dp}.$$

Ora se si integrano i due membri dell' equazione precedente prima per rapporto ad X partendo da $X=0$, indi per rapporto a p fra i limiti $p=-\pi$, $p=\pi$; e si suppone che la funzione di X e di p rappresentata da $f(\overline{x})$ resti finita e continua, qualunque sia p, pel valore attribuito ad X e per un valore più piccolo, si troverà precisamente la formola (3).

D' altra parte siccome si ha $d\overline{x} = \overline{x}\,dp\sqrt{-1}$, se le funzioni derivate $f'(\overline{x})$, $f''(\overline{x})\cdots f^{(m)}(\overline{x})$ rimangono esse stesse finite e continue pel valore attribuito ad X e per valori più piccoli, basterà applicare l' integrazione per parti all' integrale

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\overline{x})}{\overline{x}^n} dp$$

per conchiuderne

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\overline{x})}{\overline{x}^n} dp = \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f'(\overline{x})}{\overline{x}^{n-1}} dp = \frac{1}{n(n-1)} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f''(\overline{x})}{\overline{x}^{n-2}} dp = \text{ecc.} - - -,$$

e per conseguenza

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\overline{x})}{\overline{x}^n} dp = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 - - - n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\overline{x}) dp,$$

o, in virtù della formola (3),

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\overline{x})}{\overline{x}^n} dp = \frac{f^{(n)}(0)}{1 \cdot 2 \cdot 3 - - - n}.$$

Se la funzione $f(\overline{x})$ svanisce per un valor nullo di x, l' equazione (3) darà semplicemente

$$(5) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(\overline{x}) dp = 0.$$

Dalle formole (3), (4), (5) si possono facilmente dedurre, come ora vedremo, quelle che servono a sviluppare una funzione esplicita o implicita della variabile x in una serie ordinata secondo le potenze ascendenti di questa variabile.

Se nella formola (5) si sostituisca alla $f(\overline{x})$ il prodotto

$$\overline{x} \frac{f(\overline{x}) - f(x)}{\overline{x} - x},$$

essendo x diversa da $\overline{x}$ ed il modulo di x inferiore ad X, se ne conchiuderà

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{x} f(\overline{x})}{\overline{x} - x} dp = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{x} f(x)}{\overline{x} - x} dp = f(x) \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ 1 + \frac{x}{\overline{x}} + \frac{x^2}{\overline{x}^2} + - - - \right\} dp = 2\pi f(x),$$

e conseguentemente

$$(6) \qquad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{x} f(\overline{x})}{\overline{x} - x} dp.$$

L' equazione (6) suppone, come le equazioni (3) e (5), che la funzione di X e di p rappresentata da $f(\overline{x})$ resti finita e continua pel valore attribuito ad X e per valori più piccoli.

Siccome il rapporto $\frac{\overline{x}}{\overline{x} - x}$ è la somma della progressione geometrica

$$1, \frac{x}{\overline{x}}, \frac{x^2}{\overline{x}^2}, \text{ecc.} - - -$$

che è sempre convergente sino a che il modulo di x rimane inferiore al modulo X di $\overline{x}$, siegue dalla formola (6) che $f(x)$ sarà sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x se il modulo della variabile reale od immaginaria x conserva un valore inferiore a quello pel quale la funzione $f(x)$ cessa di essere finita e continua.

Così in particolare, poichè le funzioni

$$\cos. x\,,\ \sin. x\,,\ e^x\,,\ e^{x^2}\,,\ \cos.(1-x^2)\ ---\ \text{ecc.}$$

non cessano giammai d'essere finite e continue, esse saranno sempre sviluppabili in serie convergenti ordinate secondo le potenze ascendenti di x.
Al contrario le funzioni

$$(1+x)^{\frac{1}{2}},\ \frac{1}{1-x}\,,\ \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}\,,\ \text{ecc.}$$

le quali, allorchè si attribuisce ad x un valore immaginario della forma $Xe^{p\sqrt{-1}}$, cessano d'essere funzioni continue di x al momento in cui il modulo X diventa eguale ad 1, saranno certamente sviluppabili in serie convergenti ordinate secondo le potenze ascendenti della variabile x, se il valor reale od immaginario di x offre un modulo inferiore all'unità: ma esse potranno divenire e diverranno effettivamente divergenti, se il modulo di x sorpassa l'unità. Finalmente siccome le funzioni

$$e^{\frac{1}{x}}\,,\ e^{\frac{1}{x^2}}\,,\ \cos.\frac{1}{x}\,,\ \text{ecc.}$$

divengono discontinue per un valore nullo di x, cioè quando il modulo di x è il più piccolo possibile, esse non saranno giammai sviluppabili in serie convergenti ordinate secondo le potenze ascendenti di x.

Siegue ancora dalla formola (6) che nello sviluppo di $f(x)$ secondo le potenze ascendenti di x, il termine generale sarà

$$(7)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{x^n}{\overline{x}^n}f(\overline{x})\,dp=\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\ ---\ n}f^{(n)}(0);$$

dunque, allorchè la funzione $f(x)$ sarà sviluppabile in serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x, si avrà

$$(8)\qquad f(x)=f(0)+\frac{x}{1}f'(0)+\frac{x^2}{1\cdot 2}f''(0)+\ ---$$

conformemente al teorema di Maclaurin o di Stirling.

Se si chiama ξ il modulo di x e $\Lambda f(\overline{x})$ il limite del modulo di $f(\overline{x})$, cioè a dire il più gran valore che questo modulo possa acquistare quando vi si faccia variare l'angolo p senza cambiare il modulo X, il primo membro della formola (7) avrà (*) un modulo inferiore a

---

(*) Siccome il modulo della somma $x+y+z+---$ non può sorpassare la somma dei moduli di x, y, z --- (Vedi *Les Exercices de Mathématiques*), se si indica per $\varpi(x)$ una funzione reale o immaginaria d'una variabile x, per a, b due valori particolari di x reali e proprj a verificare la condizione $a<b$, per n un grandissimo numero e per i il rapporto $\frac{b-a}{n}$; il modulo del prodotto

$$i\{\varpi(a)+\varpi(a+i)+----+\varpi(a+(n-1)i)\}$$

$$(9) \qquad \left(\frac{\xi}{X}\right)^n \Delta f(\overline{x}),$$

che è quanto dire al termine generale della progressione geometrica che ha per somma

$$(10) \qquad \frac{X}{X-\xi}\,\Delta f(\overline{x}).$$

Dunque il resto di questa progressione geometrica, cioè

$$(11) \qquad \frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\,\Delta f(\overline{x}),$$

sorpasserà il modulo del resto della serie convergente che rappresenta lo sviluppo di $f(x)$. Si potrebbe pure giungere alla stessa conclusione nel modo seguente.

Si ha generalmente

$$\frac{\overline{x}}{\overline{x}-x} = 1 + \frac{x}{\overline{x}} + \frac{x^2}{\overline{x}^2} + \cdots + \frac{x^{n-1}}{\overline{x}^{n-1}} + \frac{x^n}{\overline{x}^{n-1}(\overline{x}-x)};$$

conseguentemente la formola (6) darà

$$f(x) = f(0) + \frac{x}{1} f'(0) + \cdots + \frac{x^{n-1}}{1\cdot 2\cdots(n-1)} f^{(n-1)}(0)$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n}{\overline{x}^{n-1}(\overline{x}-x)} f(\overline{x})\,dp.$$

Dunque il resto della serie di Maclaurin prolungata sino al n^{esimo} termine sarà

$$(12) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n}{\overline{x}^{n-1}(\overline{x}-x)} f(\overline{x})\,dp.$$

Ora, il modulo della funzione rinchiusa sotto il segno $\int$ nell' integrale (12) essendo inferiore all' espressione (11), egli è chiaro che altrettanto si potrà dire del modulo dell' integrale stesso.

Riassumendo quanto abbiamo detto si ottiene la proposizione seguente.

1.° *Teorema.* La funzione $f(x)$ sarà sviluppabile colla formola di Stirling in una serie convergente secondo le potenze ascendenti di x, se il modulo della variabile reale od immaginaria x conserva un valore inferiore a quello pel quale la funzione cessa di essere finita e continua. Sia X quest' ultimo

---

non sorpasserà il prodotto di $ni = b - a$ pel più gran modulo che $\varpi(x)$ possa acquistare quando si fa variare x fra i limiti $x = a$, $x = b = a + ni$: e per conseguenza questo modulo più grande sarà un limite superiore al quoziente che si ottiene dividendo per $b - a$ l' integrale $\int_a^b \varpi(x)\,dx$. Dunque anche il più gran modulo del rapporto $\frac{x^n}{\overline{x}^n} f(x)$, o l'espressione (9), sorpasserà il quoziente di $\int_{-\pi}^{\pi} \frac{x^n}{\overline{x}^n} f(\overline{x})\,dp$ per 2π.

valore od un valore più piccolo, ed $\bar{x}$ un'espressione immaginaria che offre il modulo X. I moduli del termine generale e del resto della serie di Stirling saranno rispettivamente inferiori ai moduli del termine generale e del resto della progressione geometrica che ha per somma

$$(13) \qquad \frac{X}{X-x} \Lambda f(\bar{x}),$$

conseguentemente al termine generale e al resto della progressione geometrica che ha per somma l'espressione (10), ξ indicando il modulo di x.

Parimenti se si indica per $f(x, y, z - - -)$ una funzione delle variabili $x, y, z - - -$, per $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -$ valori immaginarj attribuiti a queste variabili, per $X, Y, Z - - -$ i moduli di $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -$ e per $\Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -)$ il limite del modulo di $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -)$, cioè a dire il più gran valore che questo modulo possa acquistare quando vi si fanno variare i rapporti immaginarj $\frac{\bar{x}}{X}, \frac{\bar{y}}{Y}, \frac{\bar{z}}{Z} - - -$ senza cambiare $X, Y, Z - - -$, si stabilirà facilmente la proposizione seguente.

2.° *Teorema.* La funzione $f(x, y, z - - -)$ sarà sviluppabile colla formola di Stirling estesa al caso di più variabili in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di $x, y, z - - -$, se i moduli delle variabili reali od immaginarie $x, y, z - - -$ conservano valori inferiori a quelli pei quali la funzione cessa d'essere finita e continua. Siano $X, Y, Z - - -$ questi ultimi valori o valori più piccoli, ed $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -$ siano espressioni immaginarie che offrono per moduli $X, Y, Z - - -$. I moduli del termine generale e del resto della serie in questione saranno rispettivamente inferiori ai moduli del termine generale e del resto della serie che ha per somma il prodotto

$$(14) \qquad \frac{X}{X-x} \cdot \frac{Y}{Y-y} \cdot \frac{Z}{Z-z} - - - \Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -),$$

conseguentemente al termine generale ed al resto della serie che ha per somma

$$(15) \qquad \frac{X}{X-\xi} \cdot \frac{Y}{Y-\eta} \cdot \frac{Z}{Z-\zeta} - - - \Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -),$$

$\xi, \eta, \zeta - - -$ essendo i moduli di $x, y, z - - -$.

Tali sono le proposizioni che nel calcolo dei limiti servono di base alla teorica dello sviluppo delle funzioni esplicite d'una o di più variabili $x, y, z - - -$ secondo le potenze ascendenti di $x, y, z - - -$. Osserviamo del resto che il Teorema 1.° può essere applicato anche allo sviluppo delle funzioni di più variabili. Poichè a sviluppare $f(x, y, z - - -)$ secondo le potenze ascendenti di $x, y, z - - -$, basta sviluppare secondo le potenze ascendenti di α la funzione

$$f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, - - -)$$

od anche la seguente

$$f(\alpha^k x, \alpha^{k'} y, \alpha^{k''} z, - - -),$$

essendo $k, k', k'', ---$ numeri interi qualunque, e porre in seguito $a = 1$. Operando in questo modo, si proverà facilmente che se nello sviluppo di $f(x, y, z ---)$ si trascurano i termini in cui gli esponenti $n, n', n'', ---$ di $x, y, z ---$ verificano la condizione

$$(16) \qquad nk + n'k' + n''k'' + --- = \text{ovvero } > h$$

[essendo h un numero intero dato] l'errore commesso o il modulo della somma dei termini trascurati non sorpasserà

$$(17) \qquad \frac{1}{A^{h-1}(A-1)} \Lambda f(\bar{a}^k x, \bar{a}^{k'} y, \bar{a}^{k''} z, ---),$$

indicando A il modulo di $\bar{a}$, e questo modulo essendo superiore a l'unità ma scelto in modo che la funzione

$$f(\bar{a}^k x, \bar{a}^{k'} y, \bar{a}^{k''} z, ---)$$

resti finita e continua per questo stesso modulo di $\bar{a}$ o per moduli più piccoli. Nel caso in cui i numeri $k, k', k'' ---$ si riducono all'unità, la condizione (16) dà semplicemente

$$(18) \qquad n + n' + n'' + --- = \text{ovvero } > h,$$

e l'espressione (17) si riduce essa stessa a

$$(19) \qquad \frac{1}{A^{h-1}(A-1)} \Lambda f(\bar{a}x, \bar{a}y, \bar{a}z, ---).$$

La determinazione dei limiti superiori ai resti delle serie che rappresentano gli sviluppi delle funzioni esplicite si trova ridotta pei teoremi (1) e (2) alla determinazione delle quantità della forma

$$(20) \qquad \Lambda f(\bar{x}) \quad \text{o} \quad \Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} ---).$$

Si potrebbe pure a queste quantità sostituirne altre che fossero evidentemente più grandi. Ora egli è generalmente facile determinare o i valori esatti delle espressioni (20) o almeno numeri che sorpassino questi valori. Così per esempio se si indica per a una quantità positiva e per e la base dei logaritmi Neperiani, prendendo successivamente per $f(x)$ le funzioni

$$a \pm x, \; ax, \; \frac{a}{x}, \; e^{\pm x}, \; e^{\pm x\sqrt{-1}}, \; a^{\pm x}, \; a^{\pm x\sqrt{-1}}$$

si troveranno

$$(21) \qquad \begin{aligned} &\Lambda(a + \bar{x}) = \Lambda(a - \bar{x}) = a + X \\ &\Lambda(a\bar{x}) = aX, \quad \Lambda\left(\frac{a}{\bar{x}}\right) = \frac{a}{X} \\ &\Lambda e^{\bar{x}} = \Lambda e^{-\bar{x}} = \Lambda e^{\bar{x}\sqrt{-1}} = \Lambda e^{-\bar{x}\sqrt{-1}} = e^X \\ &\Lambda a^{\bar{x}} = \Lambda a^{-\bar{x}} = \Lambda a^{\bar{x}\sqrt{-1}} = \Lambda a^{-\bar{x}\sqrt{-1}} = a^X. \end{aligned}$$

Parimenti pigliando per $f(x)$ le funzioni

$$(1 \pm x)^a, \quad (1 \pm x)^{-a},$$

e supponendo $X < 1$, si troveranno

$$(22) \qquad \begin{aligned} \Lambda(1+\bar{x})^a &= \Lambda(1-\bar{x})^a = (1+X)^a \\ \Lambda(1+\bar{x})^{-a} &= \Lambda(1-\bar{x})^{-a} = (1-X)^{-a}. \end{aligned}$$

Se si pigliasse $f(x) = \sin. x$, il quadrato del modulo di $f(\bar{x}) = \sin.\bar{x}$ sarebbe il quarto del trinomio

$$e^{2X\sin.p} + e^{-2X\sin.p} - 2\cos.(2X\cos.p).$$

Ora basta far variare l'angolo p fra i limiti $p = 0$, $p = \frac{\pi}{2}$ acciò questo trinomio acquisti tutti i valori ch'esso può prendere, e, siccome la sua derivata relativa a p è il prodotto di $8X^2\sin.p\cos.p$ per la differenza

$$\frac{e^{2X\sin.p} - e^{-2X\sin.p}}{4X\sin.p} - \frac{\sin.(2X\cos.p)}{2X\cos.p}$$

che resta sempre positiva, poichè il primo termine è superiore ed il secondo inferiore all'unità (*), egli è chiaro che il modulo di $\sin.\bar{x}$ crescerà incessantemente da $p = 0$ a $p = \frac{\pi}{2}$. Dunque $\Lambda\sin.\bar{x}$ sarà il modulo di $\sin.\bar{x}$ per $\bar{x} = Xe^{\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}} = X\sqrt{-1}$ di modo che si avrà

$$(23) \qquad \begin{aligned} \Lambda\sin.\bar{x} &= \frac{e^X - e^{-X}}{2}; \quad \text{si troverà pure} \\ \Lambda\cos.\bar{x} &= \frac{e^X + e^{-X}}{2}. \end{aligned}$$

Si avranno poscia

$$(24) \qquad \begin{aligned} \Lambda\sin.(a \pm \bar{x}) &= \text{ovvero} < \frac{e^X - e^{-X}}{2}\sqrt{\cos.^2 a} + \frac{e^X + e^{-X}}{2}\sqrt{\sin.^2 a} \\ \Lambda\cos.(a \pm \bar{x}) &= \text{ovvero} < \frac{e^X + e^{-X}}{2}\sqrt{\cos.^2 a} + \frac{e^X - e^{-X}}{2}\sqrt{\sin.^2 a} \end{aligned}$$

ecc. ecc. ecc.

Siano ancora u, v, w - - - varie funzioni delle variabili x, y, z - - - ed $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ - - - ciò che divengono u, v, w - - - quando vi si sostituisce $\bar{x}$ per x, $\bar{y}$ per y, $\bar{z}$ per z - - -; si troveranno

---

(*) Si ha effettivamente per valori reali di x

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2x} = 1 + \frac{x^2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \cdots > 1, \quad \text{e} \quad \frac{\sin.x}{x} < 1.$$

$$(25)\quad \begin{array}{l} \Lambda(\bar{u}\pm\bar{v}\pm\bar{w}\pm\cdots) = \text{ovvero} < \Lambda\bar{u}+\Lambda\bar{v}+\Lambda\bar{w}+\cdots \\ \Lambda(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w}\cdots) = \quad \text{ovvero} \quad < \Lambda\bar{u}\cdot\Lambda\bar{v}\cdot\Lambda\bar{w}\cdots \\ \quad\text{ecc.} \qquad\qquad \text{ecc.} \qquad\qquad \text{ecc.} \end{array}$$

$$(26)\quad \begin{array}{l} \Lambda e^{\bar{z}\sqrt{-1}} = \text{ovvero} < 2\,\Lambda\cos.\bar{u} \\ \quad\text{ecc.} \qquad\qquad \text{ecc.} \end{array}$$

Per facilitare la ricerca delle quantità eguali o superiori a $\Lambda f(\bar{x})$, $\Lambda f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}\cdots)$ è utile considerare non solamente il più grande ma ancora il più piccolo valore che possano acquistare le funzioni di $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}\cdots$ quando si fanno variare i rapporti $\frac{\bar{x}}{X}, \frac{\bar{y}}{Y}, \frac{\bar{z}}{Z}\cdots$. Immaginiamo che il più gran valore essendo sempre indicato colla caratteristica Λ, se ne indichi il più piccolo colla stessa caratteristica seguita da un accento ossia con Λ'. Si troveranno, supponendo a positivo,

$$\Lambda'(a+\bar{x}) = \Lambda'(a-\bar{x}) = a - X, \qquad \text{per } X < a;$$

$$\Lambda'(a+\bar{x}) = \Lambda'(a-\bar{x}) = X - a, \qquad \text{per } X > a;$$

$$(27)\quad \Lambda'(a\,\bar{x}) = a\,X;\ \Lambda'\left(\frac{a}{\bar{x}}\right) = \frac{a}{X};$$

$$\Lambda' e^{\bar{x}} = \Lambda' e^{-\bar{x}} = \Lambda' e^{\bar{x}\sqrt{-1}} = \Lambda' e^{-\bar{x}\sqrt{-1}} = e^{-X};$$

$$\Lambda' a^{\bar{x}} = \Lambda' a^{-\bar{x}} = \Lambda' a^{\bar{x}\sqrt{-1}} = \Lambda' a^{-\bar{x}\sqrt{-1}} = a^{-X}.$$

$$(28)\quad \begin{array}{ll} \Lambda'(1+\bar{x})^a = \Lambda'(1-\bar{x})^a = (1-X)^a, & \text{per } X < 1; \\ \Lambda'(1+\bar{x})^{-a} = \Lambda'(1-\bar{x})^{-a} = (1+X)^{-a}, & \text{per } X < 1. \end{array}$$

$$(29)\quad \Lambda'\sin.\bar{x} = \sin.X;\ \Lambda'\cos.\bar{x} = \cos.X.$$

$$(30)\quad \begin{array}{l} \Lambda'(\bar{u}\,\bar{v}\,\bar{w}\cdots) = \text{ovvero} > \Lambda'\bar{u}\cdot\Lambda'\bar{v}\cdot\Lambda'\bar{w}\cdots \\ \qquad\text{ecc.} \qquad\qquad \text{ecc.} \end{array}$$

Si avrà d' altronde

$$(31)\quad \Lambda\frac{\bar{u}}{\bar{v}} = \text{ovvero} < \frac{\Lambda\bar{u}}{\Lambda'\bar{v}};\quad \Lambda'\frac{\bar{u}}{\bar{v}} = \text{ovvero} > \frac{\Lambda'\bar{u}}{\Lambda\bar{v}};$$

$$(32)\quad \begin{array}{ll} \Lambda'(\bar{u}\pm\bar{v}) = \quad \text{ovvero} > \Lambda'\bar{u} - \Lambda\bar{v}, & \text{se } \Lambda'\bar{u} > \Lambda\bar{v}; \\ \Lambda'(\bar{u}\pm\bar{v}) = \quad \text{ovvero} > \Lambda'\bar{v} - \Lambda\bar{u}, & \text{se } \Lambda'\bar{v} > \Lambda\bar{u} \\ \quad\text{ecc.} \qquad\qquad \text{ecc.} & \end{array}$$

Supponiamo che col mezzo di queste diverse formole si voglia calcolare per esempio un limite eguale o superiore a

$$\Lambda\frac{\bar{v}}{\bar{x}-\bar{u}}$$

supponendo $\Lambda\bar{u} < X$. Si troverà successivamente

$$\Lambda \frac{\bar{v}}{\bar{x}-\bar{u}} = \text{ovvero} < \frac{\Lambda \bar{v}}{\Lambda'(\bar{x}-\bar{u})},$$

$$\text{e} \quad \Lambda'(\bar{x}-\bar{u}) = \text{ovvero} < X - \Lambda \bar{u};$$

indi si conchiuderà

$$(33) \qquad \Lambda \frac{\bar{v}}{\bar{x}-\bar{u}} = \text{ovvero} < \frac{\Lambda \bar{v}}{X - \Lambda \bar{u}}.$$

Allorchè col mezzo di formole simili alle precedenti si sono determinate le quantità (20) o quantità evidentemente più grandi che loro si possono senza inconveniente sostituire, conviene scegliere i moduli X, Y, Z, - - - da cui dipendono queste stesse quantità, in modo che i limiti superiori ai moduli dei termini generali delle serie che si considerano e dei resti che completano queste serie acquistino i più piccoli valori possibili.

Osserviamo ancora che nella ricerca d'un limite superiore al modulo del resto che completa lo sviluppo di $f(x)$, si può sostituire alla formola (11) il più gran valore che possa acquistare il modulo della funzione rinchiusa sotto il segno $\int$ nell'integrale (12), cioè a dire la quantità rappresentata colla notazione

$$(34) \qquad \Lambda \left\{ \frac{x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)} f(\bar{x}) \right\}.$$

Pigliando quest'ultima quantità in luogo delle quantità (11) pel limite di cui si tratta, si diminuirà sovente il valore di questo limite, atteso che si avrà generalmente

$$(35) \qquad \Lambda \left\{ \frac{x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)} f(\bar{x}) \right\} = \text{ovvero} < \frac{\xi^n}{X^{n-1}(Y-\xi)} \Lambda f(\bar{x}).$$

Ma da un altro lato il calcolo di questo stesso limite diverrà più difficile. Sembra che per questo motivo si dovrà ordinariamente preferire la formola (11) alla formola (34).

Quando si è determinata la quantità (34) in funzione di X, conviene scegliere X in modo che questa quantità divenga la più piccola possibile. Allora l'espressione (34) considerata come un valor particolare del modulo della funzione

$$(36) \qquad \frac{x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)} f(\bar{x})$$

è contemporaneamente un *massimo tra i massimi* di questo modulo relativamente all'angolo p, ed un *minimo* relativamente ad X, o ciò che noi abbiamo chiamato in altra memoria il *Modulo Principale* della funzione (36) [vedi il T. VIII delle Memorie dell'Istituto di Francia].

Per mostrare una applicazione dei principj che abbiamo stabiliti, pigliamo successivamente per $f(x)$ le due funzioni

$$e^x; \quad (1+x)^{-a}$$

le quali, come si è veduto, possono essere sviluppate in serie convergenti ordinate secondo le potenze di x, la prima qualunque sia x, la seconda allorchè il modulo di x è inferiore all' unità.

Le espressioni (9), (11) diverranno per $f(x)=e^x$

$$(37) \qquad \frac{\xi^n}{X^n} e^X, \quad \frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)} e^X;$$

e per $f(x)=(1+x)^{-a}$

$$(38) \qquad \frac{\xi^n}{X^n(1-X)^a}, \quad \frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)} \cdot \frac{1}{(1-X)^a}.$$

La prima delle espressioni (37) considerata come funzione di X acquista il più piccolo valore possibile allorchè si suppone $X=n$, ed allora queste espressioni si riducono a

$$(39) \qquad \left(\frac{e\,\xi}{n}\right)^n, \quad \frac{n}{n-\xi}\left(\frac{e\,\xi}{n}\right)^n.$$

Dunque le quantità (39) sono limiti superiori ai moduli del termine generale della serie che rappresenta lo sviluppo di e^x e del resto che la completa, ξ indicando il modulo di x. Parimenti la prima delle espressioni (38) considerata come funzione di X acquisterà il più piccolo valore possibile allorchè si supporrà $X=\frac{n}{n+a}$, ed allora le espressioni (38) diverranno

$$(40) \qquad \frac{(n+a)^{n+a}}{n^n a^a}\xi^n, \quad \frac{n}{n(1-\xi)-a\xi} \frac{(n+a)^{n+a}}{n^n a^a}\xi^n.$$

Dunque le quantità (40) sono limiti superiori ai moduli del termine generale della serie che rappresenta lo sviluppo di $(1+x)^{-a}$ e del resto che la completa.

Immaginiamo ora che si prenda per $f(x)$ una funzione razionale in modo che si abbia

$$f(x)=\frac{\mathrm{f}(x)}{F(x)},$$

$\mathrm{f}(x)$ ed $F(x)$ indicando due funzioni intere di x. Sia d'altronde ρ il più piccolo dei numeri ρ, ρ', ρ'' - - - che rappresentano i moduli delle radici della equazione

$$F(x)=0.$$

Si conchiuderà dai principj sopra esposti 1.° che la frazione razionale $\frac{\mathrm{f}(x)}{F(x)}$ sarà sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x finchè il modulo ξ della variabile x sarà inferiore a ρ; 2.° che se si attribuisce ad X un valore intermedio fra ξ e ρ, il resto della serie offrirà un modulo inferiore al prodotto

$$\frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)} \Lambda \frac{\mathrm{f}(\bar{x})}{F(\bar{x})}.$$

D'altra parte siccome chiamando K il valore numerico o il modulo di $F(0)$ si avrà

$$\Lambda \frac{f(\bar{x})}{F(\bar{x})} = \text{ovvero} < \frac{\rho\rho'\rho''---}{K} \frac{\Lambda f(\bar{x})}{(\rho - X)(\rho' - X)(\rho'' - X)---},$$

egli è chiaro che il modulo del resto della serie sarà ancora inferiore al rapporto

$$\frac{\rho\rho'\rho''---\xi^n \Lambda f(\bar{x})}{KX^{n-1}(X-\xi)(\rho - X)(\rho' - X)(\rho'' - X)---}.$$

Fra i valori che si possono attribuire ad X sarebbe difficile calcolare quello che fornisce il minimo del rapporto di cui si tratta, od anche il solo massimo del prodotto

$$X^{n-1}(X-\xi)(\rho - X)(\rho' - X)(\rho'' - X)---.$$

Ma si determineranno senza fatica i due valori di X che forniscono i massimi dei due prodotti

$$X^{(n-1)}(\rho - X), \quad (X-\xi)(\rho - X),$$

e questi due valori faranno conoscere due limiti superiori al modulo del resto della serie che rappresenterà lo sviluppo di $\frac{f(x)}{F(x)}$.

Se in luogo di prendere per $f(x)$ la frazione razionale $\frac{f(x)}{F(x)}$ si supponesse

$$f(x) = \left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^a$$

essendo a un numero frazionario o irrazionale, un modulo di x inferiore a ρ renderebbe ancora la funzione $\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^a$ sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x, purchè il numero ρ indicasse il più piccolo di tutti i moduli appartenenti alle radici delle due equazioni

$$f(x) = 0, \quad F(x) = 0.$$

Allora anche il resto della serie offrirebbe un modulo inferiore al prodotto

$$\frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)} \Lambda \left(\frac{f(\bar{x})}{F(\bar{x})}\right)^a.$$

Se per fissare le idee si suppone

$$f(x) = 1, \quad F(x) = 1 - 2x\cos.\delta + x^2 = \left(x - e^{\delta\sqrt{-1}}\right)\left(x - e^{-\delta\sqrt{-1}}\right)$$

essendo δ reale, si troverà $\rho = 1$, e se ne conchiuderà che ogni modulo di x inferiore all'unità rende la funzione

$$(1 - 2x\cos.\delta + x^2)^{-a}$$

sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti

di x: ciò che si sapeva di già [vedi una Memoria del sig. Laplace ed una Nota del sig. Plana inserita nel XIV volume della Corrispondenza Astronomica del sig. Zach].

Si riconoscerà altresì che il resto della serie offre un modulo inferiore al rapporto

$$\frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)(1-X)^{2a}},$$

e per conseguenza ai due numeri

$$\frac{(n+2a-1)^{n+2a}}{(n-1)^{n-1}(2a)^{2a}}\,\frac{\xi^n}{(n-1)(1-\xi)-2a\xi}\,;\quad \frac{(2a+1)^{n+2a}}{(2a)^{2a}}\,\frac{(1-\xi)^{2a+1}\xi^n}{(1+2a\xi)^{n-1}}$$

che rappresentano i valori dello stesso rapporto corrispondenti ai valori massimi dei prodotti

$$X^{n-1}(1-X)^{2a}\,;\quad (X-\xi)(1-X)^{2a}\,.$$

Prima di passare alla teorica dello sviluppo delle funzioni implicite, faremo osservare che l'esposizione dei principj qui sopra stabiliti può essere semplificata col mezzo del calcolo dei residui. Di fatto le formole (1), (2), (3), (5), (6), (8), che d'altronde erano di già cognite, si trovano tutte comprese in una delle formole fondamentali che presenta il calcolo dei residui, e che si può scrivere come siegue

$$(41)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\varphi(\overline{x})\,dp = 2\pi\,{}^{(X)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)\right)$$

essendo $\varphi(x)$ una funzione che conserva un valore unico e determinato per ciascun valore reale o immaginario di x corrispondente a un modulo rinchiuso fra i limiti *zero*, X.

Sia ora y una funzione implicita di x determinata da una equazione della forma

$$(42)\qquad f(x,y)=0,$$

e b un valore di y che corrisponde ad un valore particolare di x. Se si fa

$$(43)\qquad y=b+z,$$

l'equazione (42) diverrà

$$(44)\qquad f(x,b+z)=0.$$

Ciò posto, indichiamo per $\chi(x,y)$ la derivata di $f(x,y)$ presa rapporto ad y in modo che si abbia identicamente

$$(45)\qquad \chi(x,y)=\frac{df(x,y)}{dy}.$$

Supponiamo d'altronde che l'equazione (44) ammetta una sola radice reale o immaginaria z il cui modulo sia inferiore a Z, che la funzione $f(x,b+z)$ conservi un valore unico e determinato per ciascun valore reale o immaginario di z che offre un modulo eguale o inferiore a Z, e che per un simile valore di z la funzione $F(y)=F(b+z)$ non divenga giammai nè discontinua nè infinita.

Si avrà

$$(46)\qquad F(y)={}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\frac{\chi(x,b+z)}{f(x,b+z)}F(b+z)\right)\right),$$

il segno $\mathcal{E}$ riferendosi alla variabile z. D'altra parte se si indica per $\bar{z}$ una espressione immaginaria di cui il modulo sia Z, in modo che si abbia

$$(47)\qquad \bar{z}=Ze^{q\sqrt{-1}}$$

rappresentando q un arco reale, la formola (41) darà

$$(48)\qquad {}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\frac{\chi(x,b+z)}{f(x,b+z)}F(b+z)\right)\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}\,\frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}F(b+\bar{z})\,dq\,;$$

dunque l' equazione (46) potrà essere ridotta a

$$(49)\qquad F(y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}\,\frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}F(b+\bar{z})dq\,.$$

Si può eziandio dedurre direttamente la formola (49) dall'equazione (5) operando come siegue. Allorchè si suppone $\bar{z}=z$ i due termini del binomio

$$\frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}F(b+\bar{z})-\frac{F(b+z)}{\bar{z}-z}$$

divengono infiniti: ma questo binomio stesso acquista generalmente un valor finito cioè

$$\frac{dF(b+z)}{dz}+\frac{1}{2}\,\frac{F(b+z)}{\chi(x,b+z)}\cdot\frac{d\chi(x,b+z)}{dz}\,.$$

Dunque se il modulo Z di z è scelto in modo da adempire le condizioni precedentemente enunciate, cioè 1.° che l'equazione (44) ammetta una sola radice il cui modulo sia inferiore a Z; 2.° che la funzione $F(b+z)$ non divenga infinita o discontinua per un modulo di z eguale o inferiore a Z, il prodotto

$$(50)\qquad \bar{z}\left\{\frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}F(b+\bar{z})-\frac{F(b+z)}{\bar{z}-z}\right\}$$

resterà funzione continua di Z e di q pel valore attribuito a Z o per un valore più piccolo. Ora se nell'equazione (5) si mette al luogo di $\bar{x}$ la $\bar{z}$ e per la funzione $f(\bar{x})$ il prodotto (50), si troverà, prendendo per z la radice dell'equazione (44),

$$\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}\,\frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}F(b+\bar{z})dq=F(b+z)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\bar{z}\,dq}{\bar{z}-z}=2\pi F(b+z)=2\pi F(y);$$

e saremo così condotti all' equazione (49).

Quando nella formola (49) si pone $F(y)=1$, essa dà

$$(51)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}\,\frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}dq=1\,.$$

Quando vi si suppone al contrario $F(y)=y$, se ne conchiude

$$(52)\qquad y=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}(b+\bar{z})\frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}dq;$$

poscia, avuto riguardo all'equazione (51),

$$(53)\qquad y=b+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}^2\frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}dq.$$

Se l'equazione (44) ammettesse m radici eguali o disuguali i cui moduli fossero inferiori a Z, indicando con $z, z_1, z_2, \cdots z_{m-1}$ queste stesse radici, e con $y, y_1, y_2, \cdots y_{m-1}$ le radici corrispondenti dell'equazione (42), si troverebbe

$$(54)\qquad F(y)+F(y_1)+\cdots+F(y_{m-1})={}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\frac{\chi(x,b+z)}{f(x,b+z)}F(b+z)\right)\right);$$

poscia da questa formola combinata coll'equazione (48) si dedurrebbe la seguente

$$(55)\qquad F(y)+F(y_1)+\cdots+F(y_{m-1})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}\frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}F(b+\bar{z})\,dq,$$

che si può stabilire direttamente a somiglianza della (49).
Se nella formola (55) si pone $F(y)=1$, essa darà

$$(56)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}\frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}dq=m.$$

Se si pone al contrario $F(y)=y$, si troverà

$$(57)\qquad y+y_1+y_2+\cdots+y_{m-1}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}(b+\bar{z})\frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}dq;$$

poscia, avuto riguardo all' equazione (56),

$$(58)\qquad y+y_1+y_2+\cdots+y_{m-1}=mb+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}^2\frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}dq.$$

Mostreremo a momenti come col mezzo delle formole (53), (58), (49) e (55) si possono sviluppare le funzioni implicite della variabile x in serie ordinate secondo le potenze ascendenti di questa variabile. Ma prima interessa stabilire una proposizione rimarcabile che può essere impiegata assai utilmente quando si vuol determinare il numero delle radici dell' equazione (44) le quali offrono un modulo inferiore a Z. Ecco l'enunciato di questa proposizione.

3.° *Teorema.* Sia m il numero delle radici dell' equazione

$$(59)\qquad f(0,b+z)=0$$

che offrono moduli più piccoli di Z. Supponiamo d'altronde 1.° che per moduli di x e di z rispettivamente inferiori a X ed a Z la funzione $f(x,b+z)$ ottenga sempre un valore unico e determinato; 2.° che Z essendo il modulo

di $\bar{z}$, il logaritmo Neperiano del rapporto $\frac{f(x, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})}$ ossia

$$(60) \qquad \text{l.} \frac{f(x, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})}$$

sia sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x per ogni modulo di x inferiore a X. Per un simile modulo di x l'equazione (44) offrirà essa stessa un numero m di radici i cui moduli saranno più piccoli di Z.

Dimostrazione. Difatti ammettiamo che per un modulo di x inferiore ad X si possa sviluppare

$$\text{l.} \frac{f(x, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})}$$

in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x; si avrà

$$(61) \qquad \text{l.} \frac{f(x, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})} = x\bar{u}_1 + x^2\bar{u}_2 + x^3\bar{u}_3 + \text{ecc.}$$

essendo $\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \text{---}$ funzioni di $\bar{z}$ che potranno esprimersi col mezzo dei valori presi dalla funzione $f(x, b+\bar{z})$ e dalle sue derivate relative alla variabile x quando x svanisce. Ora si dedurrà dall'equazione (61) la

$$(62) \qquad \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} = \frac{\chi(0, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})} + x\frac{d(\bar{u}_1)}{d\bar{z}} + x^2\frac{d(\bar{u}_2)}{d\bar{z}} + \text{ecc.};$$

poscia integrando rapporto a q fra i limiti

$$q = -\pi, \qquad q = \pi$$

i due membri della formola (62) moltiplicati per

$$\bar{z}dq = \frac{1}{\sqrt{-1}}d\bar{z},$$

ed osservando d'altronde che, presi fra questi limiti, gli integrali

$$\int \frac{d(\bar{u}_1)}{d\bar{z}}d\bar{z} = \bar{u}_1 + \text{cost.}; \quad \int \frac{d(\bar{u}_2)}{d\bar{z}}d\bar{z} = \bar{u}_2 + \text{cost.}; \text{ ecc.}$$

svaniscono; si troverà

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}\bar{z}dq = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\chi(0, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})}\bar{z}dq,$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(63) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}\bar{z}dq = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\chi(0, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})}\bar{z}dq.$$

Da quest'ultima formola combinata colla formola (56) risulta che, nell'ipotesi

ammessa, il numero delle radici che offrono moduli inferiori a Z sarà lo stesso per l'equazione (44) e per l'equazione (59); ciò che si trattava di dimostrare.

Quando una sola radice dell'equazione (59) presenta un modulo inferiore a Z, allora, supponendo soddisfatte le condizioni enunciate nel 3.° Teorema, si può affermare che l'equazione (44) offre similmente una sola radice il cui modulo sia inferiore a Z.

Giova osservare che la dimostrazione data sopra del 3.° Teorema riposa interamente sopra la formola (62); e siccome questa formola sussiste tutte le volte che per un modulo di x inferiore a X, il rapporto

$$(64) \qquad \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}$$

è sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x, è chiaro che si può al Teorema 3.° sostituire la proposizione seguente.

4.° *Teorema.* Sia m il numero delle radici dell'equazione (59) che offrono moduli più piccoli di Z. Supponiamo d'altronde 1.° che per moduli di x e di z rispettivamente inferiori a X e Z la funzione $f(x, b+z)$ ottenga sempre un valore unico e determinato; 2.° che per un modulo di x inferiore ad X il rapporto (64) sia sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x. Per un simile modulo di x, l'equazione (44) offre essa stessa un numero m di radici i cui moduli saranno più piccoli di Z.

Immaginiamo ora che si integri fra i limiti $q=-\pi$, $q=\pi$ la formola (62) dopo averne moltiplicati i due membri non più solamente per $\bar{z}\,dq$ ma pel prodotto

$$F(b+\bar{z})\bar{z}\,dq = \frac{1}{\sqrt{-1}} F(b+\bar{z})\,d\bar{z},$$

la funzione $F(y)=F(b+z)$ essendo scelta in modo che $F(b+z)$ resti finita e continua per un modulo di z eguale o inferiore a Z. Allora ponendo per brevità

$$(65) \qquad \frac{d\bar{u}_n}{d\bar{z}} = \bar{v}_n,$$

poscia avendo riguardo all'equazione (55) ed indicando per $\beta, \beta_1, \cdots \beta_{m-1}$ quelle delle radici dell'equazione

$$(66) \qquad f(0, y) = 0$$

che corrispondono a moduli di z più piccoli che Z, si troverà

$$(67) \qquad \begin{aligned} F(y) + F(y_1) + \cdots + F(y_{m-1}) &= F(\beta) + F(\beta_1) + \cdots + F(\beta_{m-1}) \\ &+ \frac{x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{v}_1 \bar{z} F(b+\bar{z})dq + \frac{x^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{v}_2 \bar{z} F(b+\bar{z})dq + \cdots. \end{aligned}$$

Di più siccome [essendo n un numero intero qualunque] l'integrazione per parti darà

$$\int F(b+\bar{z})\,d\bar{u}_n = \bar{u}_n F(b+\bar{z}) - \int \bar{u}_n F'(b+\bar{z})\,d\bar{z},$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$\int F(b+\bar{z})\frac{d\bar{u}_n}{d\bar{z}}\bar{z}\,dq = \frac{\bar{u}_n F(b+\bar{z})}{\sqrt{-1}} - \int \bar{u}_n F'(b+\bar{z})\bar{z}\,dq,$$

e per conseguenza

$$(68)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} F(b+\bar{z})\bar{v}_n \bar{z}\,dq = -\int_{-\pi}^{\pi} \bar{u}_n \bar{z} F'(b+\bar{z})\,dq;$$

si troverà anche

$$(69)\qquad \begin{aligned} F(y)+F(y_1)+\cdots+F(y_{m-1}) &= F(\beta)+F(\beta_1)+\cdots+F(\beta_{m-1}) \\ &-\frac{x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_1\bar{z}F'(b+\bar{z})dq - \frac{x^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_2\bar{z}F'(b+\bar{z})dq - \cdots. \end{aligned}$$

I valori degli integrali contenuti nelle equazioni (67), (69) possono essere facilmente determinati col mezzo della formola (48), dalla quale si deducono

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{v}_n\bar{z}F(b+\bar{z})\,dq = {}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\,F(b+z)((v_n)),$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_n\bar{z}F'(b+\bar{z})\,dq = {}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\,F'(b+z)((u_n)),$$

u_n e v_n indicando ciò che divengono $\bar{u}_n$ e $\bar{v}_n$ quando vi si metta z in luogo di $\bar{z}$, ovvero, ciò che torna lo stesso, i coefficienti di x^n negli sviluppi delle espressioni

$$(70)\qquad \text{l.}\,\frac{f(x,b+z)}{f(0,b+z)}\,; \qquad (71)\qquad \frac{\chi(x,b+z)}{f(x,b+z)}.$$

Ciò posto, le formole (67) e (69) daranno

$$(72)\qquad \begin{aligned} F(y)+F(y_1)+\cdots+F(y_{m-1}) &= F(\beta)+F(\beta_1)+\cdots+F(\beta_{m-1}) \\ &+x\,{}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\,F(b+z)((v_1)) + x^2\,{}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\,F(b+z)((v_2)) + \cdots, \end{aligned}$$

e

$$(73)\qquad \begin{aligned} F(y)+F(y_1)+\cdots+F(y_{m-1}) &= F(\beta)+F(\beta_1)+\cdots+F(\beta_{m-1}) \\ &-x\,{}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\,F'(b+z)((u_1)) - x^2\,{}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\,F'(b+z)((u_2)) - \cdots. \end{aligned}$$

Se nelle formole (69) e (73) si prenda $F(y)=1$, ci troveremo immediatamente ricondotti al Teorema 3.° Se si prenda al contrario $F(y)=y$, le stesse formole daranno

$$(74)\qquad y+y_1+\cdots+y_{m-1} = \beta+\beta_1+\cdots+\beta_{m-1} - \frac{x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_1\bar{z}dq - \frac{x^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_2\bar{z}dq - \text{ecc.}$$

$$(75)\qquad y+y_1+\cdots+y_{m-1} = \beta+\beta_1+\cdots+\beta_{m-1} - x\,{}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}((\bar{u}_1)) - x^2\,{}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}((\bar{u}_2)) - \text{ecc.}$$

Se ora si suppone che una sola radice dell' equazione (59) offra un modulo inferiore a Z, e che questa radice sia precisamente eguale a zero, si avrà $m=1$, $\beta=b$, e le formole (67), (69), (73), (74), (75) si ridurranno alle

$$(76)\qquad F(y)=F(b)+\frac{x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{v}_1\,\bar{z}\,F(b+\bar{z})dq+\frac{x^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{v}_2\,\bar{z}\,F(b+\bar{z})dq+\text{ecc.}$$

$$(77)\qquad F(y)=F(b)-\frac{x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_1\,\bar{z}\,F'(b+\bar{z})dq-\frac{x^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_2\,\bar{z}\,F'(b+\bar{z})dq-\text{ecc.}$$

$$(78)\qquad F(y)=F(b)-x\,{}_{(0)}^{(Z)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}F'(b+z)((u_1))-x^2\,{}_{(0)}^{(Z)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}F'(b+z)((u_2))-\text{ecc.}$$

$$(79)\qquad y=b-\frac{x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_1\,\bar{z}\,dq-\frac{x^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{u}_2\,\bar{z}\,dq-\text{ecc.}$$

$$(80)\qquad y=b-x\,{}_{(0)}^{(Z)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}((u_1))-x^2\,{}_{(0)}^{(Z)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}((u_2))-\text{ecc.}$$

Le formole (67), (69), (72), (73), (74), (75), (76), (77), (78), (79), (80) forniscono, sotto le condizioni qui sopra enunciate, lo sviluppo delle funzioni implicite di x rappresentate da y ed $F(y)$, ovvero da $y+y_1+y_2+\cdots+y_{m-1}$ e $F(y)+F(y_1)+\cdots+F(y_{m-1})$ in serie convergenti ordinate secondo le potenze ascendenti di x. Osserviamo d'altronde che, in virtù delle formole (76) e (67), il coefficiente di x^n nello sviluppo di $F(y)$, o di $F(y)+F(y_1)+\cdots+F(y_{m-1})$ offrirà un modulo inferiore al modulo massimo del prodotto

$$\bar{v}_n\,\bar{z}\,F(b+\bar{z})$$

che è esso stesso il coefficiente di x^n nello sviluppo della funzione

$$(81)\qquad \bar{z}\,\frac{\chi(x,\,b+\bar{z})}{f(x,\,b+\bar{z})}\,F(b+\bar{z}).$$

Si potrebbe nelle formole (46), (49), (54), (55) ed in quelle che ne abbiamo dedotte mettere $F(x,\,y)$ in luogo di $F(y)$, la funzione

$$F(x,\,y)=F(x,\,b+z)$$

essendo scelta in modo da rimanere finita e continua per moduli di x e di z rispettivamente inferiori ad X ed a Z. Allora in luogo delle formole (54) e (55) si otterrebbero le seguenti

$$(82)\qquad F(x,y)+F(x,y_1)+\cdots+F(x,y_{m-1})={}_{(0)}^{(Z)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left(\frac{\chi(x,b+z)}{f(x,b+z)}F(x,b+z)\right)\right),$$

$$(83)\qquad F(x,y)+F(x,y_1)+\cdots+F(x,y_{m-1})=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}\,\frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}F(x,b+\bar{z})dq,$$

di cui l'ultima combinata colla formola (6) darebbe

$$(84)\qquad \begin{aligned} &F(x, y) + F(x, y_1) + \cdots + F(x, y_{m-1}) \\ &= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x}\bar{z}}{\bar{x}-x}\,\frac{\chi(\bar{x}, b+\bar{z})}{f(\bar{x}, b+\bar{z})}\,F(\bar{x}, b+\bar{z})\,dp\,dq\,. \end{aligned}$$

Quando il numero m si riduce all'unità, l'equazione (84) diventa

$$(85)\qquad F(x, y) = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x}\bar{z}}{\bar{x}-x}\,\frac{\chi(\bar{x}, b+\bar{z})}{f(\bar{x}, b+\bar{z})}\,F(\bar{x}, b+\bar{z})\,dp\,dq\,.$$

Ora in virtù delle formole (84), (85) il termine generale della serie che rappresenterà lo sviluppo di $F(x, y)$ o della funzione

$$F(x, y) + F(x, y_1) + \cdots + F(x, y_{m-1})$$

secondo le potenze ascendenti di x, ed il resto di questa serie offriranno moduli rispettivamente inferiori a quelli del termine generale e del resto della progressione geometrica che ha per somma

$$(86)\qquad \frac{XZ}{X-x}\,\Lambda\,\frac{\chi(\bar{x}, b+\bar{z})}{f(\bar{x}, b+\bar{z})}\,F(\bar{x}, b+\bar{z})\,.$$

Allorchè nella formola (84) si fa successivamente $F(x, y)=1$, $F(x, y)=y$ se ne conchiude

$$(87)\qquad y + y_1 + \cdots + y_{m-1} = mb + \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x}\bar{z}^2}{x-x}\,\frac{\chi(\bar{x}, b+\bar{z})}{f(\bar{x}, b+\bar{z})}\,dp\,dq\,;$$

poscia, supponendo $m=1$,

$$(88)\qquad y = b + \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{x}\bar{z}^2}{\bar{x}-x}\,\frac{\chi(\bar{x}, b+\bar{z})}{f(\bar{x}, b+\bar{z})}\,dp\,dq\,.$$

Dunque il termine generale ed il resto della serie che rappresenterà lo sviluppo di y o di $y + y_1 + \cdots + y_{m-1}$ secondo le potenze ascendenti di x, offriranno moduli rispettivamente inferiori a quelli del termine generale e del resto della progressione geometrica che ha per somma

$$(89)\qquad \frac{XZ^2}{X-x}\,\Lambda\,\frac{\chi(\bar{x}, b+\bar{z})}{f(\bar{x}, b+\bar{z})}\,.$$

Se si indica per U_n il coefficiente di x^n nella serie che si ottiene sviluppando secondo le potenze ascendenti di x il secondo membro della equazione (83), si avrà evidentemente per $n>0$

$$(90)\qquad U_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}\,\frac{d^n\left\{\frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}\,F(x, b+\bar{z})\right\}}{dx^n}\,dq\,,$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(91)\qquad U_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\,{}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\frac{d^n\left\{\frac{\chi(x, b+z)}{f(x, b+z)}\,F(x, b+z)\right\}}{dx^n}\right)\right),$$

la variabile x dovendo essere ridotta a zero dopo le differenziazioni, ed il segno $\mathcal{E}$ riferendosi alla variabile z. Si troverà similmente per $n=0$

$$(92)\qquad U_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}\,\frac{\chi(0,\,b+\bar{z})}{f(0,\,b+\bar{z})}\,F(0,\,b+\bar{z})\,dq\,,$$

o, ciò che torna lo sesso,

$$(93)\qquad U_0={}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\frac{\chi(0,\,b+z)}{f(0,\,b+z)}\,F(0,\,b+z)\right)\right).$$

Siccome si ha d'altronde

$$\frac{\chi(x,b+z)}{f(x,b+z)}=\frac{\chi(0,\,b+z)}{f(0,\,b+z)}+\frac{d\,\mathrm{l}.\dfrac{f(x,b+z)}{f(0,\,b+z)}}{dz}\,,$$

si potrà ancora alle formole (90), (91) sostituire le seguenti

$$(94)\qquad \begin{aligned} U_n=&\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}\,\frac{\chi(0,\,b+\bar{z})}{f(0,\,b+\bar{z})}\,\frac{d^nF(x,\,b+\bar{z})}{dx^n}\,dq\\ &-\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}\,\frac{d^n\left(\mathrm{l}.\dfrac{f(x,b+\bar{z})}{f(0,\,b+\bar{z})}\cdot\dfrac{dF(x,b+\bar{z})}{d\bar{z}}\right)}{dx^n}\,dq\,,\end{aligned}$$

$$(95)\qquad \begin{aligned} U_n=&\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\,{}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\frac{\chi(0,\,b+z)}{f(0,\,b+z)}\cdot\frac{d^nF(x,b+z)}{dx^n}\right)\right)\\ &-\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\,{}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\frac{d^n\left(\mathrm{l}.\dfrac{f(x,b+z)}{f(0,\,b+z)}\cdot\dfrac{dF(x,b+z)}{dz}\right)}{dx^n}\right)\right).\end{aligned}$$

Allorchè una sola radice dell' equazione (59) offre un modulo inferiore a Z, e questa radice è precisamente zero, le formole (92), (91), (95) danno semplicemente

$$(96)\qquad U_0=F(0,\,b)\,,$$

$$(97)\qquad U_n=\frac{1}{(1\cdot 2\cdots n)^2}\,\frac{d^n\left\{z^{n+1}-\dfrac{d^n\left(\dfrac{\chi(x,b+z)}{f(x,b+z)}F(x,b+z)\right)}{dx^n}\right\}}{dz^n}\,,$$

$$(98)\qquad \begin{aligned} U_n=&\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\,\frac{d^nF(x,b)}{dx^n}\\ &-\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\,\frac{d^{n-1}\left\{z^n\,\dfrac{d^n\left(\mathrm{l}.\dfrac{f(x,b+z)}{f(0,\,b+z)}\cdot\dfrac{dF(x,b+z)}{dz}\right)}{dx^n}\right\}}{dz^{n-1}}\,,\end{aligned}$$

le variabili x e z dovendo essere ridotte a zero dopo effettuate le differenziazioni. Allora pure l'equazione (44) non ammette che una sola radice z di cui il modulo sia inferiore a Z; e la serie che ha per termine generale $U_n x^n$ è lo sviluppo della funzione

$$F(x, y) = F(x, b+z).$$

Quando le radici dell'equazione (59) che offrono moduli inferiori a Z sono tutte eguali fra loro e si riducono a zero, allora chiamando sempre u_n il coefficiente di x^n nello sviluppo dell'espressione (70) ed indicando per N il numero delle radici nulle dell'equazione

$$(99) \qquad \frac{1}{u_n} = 0,$$

si cava dalle formole (92), (91), (95),

$$(100) \qquad U_0 = m F(0, b),$$

$$(101) \qquad U_n = \frac{1}{1\cdot 2 \cdots N} \cdot \frac{1}{1\cdot 2 \cdots n} \frac{d^N \left\{ z^{N+1} \dfrac{d^n \left(\dfrac{\chi(x, b+z)}{f(x, b+z)} F(x, b+z) \right)}{dx^n} \right\}}{dz^N},$$

$$(102) \qquad U_n = \frac{m}{1\cdot 2 \cdots n} \frac{d^n F(x, b)}{dx^n} - \frac{1}{1\cdot 2 \cdots (N-1)} \frac{1}{1\cdot 2 \cdots n} \frac{d^{N-1} \left\{ z^N \dfrac{d^n \left(\mathrm{l}. \dfrac{f(x, b+z)}{f(0, b+z)} \cdot \dfrac{dF(x, b+z)}{dz} \right)}{dx^n} \right\}}{dz^{N-1}},$$

x e z dovendo essere ridotte a zero dopo le differenziazioni. Allora la serie che ha per termine generale $U_n x^n$ è lo sviluppo della funzione

$$F(x, y) + F(x, y_1) + \cdots + F(x, y_{m-1}),$$

le $y, y_1 \cdots y_{m-1}$ rappresentando quelle radici dell'equazione (42) che corrispondono a moduli di z più piccoli di Z.

Se nelle formole (96), (98) si pone $F(y)$ in luogo di $F(x, y)$, esse daranno semplicemente

$$(103) \qquad U_0 = F(b),$$

$$(104) \qquad U_n = -\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots (n-1)} \frac{d^{n-1}((z^n u_n F'(b+z))}{dz^{n-1}}$$

e si avrà per conseguenza

$$(105) \quad F(y) = F(b) - x(zu_1)F'(b) - \frac{x^2}{1} \frac{d(z^2 u_2 F'(b+z))}{dz} - \frac{x^3}{1\cdot 2} \frac{d^2(z^3 u_3 F'(b+z))}{dz^2} - \text{ecc.}$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(106)\qquad F(y)=F(b)-\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\,\frac{d^{n-1}(z^n u_n F'(b+z))}{dz^{n-1}},$$

purchè in tutti i termini del secondo membro si riduca z a zero dopo le differenziazioni. Si dedurrà sotto la stessa condizione dalle formole (99) e (101) la

$$(107)\quad F(y)+F(y_1)+\cdots+F(y_{m-1})=mF(b)-\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{1\cdot 2\cdots(N-1)}\,\frac{d^{N-1}(z^N u_n F'(b+z))}{dz^{N-1}}.$$

Se si riduce $F(y)$ ad y, le equazioni (106) e (107) diverranno

$$(108)\qquad y=b-\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\,\frac{d^{n-1}(z^n u_n)}{dz^{n-1}},$$

$$(109)\qquad y+y_1+y_2+\cdots+y_{m-1}=mb-\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{1\cdot 2\cdots(N-1)}\,\frac{d^{N-1}(z^N u_n)}{dz^{N-1}}.$$

Le equazioni (106), (107), (108), (109) coincidono colle formole (78), (73), (80) e (75).

Riassumendo ciò che precede, si ottiene la proposizione seguente.

5.° *Teorema.* Se le condizioni enunciate nel 4.° Teorema sono soddisfatte, la funzione implicita di x rappresentata per y e determinata dall'equazione (42), o la somma delle funzioni implicite rappresentate da $y, y_1 \cdots y_{m-1}$, potrà essere sviluppata col mezzo delle formole (79), (80), (74), (75), o ciò che torna lo stesso, colle formole (90), (91), (92), (93), in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x. Se di più la funzione $F(x, y)=F(x, b+z)$ resta sempre finita e continua per moduli di x e di z rispettivamente inferiori ad X ed a Z, questa funzione o la somma

$$F(x, y)+F(x, y_1)+\cdots+F(x, y_{m-1}),$$

potrà ancora essere sviluppata col mezzo delle formole (90), (91), (92), (93) in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x. Aggiungiamo che i moduli del termine generale e del resto saranno inferiori nella prima serie ai moduli del termine generale e del resto della progressione geometrica che ha per somma l'espressione (89), e nella seconda serie ai moduli del termine generale e del resto della progressione geometrica che ha per somma l'espressione (86).

Scolio. Si può assegnare ad X ed a Z un'infinità di sistemi di valori che adempiano le condizioni enunciate nei Teoremi 4.° e 5.°; ma fra questi sistemi havvene uno nel quale il valore di X è il più grande possibile. Questo più gran valore di X è evidentemente un limite, al di sotto del quale si può far variare arbitrariamente il modulo di x senza che le funzioni $y, F(x, y)$, ovvero $y+y_1+\cdots+y_{m-1}$, $F(x, y)+F(x, y_1)+\cdots+F(x, y_{m-1})$, cessino d'essere sviluppabili in serie convergenti ordinate secondo le potenze ascendenti di x.

Allorchè nella formola (102) i numeri N, n, diventano eguali fra loro, il valore di U_n si riduce a

$$U_n = \frac{m}{1 \cdot 2 \cdots n} \frac{d^n F(x, b)}{dx^n}$$

(110)

$$- \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} \cdot \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} \frac{d^{n-1}\left\{ z^n \frac{d^n \left(\mathrm{l}. \frac{f(x, z+b)}{f(0, z+b)} \cdot \frac{dF(x, z+b)}{dz} \right)}{dx^n} \right\}}{dz^{n-1}},$$

le variabili x e z devono sempre essere annullate dopo le differenziazioni. Il sig. Laplace, nelle Memorie dell' Accademia Reale delle Scienze per l' anno 1777, ha enunciato senza dimostrazione un teorema in virtù del quale il precedente valore di U_n sarebbe il coefficiente di x^n nello sviluppo di uno dei prodotti

$$mF(x, y), \quad mF(x, y_1), \cdots mF(x, y_{m-1}).$$

Ma questo teorema, come ha osservato il sig. Paoli, è evidentemente inesatto quando si suppone $m > 1$. Esso ritorna esatto, e s' accorda colla formola (98) nel caso in cui si ha $m = 1$. In quest' ultimo caso il sig. Paoli è giunto a dimostrare lo stesso teorema in molte maniere, ma supponendo tacitamente che la funzione implicita $F(x, y)$ sia sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x. Interessava ricercare in quali casi lo sviluppo può aver luogo, sotto quali condizioni la formola (98) sussista, e quali sono i limiti dell'errore commesso quando si arresta lo sviluppo dopo un certo numero di termini. Il 5.° Teorema e lo Scolio che lo siegue possono servire a risolvere queste differenti quistioni. Quanto al valore di U_n determinato dall'equazione (110), il sig. Paoli lo presenta come esprimente il coefficiente di x^n nella sviluppo della somma

$$F(x, y) + F(x, y_1) + \cdots + F(x, y_{m-1}),$$

il che cessa di esser vero quando si ha $N > n$. Allora alla formola (110) diventa necessario sostituire la formola (102). Di ciò è facile assicurarsi applicando le formole (102) e (110) allo sviluppo della funzione

$$(111) \qquad F(x, y) + F(x, y_1) + F(x, y_2),$$

essendo y, y_1, y_2 le radici d' una equazione di terzo grado. Di fatto la formola (110) ha condotto il sig. Paoli ad un risultato esatto allorchè l' equazione del terzo grado era

$$(112) \qquad (y-b)^3 - x^3(ay+c)^3 = 0,$$

indicando a, b, c quantità costanti. Ma la stessa formola non sarebbe più applicabile se all'equazione (112) si sostituisse la seguente

$$(113) \qquad (y-b)^3 - x(ay+c)^3 = 0.$$

Si potrebbero ancora generalizzare i risultati ai quali noi siamo pervenuti. Di fatto se si indica per x_0 un modulo della variabile x inferiore ad X e per

$$\underline{x} = x_0 e^{p\sqrt{-1}},$$

ciò che diventa $\overline{x}$ quando si sostituisce alla X la x_0, si caverà dalla formola (41)

$$(114) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} \left(\varphi(\overline{x}) - \varphi(\underline{x})\right) dp = 2\pi \, {}^{(X)}_{(x_0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\frac{\varphi(x)}{x}\right)\right).$$

Ora se si sostituisca la formola (114) alla formola (41), si otterrà in luogo del 5.° Teorema la proposizione seguente.

6.° *Teorema.* Sia m il numero delle radici dell' equazione (59) che offrono moduli compresi fra i limiti z_0 e Z essendo $z_0 < Z$. Siano di più $\overline{z}$, $\underline{z}$ due espressioni immaginarie della forma

$$\overline{z} = Z e^{q\sqrt{-1}}, \quad \underline{z} = z_0 e^{q\sqrt{-1}},$$

e supponiamo 1.° che per moduli di x inferiori ad X e per moduli di z inferiori a Z la funzione $f(x, b+z)$ ottenga sempre un valore unico e determinato; 2.° che per ciascun modulo di x inferiore ad X i due rapporti

$$\frac{\chi(x, b+\overline{z})}{f(x, b+\overline{z})}, \quad \frac{\chi(x, b+\underline{z})}{f(x, b+\underline{z})}$$

siano sviluppabili in serie convergenti ordinate secondo le potenze ascendenti di x. Per un simile modulo di x l'equazione (44) offrirà essa stessa un numero m di radici i cui moduli saranno compresi fra i limiti z_0, Z; e se si indicano per $y, y_1 --- y_{m-1}$ i valori di y corrispondenti a queste stesse radici, la funzione y o la somma

$$y + y_1 + --- + y_{m-1}$$

sarà sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x. Se d' altronde la funzione

$$F(x, y) = F(x, b+z)$$

resta sempre finita e continua per moduli di x inferiori ad X e per moduli di z rinchiusi fra i limiti z_0, Z: questa funzione $F(x, y)$ o la somma

$$F(x, y) + F(x, y_1) + --- + F(x, y_{m-1})$$

sarà ancora sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x, finchè il modulo di x rimarrà inferiore ad X. Aggiungiamo che per applicare le formole (67), (69), (72), (73), (74), (75), (76), (77), (78), (79), (80), ecc. ovvero (90), (91), (92), (93) allo sviluppo delle funzioni e delle somme di cui si tratta, basterà mettere in queste formole, in luogo delle funzioni di $\overline{z}$ poste sotto il segno $\int$, le differenze fra queste stesse funzioni e le funzioni simili di $\underline{z}$; o surrogare al simbolo ${}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}$ il simbolo ${}^{(Z)}_{(z_0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}$.

Per mostrare un'applicazione dei principj qui sopra stabiliti supponiamo

$$(115) \qquad f(x, y) = \Pi(y) - x\varpi(y).$$

Le condizioni enunciate nel Teorema 5.° si troveranno adempite se le tre funzioni

$$\Pi(b+z), \quad \varpi(b+z), \quad F(x, b+z)$$

rimanendo finite e continue per moduli di x e di z rispettivamente inferiori ad X e Z, il rapporto

$$(116) \qquad \frac{1}{\Pi(b+\bar{z}) - x\varpi(b+\bar{z})}$$

è sviluppabile per ogni modulo di x inferiore ad X in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x. Quest'ultima condizione si troverà essa stessa verificata se si ha

$$(117) \qquad X\Lambda\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})} = \text{ovvero} < 1.$$

D'altra parte se il modulo Z di $\bar{z}$ è scelto in modo che la quantità

$$(118) \qquad \Lambda\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}$$

acquisti il più piccolo valore possibile, questa quantità diverrà ciò che noi abbiamo chiamato il modulo principale della funzione

$$(119) \qquad \frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)},$$

ed indicando per M questo modulo principale, la condizione (117) si ridurrà a

$$(120) \qquad X = \text{ovvero} < \frac{1}{M}.$$

Di più l'equazione (59) diverrà

$$(121) \qquad \Pi(b+z) = 0,$$

e si troverà

$$\text{l.}\frac{f(x, b+z)}{f(0, b+z)} = \text{l.}\left\{1 - x\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right\} = -\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{n}\left(\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right)^n,$$

per conseguenza

$$(122) \qquad u_n = -\frac{1}{n}\left(\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right)^n,$$

e

$$(123) \qquad v_n = \frac{1}{\Pi(b+z)}\left\{\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\Pi'(b+z) - \varpi'(b+z)\right\}\left(\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right)^{n-1}.$$

Finalmente l'espressione (86) diverrà

$$(124) \qquad \frac{XZ}{X-x}\Lambda\frac{\Pi'(b+\bar{z}) - \bar{x}\varpi'(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z}) - \bar{x}\varpi(b+\bar{z})}F(\bar{x}, b+\bar{z}),$$

ed il resto della progressione geometrica prodotta dallo sviluppo di questa espressione in una serie ordinata secondo le potenze di x, sarà

$$\frac{x^n Z}{X^{n-1}(X-x)} \Lambda \frac{\Pi'(b+\bar{z})-\bar{x}\varpi'(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})-\bar{x}\varpi(b+\bar{z})} F(\bar{x}, b+\bar{z}).$$

Dunque se si chiama ξ il modulo di x, il resto della serie che rappresenterà lo sviluppo della funzione $F(x, y)$ o della somma

$$F(x, y)+F(x, y_1)+\cdots+F(x, y_{m-1})$$

offrirà un modulo inferiore al prodotto

$$(125) \qquad \frac{\xi^n Z}{X^{n-1}(X-\xi)} \Lambda \frac{\Pi'(b+\bar{z})-\bar{x}\varpi'(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})-\bar{x}\varpi(b+\bar{z})} F(\bar{x}, b+\bar{z}),$$

e a più forte ragione al prodotto

$$(126) \qquad \frac{\xi^n Z}{X^{n-1}(X-\xi)} \frac{\Lambda\Pi'(b+\bar{z})+X\Lambda\varpi'(b+\bar{z})}{1-X\Lambda\dfrac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}} \Lambda \frac{F(\bar{x}, b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}.$$

Se si prende per Z quello dei moduli di z che corrisponde al modulo principale della funzione (119), l'espressione (126) diverrà

$$(127) \qquad \frac{\xi^n Z}{X^{n-1}(X-\xi)} \frac{\Lambda\Pi'(b+\bar{z})+X\Lambda\varpi'(b+\bar{z})}{1-MX} \Lambda \frac{F(\bar{x}, b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}.$$

Ciò posto, si dedurrà immediatamente dal Teorema 5.° la proposizione seguente.

7.° *Teorema.* Sia M il modulo principale della funzione

$$\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)},$$

Z il modulo corrispondente di z o un modulo più piccolo, ed X un numero eguale o inferiore ad $\frac{1}{M}$. Supponiamo d'altronde che le funzioni

$$\varpi(b+z), \quad \Pi(b+z)$$

restino finite e continue per moduli di z inferiori a Z. Finalmente sia m il numero delle radici dell'equazione

$$\Pi(b+z)=0$$

che offrono moduli inferiori a Z. Per un modulo di x più piccolo che $\frac{1}{M}$ l'equazione

$$\Pi(b+z)-x\varpi(b+z)=0$$

offrirà essa stessa un numero m di radici i cui moduli saranno inferiori a Z; e se indicando per $y, y_1, y_2 \cdots y_{m-1}$ i valori di $y=b+z$ corrispondenti a queste radici, si pone

$$f(x, y)=\Pi(y)-x\varpi(y),$$

la funzione y o la somma

$$y + y_1 + \cdots + y_{m-1}$$

sarà sviluppabile in una serie ordinata secondo le potenze ascendenti di x. Di più se la funzione

$$F(x, y) = F(x, b+z)$$

resta essa stessa finita e continua per moduli di x e di z rispettivamente inferiori ad X e Z, la $F(x, y)$ o la somma

$$F(x, y) + F(x, y_1) + \cdots + F(x, y_{m-1})$$

sarà ancora sviluppabile per le formole (92) e (94), o (93) e (95) in una serie ordinata secondo le potenze ascendenti di x, ed il resto di questa serie offrirà un modulo inferiore a ciascuna delle espressioni (125), (126), (127).

Se si pone $F(y)$ in luogo di $F(x, y)$, le formole (72), (73) combinate colle formole (65) e (122) daranno

$$(128)\quad \begin{aligned} F(y) + F(y_1) + \cdots + F(y_{m-1}) &= F(\beta) + F(\beta_1) + \cdots + F(\beta_{m-1}) \\ &+ \Sigma_{n=1}^{n=\infty} x^n \, {}_{(0)}^{(Z)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)} \left(\left(\frac{F(b+z)}{\Pi(b+z)} \left(\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)} \Pi'(b+z) - \varpi'(b+z) \right) \left(\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)} \right)^{n-1} \right) \right) \end{aligned}$$

e

$$(129)\quad \begin{aligned} F(y) + F(y_1) + \cdots + F(y_{m-1}) &= F(\beta) + F(\beta_1) + \cdots + F(\beta_{m-1}) \\ &+ \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{n} \, {}_{(0)}^{(Z)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)} \left(\left(\left(\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)} \right)^n F'(b+z) \right) \right). \end{aligned}$$

Immaginiamo ora che si ponga $x=1$ e che nel Teorema 6.° si metta per $f(x,y)$ la

$$f(y) = \Pi(y) - \varpi(y),$$

allora si otterrà la proposizione seguente.

8.° *Teorema.* Sia

$$(130)\qquad f(y) = 0$$

un'equazione algebrica o trascendente, b un valor particolare di y, Z un valore particolare del modulo della variabile

$$z = y - b,$$

e $\bar{z}$ il valore immaginario di z che corrisponde al modulo Z. Supponiamo inoltre che si divida la funzione $f(y)$ in due parti

$$\Pi(y), \quad -\varpi(y),$$

e sia m il numero delle radici dell'equazione

$$(131)\qquad \Pi(y) = 0$$

che producono moduli di z inferiori a Z. Se il numero Z è scelto in modo che le funzioni

$$\Pi(b+z), \quad \varpi(b+z)$$

restando finite e continue per moduli di z inferiori a Z, si abbia

$$(132) \qquad \Lambda \frac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})} < 1 ;$$

l'equazione (130) offrirà essa stessa un numero m di radici corrispondenti a moduli di z più piccoli che Z. Indichiamo per $y, y_1 \cdots y_{m-1}$ queste radici e per $\beta, \beta_1 \cdots \beta_{m-1}$ le radici analoghe dell'equazione (131). La funzione implicita y, se si ha $m=1$, o la somma $y+y_1+\cdots+y_{m-1}$ nel caso contrario, sarà sviluppabile in una serie convergente colla formola

$$(133) \qquad \begin{aligned} y+y_1+\cdots+y_{m-1} &= \beta+\beta_1+\cdots+\beta_{m-1} \\ &+ {}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right)\right) + \frac{1}{2}\,{}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\left(\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right)^2\right)\right) + \text{ecc.} \end{aligned}$$

che si deduce immediatamente dalle formole (75) e (122) o dall'equazione (129). Se di più la funzione

$$F(y) = F(b+z)$$

resta essa stessa finita e continua per moduli di z inferiori a Z, $F(y)$ o la somma $F(y)+F(y_1)+\cdots+F(y_{m-1})$ potrà ancora essere sviluppata in serie convergente colla formola

$$(134) \qquad \begin{aligned} F(y)+F(y_1)+\cdots+F(y_{m-1}) &= F(\beta)+F(\beta_1)+\cdots+F(\beta_{m-1}) \\ &+ {}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}F'(b+z)\right)\right) + \frac{1}{2}\,{}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(\left(\frac{\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right)^2 F'(b+z)\right)\right) + \text{ecc.} \end{aligned}$$

Finalmente il resto di quest'ultima serie offrirà un modulo inferiore a

$$(135) \qquad \frac{Z}{X^{n-1}(X-1)}\,\Lambda\,\frac{\Pi'(b+\bar{z})-\bar{x}\,\varpi'(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})-\bar{x}\,\varpi'(b+\bar{z})}\,F(b+\bar{z})$$

ed a più forte ragione a

$$(136) \qquad \frac{Z}{X^{n-1}(X-1)}\,\frac{\Lambda\Pi'(b+\bar{z})+X\Lambda\varpi'(b+\bar{z})}{1-X\Lambda\dfrac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}}\,\Lambda\,\frac{F(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})},$$

il modulo X di $\bar{x}$ essendo scelto in modo da adempiere le due condizioni

$$(137) \qquad X-1>0, \qquad 1-X\Lambda\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}>0,$$

e questo modulo essendo per conseguenza più grande dell'unità ma più piccolo di

$$\Lambda'\,\frac{\Pi(b+\bar{z})}{\varpi(b+\bar{z})}.$$

Allorchè una sola radice dell'equazione (131) corrisponde ad un modulo di z più piccolo di Z e che questa radice è precisamente b si ha

$$m=1, \qquad \beta=b$$

e le formole (133), (134) si riducono a

$$(138)\qquad y=b+\frac{1}{1}\,\frac{z\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}+\frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d\left(\frac{z\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right)^2}{dz}+\text{ecc.},$$

$$(139)\qquad F(y)=F(b)+\frac{1}{1}\,\frac{z\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}F'(b+z)+\frac{1}{1\cdot 2}\,\frac{d\left\{\left(\frac{z\varpi(b+z)}{\Pi(b+z)}\right)^2F'(b+z)\right\}}{dz}+\text{ecc.}$$

la variabile z dovendo essere in tutti i termini del secondo membro annullata dopo le differenziazioni.

Se si pone nella formola (115)

$$(140)\qquad \Pi(y)=y-b$$

$y=b$ sarà la sola radice dell' equazione (131). Allora le formole (128), (129) diverranno

$$(141)\qquad \begin{aligned} F(y)=F(b)&+\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{1\cdot 2\cdots n}\,\frac{d^n\{(\varpi(b))^nF(b)\}}{db^n}\\ &-\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\,\frac{d^{n-1}\{(\varpi(b))^{n-1}\varpi'(b)F(b)\}}{db^{n-1}},\end{aligned}$$

e

$$(142)\qquad F(y)=F(b)+\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\,\frac{d^{n-1}\{(\varpi(b))^nF'(b)\}}{db^{n-1}},$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(143)\qquad F(y)=F(b)+\frac{x}{1}\varpi(b)F'(b)+\frac{x^2}{1\cdot 2}\,\frac{d\{(\varpi(b))^2F'(b)\}}{db}+\text{ecc.}$$

Indi se ne conchiuderà, ponendo $F(y)=y$,

$$(144)\qquad y=b+\frac{x}{1}\varpi(b)+\frac{x^2}{1\cdot 2}\,\frac{d\{\varpi(b)\}^2}{db}+\frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\,\frac{d^2\{\varpi(b)\}^3}{db^2}+\text{ecc.}$$

Di più si avrà in virtù delle formole (96) e (97)

$$(145)\qquad F(x,y)=F(0,b)+\Sigma_{n=1}^{n=\infty}U_nx^n,$$

il valore di U_n essendo

$$(146)\qquad U_n=\frac{1}{(1\cdot 2\cdot 3\cdots n)^2}\,\frac{d^n\left\{z^{n+1}\,\frac{d^n\left\{\frac{1-x\varpi'(b+z)}{z-x\varpi(b+z)}F(x,b+z)\right\}}{dx^n}\right\}}{dz^n},$$

e le variabili x, z dovendo essere annullate dopo effettuate le differenziazioni. Si può rimarcare d' altronde che per ottenere la formola (144) basta sviluppare secondo le potenze ascendenti di x il secondo membro dell' equazione (82)

che nel caso presente si riduce a

$$(147)\qquad F(x,y)={}_{(0)}^{(Z)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left(\frac{1-x\varpi'(b+z)}{z-x\varpi(b+z)}F(x,b+z)\right)\right).$$

Si potrebbe giungervi ancora col mezzo della formola (83) in cui

$$(148)\qquad F(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}\,\frac{1-x\varpi'(b+\bar{z})}{\bar{z}-x\varpi(b+\bar{z})}F(x,b+\bar{z})\,dq.$$

Le formole (144) e (143) sono precisamente quelle che Lagrange ha date come idonee a sviluppare secondo le potenze ascendenti di x una radice y dell' equazione

$$(149)\qquad y-b-x\varpi(y)=0,$$

ed una funzione $F(y)$ di questa radice. Ora dietro il 7.° Teorema queste formole sussisteranno se le funzioni $\varpi(b+z)$, $F(b+z)$ restano finite e continue per moduli di z inferiori a Z, essendo Z quello dei moduli di z che corrisponde al modulo principale M della funzione

$$(150)\qquad \frac{\varpi(b+z)}{z},$$

e se d' altronde si attribuisce alla variabile reale od immaginaria x un valore di cui il modulo sia inferiore a $\frac{1}{M}$. Esse sussisteranno a *fortiori* se il modulo Z di $\bar{z}$ essendo distinto da quello che corrisponde al modulo principale della funzione (150), si sceglie il modulo ξ di x in modo da verificare la condizione

$$(151)\qquad \xi\,\Lambda\,\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\bar{z}}<1.$$

Quanto alla funzione $F(x,y)=F(x,b+z)$ che racchiude l'equazione (145), essa dovrà rimanere ancora finita e continua per moduli di x e di z rispettivamente inferiori a ξ ed a Z. Aggiungiamo che col mezzo delle formole (125), (126), (127) si determineranno senza fatica dei limiti superiori ai moduli dei resti delle serie (143), (144) od anche della serie prodotta dallo sviluppo di $F(x,y)$ secondo le potenze ascendenti di x. Effettivamente in virtù delle formole (125), (126) l' ultimo di questi resti offrirà un modulo inferiore a ciascuno dei numeri

$$(152)\qquad \frac{\xi^n Z}{X^{n-1}(X-\xi)}\,\Lambda\,\frac{1-\bar{x}\varpi'(b+\bar{z})}{\bar{z}-\bar{x}\varpi(b+\bar{z})}F(\bar{x},b+\bar{z}),$$

$$(153)\qquad \frac{\xi^n Z}{X^{n-1}(X-\xi)}\,\frac{1+X\Lambda\varpi'(b+\bar{z})}{Z-X\Lambda\varpi(b+\bar{z})}\,\Lambda F(\bar{x},b+\bar{z});$$

il modulo X di $\bar{x}$ essendo superiore al modulo ξ di x ma inferiore al quoziente che si ottiene dividendo l' unità pel rapporto

$$(154)\qquad \Lambda\,\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\bar{z}}=\frac{\Lambda\varpi(b+\bar{z})}{Z}.$$

Immaginiamo, per fissare le idee, che la costante b essendo reale si prenda

$$\varpi(y)=\sin.y.$$

Se si chiama B un arco rinchiuso fra i limiti *zero*, $\frac{\pi}{2}$ e scelto in modo che $\cos.B$ sia eguale, fatta astrazione dal segno, a $\cos.b$, si avrà in virtù della formola (24)

$$(155)\qquad \Lambda\sin.(b+\bar{z})= \text{ovvero} < \frac{e^Z-e^{-Z}}{2}\cos.B+\frac{e^Z+e^{-Z}}{2}\sin.B.$$

Vi è di più: il quadrato del modulo di $\sin.(b+\bar{z})$ essendo il quarto del trinomio

$$e^{2Z\sin.q}+e^{-2Z\sin.q}-2\cos.(2b+2Z\cos.q),$$

e per conseguenza il quarto della somma che si ottiene aggiungendo il trinomio

$$e^{2Z\sin.q}+e^{-2Z\sin.q}-2\cos.(2Z\cos.q),$$

di cui il massimo è $4(\Lambda\sin.\bar{z})^2=(e^Z-e^{-Z})^2$, al prodotto

$$2\{\cos.(2Z\cos.q)-\cos.(2b+2Z\cos.q)\}=4\sin.b\sin.(b+2Z\cos.q),$$

di cui il massimo è $4\sin.B$, si troverà ancora

$$(156)\qquad \Lambda\sin.(b+\bar{z})= \text{ovvero} < \left\{\left(\frac{e^Z-e^{-Z}}{2}\right)^2+\sin.B\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Dunque la condizione (151) sarà verificata se si ha

$$(157)\qquad \xi<\frac{Z}{\left\{\left(\frac{e^Z-e^{-Z}}{2}\right)^2+\sin.B\right\}^{\frac{1}{2}}},$$

ed a più forte ragione se si ha

$$(158)\qquad \xi<\frac{2Z}{e^Z+e^{-Z}}$$

poichè $\sin.B$ non può sorpassare l'unità. D'altronde il valor minimo del rapporto

$$(159)\qquad \frac{2Z}{e^Z+e^{-Z}}$$

corrisponde al valore di Z determinato dalla formola

$$(160)\qquad \frac{e^Z-e^{-Z}}{1}=\frac{e^Z+e^{-Z}}{Z}=\frac{2}{\sqrt{Z^2-1}}$$

e siccome si ha

$$\frac{e^Z+e^{-Z}}{2}-Z\frac{e^Z-e^{-Z}}{2}=1-\frac{Z^2}{2}-\frac{1}{1\cdot 2}\frac{Z^4}{4}-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cdot\frac{Z^6}{6}-\cdots$$

la formola (160) potrà essere ridotta a

$$(161)\qquad 1=\frac{1}{2}Z^2+\frac{1}{8}Z^4+\cdots.$$

Ora l'equazione (161), di cui il secondo membro cresce con Z^2 e si riduce per $Z=1$ a

$$1-\frac{1}{e}=1-\frac{1}{2,71828---},$$

ammette evidentemente una sola radice positiva superiore all'unità ma inferiore alla radice positiva dell'equazione

$$1=\frac{1}{2}Z^2+\frac{1}{8}Z^4$$

cioè a dire a

$$\sqrt{-2+\sqrt{12}}=1,2100---.$$

Dunque se si pone nella formola (160)

$$(162)\qquad Z=1,2+i,$$

i sorpasserà $-0,2$ e sarà inferiore a $0,01$. Ma allora questa formola darà

$$\frac{2,2+i}{0,2+i}e^{-2,4}=e^{2i}=1+2ie^{2\theta i}$$

indicando θ un numero inferiore all'unità, e per conseguenza

$$(163)\qquad i=-\frac{0,2-2,2e^{-2,4}}{1-e^{-2,4}+(0,4+2i)e^{2\theta i}}=-\frac{0,0004205---}{0,90928---+(0,4+2i)e^{2\theta i}}.$$

Dunque i sarà negativo e rinchiuso fra i limiti

$$-\frac{0,0004205---}{0,90928---}=-0,000462 4---$$

$$-\frac{0,0004205---}{0,90928---+0,4}=-\frac{0,0004205---}{1,30928---}=-0,0003211---,$$

od anche fra il limite $-0,0003211---$ ed il seguente

$$-\frac{0,0004205---}{0,90928---+(0,4-0,0009248---)e^{-0,0009248\cdots}}=-\frac{0,0004205---}{1,30798---}=-0,0003214---.$$

Si avrà dunque spingendo l'approssimazione sino ai milionesimi inclusivamente

$$i=-0,000321---,\qquad Z=1,2+i=1,199678---,\qquad Z^2=1,439227---,$$

$$\frac{2Z}{e^Z+e^{-Z}}=\sqrt{Z^2-1}=0,662742---;$$

e per conseguenza se si prende

$$(164)\qquad Z=1,199678---,$$

la condizione (158) si troverà ridotta a

$$(165)\qquad \xi<0,662742---.$$

Dunque fino a tanto che il modulo di x non sarpasserà il numero 0,662742--- una sola radice dell'equazione

$$(166) \qquad y = b + x \sin. y$$

produrrà un valore di $y - b$ di cui il modulo resterà inferiore a 1,199678--- e questa radice sarà sviluppabile colla formola di Lagrange in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x.

Consideriamo ora una funzione di x e di y, cioè

$$F(x, y) = F(x, b + z).$$

Questa funzione sarà ancora sviluppabile colle formole (145), (146) secondo le potenze ascendenti di x se essa resta finita e continua per dei moduli di x e di z rispettivamente inferiori ai numeri

$$0,662742 \text{---} \quad \text{e} \quad 1,199678 \text{---}.$$

Vi è di più: lo sviluppo di cui si tratta potrà essere effettuato col mezzo delle formole (147) e (148) se la funzione esplicita

$$(167) \qquad \frac{1 - x\varpi'(b+z)}{z - x\varpi(b+z)} F(x, b+z) = \frac{1 - x\cos.(b+z)}{z - x\sin.(b+z)} F(x, b+z)$$

è essa stessa sviluppabile per tali moduli delle variabili x e z in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di queste variabili. Ciò appunto avrà luogo per esempio se si prende

$$F(x, y) = \frac{1}{1 - x\cos. y};$$

allora la formola (147) darà

$$\frac{1}{1 - x\cos. y} = {}^{(Z)}_{(0)}\mathcal{E}^{(x)}_{(-x)}\left(\left(\frac{1}{z - x\sin.(b+z)}\right)\right)$$

$$= \mathcal{E}\left(\left(\frac{1}{Z}\right)\right) + x\mathcal{E}\left(\left(\frac{\sin.(b+z)}{z^2}\right)\right) + x^2\mathcal{E}\left(\left(\frac{\sin.^2(b+z)}{z^3}\right)\right) + \text{ecc.}$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(168) \qquad \frac{1}{1 - x\cos. y} = 1 + \frac{x}{1}\frac{d\sin.b}{db} + \frac{x^2}{1\cdot 2}\frac{d^2\sin.^2 b}{db^2} + \frac{x^3}{1\cdot 2\cdot 3}\frac{d^3\cdot\sin.^3 b}{db^3} + \text{ecc.}$$

Se di quest'ultima serie si conservano soltanto gli n primi termini, l'errore commesso o il modulo del resto sarà in virtù della formola (152) inferiore al prodotto

$$\frac{\xi^n Z}{X^{n-1}(X - \xi)} \; \frac{1}{Z - X\Lambda\sin.(b + \bar{z})}$$

ed a più forte ragione al prodotto

$$(169) \qquad \frac{\xi^n}{X^{n-1}(X - \xi)} \; \frac{1}{1 - MX},$$

designando M il modulo principale di $\frac{\sin. z}{z}$ determinato dall'equazione

$$(170) \qquad M = \frac{e^Z + e^{-Z}}{2Z} = \frac{1}{0,662742 - - -} = 1,50888 - - -.$$

Se nell'espressione (169) si sostituisse X ad $X - \xi$, si otterrebbe la seguente

$$(171) \qquad \frac{\xi}{X^n(1 - MX)}$$

che rappresenta un limite superiore al modulo del termine generale della serie contenuta nell' equazione (168). Nell'una e nell'altra espressione il numero X deve essere inferiore a $\frac{1}{M}$ ma superiore al modulo ξ della variabile x. Se si scelga X in modo da rendere l'espressione (171) un minimo, si troverà

$$\frac{X}{n} = \frac{1 - MX}{M} = \frac{1}{(n+1)M}$$

ed il prodotto (169) diverrà

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \frac{(n+1)M^n \xi^n}{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)M\xi}.$$

Siccome si avrà d' altronde

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e$$

egli è chiaro che il modulo del resto che completa lo sviluppo di

$$\frac{1}{1 - x \cos. y}$$

sarà inferiore a

$$(172) \qquad \frac{(n+1)e}{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)M\xi}(M\xi)^n.$$

Se si attribuisce ad x un valor reale e positivo il limite del modulo in questione sarà semplicemente

$$(173) \qquad \frac{(n+1)e}{1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)Mx}(Mx)^n.$$

Così, per esempio, se si suppone $x = \frac{1}{4}$ esso diverrà

$$(174) \qquad \frac{(4,3647 - - -)(n+1)}{1 - \frac{0,6057 - - -}{n}}(0,37722 - - -)^n.$$

Le funzioni implicite che noi abbiamo finora sviluppate in serie dipendevano da una sola variabile x. Ma si potrebbe estendere l'applicazione degli stessi principii a funzioni implicite di più variabili x, x', x'' - - -. Immaginiamo per

fissare le idee che y, y', y''--- siano determinate in funzione di x, x', x''--- per equazioni della forma

$$(175) \qquad f(x, y)=0 \quad f_1(x', y')=0 \text{ --- ecc.}$$

Indichiamo con $\chi(x, y)$ la derivata di $f(x, y)$ relativa ad y, con $\chi_1(x', y')$ la derivata di $f_1(x', y')$ relativa ad y', ecc.--- e per

$$F(x, x', ---y, y' ---)$$

una funzione di $x, x', ---y, y'$---. Finalmente supponiamo 1.° che b, b'--- essendo tante costanti, le equazioni

$$(176) \qquad f(0, b+z)=0 \quad f_1(0, b'+z')=0 \text{ ecc.---}$$

offrano la prima m radici di cui i moduli siano inferiori a Z, la seconda m' radici di cui i moduli siano inferiori a Z',---; 2.° che per dei moduli di x, x', ---z, z'--- rispettivamente inferiori a X, X',---Z, Z'--- ciascuna delle funzioni $f(x, b+z)$, $f_1(x, b+z)$--- ottenga sempre un valore finito e determinato; 3.° che Z essendo il modulo di $\bar{z}$, Z' il modulo di $\bar{z}'$---, i rapporti

$$(177) \qquad \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}, \quad \frac{\chi_1(x', b'+\bar{z}')}{f_1(x', b'+\bar{z}')}; \text{ --- ecc.}$$

ed il prodotto

$$(178) \qquad \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} \cdot \frac{\chi_1(x', b'+\bar{z}')}{f_1(x', b'+\bar{z}')} --- F(x, x' --- b+\bar{z}, b'+\bar{z}' ---)$$

siano sviluppabili in serie convergenti ordinate secondo le potenze ascendenti di x, di x'--- per moduli di x, x'--- rispettivamente inferiori ad X, X'---. Per simili moduli di x, x'--- le equazioni

$$(179) \qquad f(x, b+z)=0 \quad f_1(x', b'+z')=0, \text{ ecc.---}$$

in virtù del Teorema 4.° offriranno la prima un numero m di radici di cui i moduli saranno inferiori a Z, la seconda un numero m' di radici di cui i moduli saranno inferiori a Z'---, e se si indica con

$$(180) \qquad SF(x, x' --- y, y' ---)$$

la somma dei valori che riceve la funzione $F(x, x' --- y, y' ---)$ allorchè vi si sostituiscono successivamente in luogo di y, y'--- le radici di cui si tratta, questa somma sarà sviluppabile in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x, x'---. E questo effettivamente si dimostrerà senza fatica nel modo seguente.

Esaminiamo prima il caso particolare in cui si avesse $m=1$, $m'=1$--- ecc. Allora si dedurrà dalla formola (83) sostituendo ad m l'unità, e $F(x, x' --- y, y' ---)$ a $F(x, y)$

$$(181) \qquad F(x, x' --- y, y' ---) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{z} \frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} F(x, x' --- b+\bar{z}, y' ---) dq.$$

Si avrà parimente

$$(182)\quad F(x,x'---b+\bar{z},y',---)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\bar{z}'\frac{\chi_1(x',b+\bar{z}')}{f_1(x',b+\bar{z}')}F(x,x'---b+\bar{z},b'+\bar{z}',---)dq'$$

ecc. - - - - -

ed in seguito si troverà

$$(183)\qquad F(x,x',---y,y'---)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}---\bar{z}\bar{z}'---\frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}\cdot\frac{\chi_1(x',b'+\bar{z}')}{f_1(x',b'+\bar{z}')}---F(x,x'---b+\bar{z},b'+\bar{z}',---)\frac{dq}{2\pi}\cdot\frac{dq'}{2\pi}---.$$

Se m, m' - - - cessano di ridursi all'unità, converrà evidentemente porre in luogo del primo membro della formola (181) la somma dei valori che riceve la funzione $F(x, x'---y, y'---)$ quando vi si sostituiscono successivamente in luogo di y quelle radici dell'equazione $f(x, b+z)=0$ che offrono moduli inferiori a Z; poscia in luogo del primo membro della formola (182) la somma dei valori che riceve la funzione $F(x, x'---b+\bar{z}, y'---)$ quando vi si sostituiscono successivamente in luogo di y' quelle radici dell' equazione $f(x', b'+z')=0$ che offrono moduli inferiori a Z'; ecc. - - -. Dunque al primo membro della formola (183) dovrà surrogarsi l'espressione (180) in modo che si avrà

$$(184)\qquad SF(x,x'---y,y'---)$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}---\bar{z}\bar{z}'---\frac{\chi(x,b+\bar{z})}{f(x,b+\bar{z})}\cdot\frac{\chi_1(x',b'+\bar{z}')}{f_1(x',b'+\bar{z}')}---F(x,x'---b+\bar{z},b'+\bar{z}'---)\frac{dq}{2\pi}\cdot\frac{dq'}{2\pi}---.$$

Ora in virtù della formola (183) o (184) l'espressione

$$F(x, x'---y, y'---),\ \text{ovvero}\ SF(x, x'---y, y'---)$$

che rappresenta una funzione implicita (almeno in parte) delle variabili x, x' - - -, si troverà trasformata in una funzione interamente esplicita di queste variabili medesime e per isvolgerla in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di x, x' - - - basterà sviluppare in una simil serie il prodotto (178). Aggiungiamo che il limite superiore al modulo del resto che completerà l'ultima serie sarà nello stesso tempo un limite superiore al modulo del resto che completerà la prima. Se si chiama ξ il modulo di x, ξ' il modulo di x' - - - ed $\bar{x}$, $\bar{x}'$ - - - siano espressioni immaginarie che abbiano per moduli X, X' - - -; il limite di cui si tratta sarà precisamente il resto della serie che essendo ordinata secondo le potenze ascendenti di ξ, ξ' - - - ha per somma l' espressione

$$(185)\quad \frac{X}{X-\xi}\cdot\frac{X'}{X'-\xi'}---\Lambda\frac{\chi(\bar{x},b+\bar{z})}{f(\bar{x},b+\bar{z})}\cdot\frac{\chi_1(\bar{x}',b'+\bar{z}')}{f_1(\bar{x}',b'+\bar{z}')}---F(\bar{x},\bar{x}'---b+\bar{z},b'+\bar{z}',---).$$

Se nello sviluppo della funzione

$$F(x, x'---y, y'---),\ \text{ovvero}\ SF(x, x'---y, y'---)$$

secondo le potenze ascendenti di x, x' - - - si trascurassero tutti i termini di

cui il grado misurato dalla somma degli esponenti di x, x'--- divenisse eguale o superiore ad h, l'errore commesso o il modulo del resto sarebbe ancora inferiore al prodotto

$$(186)\qquad \frac{1}{M^{h-1}(M-1)}\Lambda\frac{\chi(\bar{a}x, b+\bar{z})}{f(\bar{a}x, b+\bar{z})}\cdot\frac{\chi_1(\bar{a}x', b'+\bar{z}')}{f_1(\bar{a}x', b'+\bar{z}')}\cdots F(\bar{a}x, \bar{a}x', \cdots b+\bar{z}, b'+\bar{z}'\cdots)$$

M indicando il modulo di $\bar{a}$, e questo ultimo modulo essendo superiore all'unità ma inferiore a ciascuno dei quozienti

$$\frac{X}{\xi}, \frac{X'}{\xi'}, \cdots.$$

Per mostrare un' applicazione della formola (183) supponiamo y, y' determinate in funzione di x, x' per mezzo delle due equazioni

$$(187)\qquad y = b + x\sin. y \qquad y' = b' + x\sin. y'.$$

Se i moduli di x e di x' sono inferiori al numero 0,662742--- allora, dietro ciò che è stato detto precedentemente, ciascuna di queste equazioni offrirà una sola radice corrispondente ad un valore di $y - b$ o di $y' - b'$ di cui il modulo sia al di sotto del numero 1,199678---. Ciò posto, se la funzione

$$F(x, x', b + z, b' + z')$$

resta finita e continua per moduli di x, x' più piccoli che 0,662742--- e per moduli di z, z' più piccoli di 1,199678---, si avrà supponendo i moduli di $\bar{z}$, $\bar{z}'$ inferiori essi stessi al numero 1,199678---

$$(188)\qquad \begin{aligned} &F(x, x', y, y') \\ &= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1 - x\cos.(b+\bar{z})}{\bar{z} - x\sin.(b+\bar{z})}\cdot\frac{1 - x'\cos.(b'+\bar{z}')}{\bar{z}' - x'\sin.(b'+\bar{z}')}F(x, x', b+\bar{z}, b'+\bar{z}')\,dq\,dq'. \end{aligned}$$

Dunque a fine di sviluppare la funzione implicita di x, x' rappresentata da

$$F(x, x', y, y')$$

in una serie ordinata secondo le potenze ascendenti di x, x', basterà sviluppare in una simil serie il prodotto

$$(189)\qquad \frac{1 - x\cos.(b+\bar{z})}{\bar{z} - x\sin.(b+\bar{z})}\cdot\frac{1 - x'\cos.(b'+\bar{z}')}{\bar{z}' - x'\sin.(b'+\bar{z}')}F(x, x', b+\bar{z}, b'+\bar{z}').$$

Aggiungiamo che il limite superiore al modulo del resto che completerà la prima o la seconda serie, sarà precisamente il resto della serie che essendo ordinata secondo le potenze ascendenti di ξ, ξ' ha per somma l' espressione

$$(190)\qquad \frac{X}{X-\xi}\,\frac{X'}{X'-\xi'}\,\Lambda\,\frac{1 - \bar{x}\cos.(b+\bar{z})}{\bar{z} - \bar{x}\sin.(b+\bar{z})}\cdot\frac{1 - \bar{x}'\cos.(b'+\bar{z}')}{\bar{z}' - \bar{x}'\sin.(b'+\bar{z}')}F(\bar{x}, \bar{x}', b+\bar{z}, b'+\bar{z}').$$

Se nello sviluppo della funzione $F(x, x', y, y')$ si trascurassero tutti i termini il cui grado misurato dalla somma degli esponenti di x e di x', diventa eguale

o superiore ad h, l'errore commesso sarebbe inferiore al prodotto

$$(191)\qquad \frac{1}{A^{h-1}(A-1)}\,\Lambda\,\frac{1-\bar{a}x\cos.(b+\bar{z})}{\bar{z}-\bar{a}x\sin.(b+\bar{z})}\cdot\frac{1-\bar{a}x'\cos.(b'+\bar{z}')}{\bar{z}'-\bar{a}x'\sin.(b'+\bar{z}')}F(\bar{a}x,\bar{a}x',b+\bar{z},b'+\bar{z}')$$

A indicando il modulo di a, e questo modulo essendo superiore all'unità ma inferiore a ciascuno dei rapporti $\frac{X}{\xi}$, $\frac{X'}{\xi'}$.

Allorchè col mezzo dei metodi esposti in questo paragrafo si è determinato in funzione del numero n od h il limite dell'errore che si commette trascurando nello sviluppo d'una funzione esplicita o implicita tutti i termini il cui grado sorpassa questo numero di cui si tratta, è generalmente facile trovare il valore che si deve assegnare al numero n od h acciò l'errore commesso divenga inferiore a

$$\left(\frac{1}{10}\right)^N$$

essendo N un numero intero dato. Di fatto basta per giungervi determinare la parte intera della quantità negativa che rappresenta il logaritmo decimale dell'errore commesso. Immaginiamo per fissare le idee che y essendo determinato in funzione di x dall'equazione (166)

$$y=b+x\sin.y,$$

si proponga di assegnare al numero n un valore tale che nello sviluppo di

$$\frac{1}{1-x\cos.y}$$

secondo le potenze ascendenti di x, la somma dei termini d'un grado eguale o superiore ad n offra un modulo inferiore a

$$\left(\frac{1}{10}\right)^N$$

pel valore particolare $x=\frac{1}{4}$ o per un valore più piccolo della variabile x. Basterà evidentemente che l'espressione (174) divenga inferiore a $\left(\frac{1}{10}\right)^N$ ed il suo logaritmo decimale a $-N$. Se adunque si indicano colla lettera L i logaritmi presi nel sistema di cui la base è 10, basterà scegliere il numero intero n in modo da adempiere la condizione

$$(192)\qquad 0{,}6399617\text{---}+L(n+1)-L\left(1-\frac{0{,}6057\text{---}}{n}\right)-0{,}4234029\text{---}n\ <-N.$$

Così per esempio se si tratta di assegnare al numero n un valore tale che l'errore commesso quando si trascurino i termini d'un grado eguale o superiore ad n non sorpassi un millesimo, si troverà in questo caso

$$N=3$$

e la condizione (192) darà

$$(193)\qquad n>\frac{3{,}6399617\text{---}}{0{,}4234029\text{----}\frac{1}{n}\left\{L(n+1)-L\left(1-\frac{0{,}6057\text{---}}{n}\right)\right\}}.$$

Se si riducesse al suo primo termine il denominatore della frazione contenuta nel secondo membro della formola (193), questa frazione sarebbe equivalente a 0,86 - - - e conseguentemente si verificherebbe la formola pigliando $n=9$. D'altronde essendo n eguale o superiore a 9, il rapporto

$$\frac{L(n+1)}{n}$$

diminuirà per valori crescenti di n e per ciò il prodotto

$$\frac{1}{n}\left\{L(n+1)-L\left(1-\frac{0,6057---}{n}\right)\right\}$$

non sorpasserà

$$\frac{1}{9}\{1-L(1-0,0673---)\}=0,1144---;$$

dunque la condizione (193) sarà soddisfatta se si ha

$$n>\frac{3,6399---}{0,4234---0,1144---}=11,7---,$$

di modo che si potrà prendere $n=12$. Dunque se nell'ipotesi ammessa si arresta lo sviluppo di

$$\frac{1}{1-x\cos.y}$$

dopo il dodicesimo termine, l'errore che si commette non sorpasserà un millesimo.

Si vede da ciò che precede che per le funzioni implicite come per le funzioni esplicite, la determinazione dei limiti superiori ai moduli dei resti che completano gli sviluppi può essere ridotta alla determinazione delle quantità della forma

$$\Lambda f(\bar{x}),\quad \text{ovvero}\quad \Lambda f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}---),$$

o di quantità che siano evidentemente più grandi. Noi abbiamo di già dato un gran numero di formole che possono essere utilmente impiegate nella valutazione delle quantità di cui si tratta. Aggiungeremo qui che lo sviluppo in serie delle funzioni

$$f(\bar{x}),\quad f(\bar{x},\bar{y},\bar{z}---)$$

è spesso un mezzo assai semplice per giungere a questa valutazione. Così in particolare siccome si ha generalmente, qualunque sia il modulo X di $\bar{x}$,

$$\sin.\bar{x}=\bar{x}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\bar{x}^3+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\bar{x}^5-\text{ecc.}$$

e

$$\cos.\bar{x}=1-\frac{1}{1\cdot2}\bar{x}^2+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4}\bar{x}^4-\text{ecc.}$$

se ne conchiuderà, avendo riguardo alla prima delle formole (25),

$$\Lambda \sin.\bar{x} = X + \frac{X^3}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{X^5}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} + \cdots = \frac{e^X - e^{-X}}{2}$$

$$\Lambda \cos.\bar{x} = 1 + \frac{X^2}{1\cdot 2} + \frac{X^4}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \cdots = \frac{e^X + e^{-X}}{2}$$

ciò che si sapea di già. Parimenti, siccome supponendo $X < 1$ si trova

$$\text{l.}(1+\bar{x}) = \bar{x} - \frac{\bar{x}^2}{2} + \frac{\bar{x}^3}{3} - \frac{\bar{x}^4}{4} + \text{ecc.}$$

$$\text{arc. tan.}\bar{x} = \bar{x} - \frac{\bar{x}^3}{3} + \frac{\bar{x}^5}{5} - \text{ecc.}$$

$$\text{arc. sin.}\bar{x} = \bar{x} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\bar{x}^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{\bar{x}^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{\bar{x}^7}{7} + \text{ecc.};$$

ecc. ecc.

si avrà in questa ipotesi, cioè a dire per $X < 1$,

$$\Lambda\,\text{l.}(1\pm\bar{x}) = X + \frac{X^2}{2} + \frac{X^3}{3} + \cdots$$

$$\Lambda\,\text{arc. tan.}\bar{x} = X + \frac{X^3}{3} + \frac{X^5}{5} + \cdots$$

$$\Lambda\,\text{arc. sin.}\bar{x} = X + \frac{1}{2}\cdot\frac{X^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{X^5}{5} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{X^7}{7} + \cdots$$

e per conseguenza

$$(194)\quad \begin{aligned} &\Lambda\,\text{l.}(1\pm\bar{x}) = \text{l.}\left(\frac{1}{1-X}\right); \quad \Lambda\,\text{arc.tan.}\bar{x} = \text{l.}\left(\frac{1+X}{1-X}\right); \\ &\Lambda\,\text{arc. sin.}\bar{x} = \text{arc.sin.}X; \quad \text{ecc.} \cdots. \end{aligned}$$

Finalmente, se si indica con $\bar{u}$ una funzione di $\bar{x}$ o di $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{z}$: si troverà

1.° Qualunque sia $\Lambda\bar{u}$

$$(195)\quad \begin{aligned} &\Lambda \sin.\bar{u} = \text{ ovvero } < \frac{e^{\Lambda\bar{u}} - e^{-\Lambda\bar{u}}}{2} \\ &\Lambda \cos.\bar{u} = \text{ ovvero } < \frac{e^{\Lambda\bar{u}} + e^{-\Lambda\bar{u}}}{2} \end{aligned}$$

2.° Supponendo $\Lambda\bar{u} < 1$

$$(196)\quad \begin{aligned} &\Lambda\,\text{l.}(1\pm\bar{u}) = \text{ ovvero } < \text{l.}\left(\frac{1}{1-\Lambda\bar{u}}\right) \\ &\Lambda\,\text{arc.tan.}\bar{u} = \text{ ovvero } < \text{l.}\left(\frac{1+\Lambda\bar{u}}{1-\Lambda\bar{u}}\right) \\ &\Lambda\,\text{arc. sin.}\bar{u} = \text{ ovvero } < \text{arc. sin. }\Lambda\bar{u} \\ &\text{ecc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ecc.} \end{aligned}$$

NOTE

DEI TRADUTTORI (*)

NB. Non essendo la precedente Memoria ordinata a paragrafi numerizzati, citeremo la pagina, e qualche parola del testo per indicare il luogo a cui vogliamo si riferiscano le seguenti annotazioni.

I.^A

pag. 9....*un valore immaginario* $\bar{x}$, *di cui il modulo sia* X---

Ecco alcuni cenni intorno alla nuova *teorica dei moduli* del nostro Autore, e due teoremi necessarii per l'intelligenza del resto della Memoria.

Quanto alla denominazione basterà avvertire che la parola *modulo* ha qui un significato ben diverso che in altre parti dell'analisi; altrove significa una quantità costante, e qui una quantità *sempre reale e positiva*, che può essere anche variabile e funzione di variabili.

Ciò che importa è di fissar bene che l'espressione $Xe^{p\sqrt{-1}}$, ove X può prendere ogni valore da *zero* all'∞, e p ogni valore da $-\pi$ a $+\pi$ compresi anche questi limiti, basta a rappresentare qualunque valore reale o immaginario della forma $A+B\sqrt{-1}$. Infatti essendo a, b, quantità reali e positive, qualunque valore è contenuto nelle quattro forme

$$a+b\sqrt{-1}\,;\quad -a+b\sqrt{-1}\,;\quad a-b\sqrt{-1}\,;\quad -a-b\sqrt{-1}\,;$$

facciasi
$$X=\sqrt{a^2+b^2},$$

intendendo che il radicale sia preso col segno positivo, e

$$h=\text{Arc. tan.}\,\frac{b}{a},$$

intendendo che fra gl' infiniti archi che hanno la stessa tangente quest' h sia quello compreso fra *zero*, $\frac{\pi}{2}$. Avremo

$$(\alpha)\qquad \begin{aligned} a+b\sqrt{-1} &= Xe^{h\sqrt{-1}}\\ -a+b\sqrt{-1} &= Xe^{(\pi-h)\sqrt{-1}}\\ a-b\sqrt{-1} &= Xe^{-h\sqrt{-1}}\\ -a-b\sqrt{-1} &= Xe^{-(\pi-h)\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

ciò che si dimostra traducendo gli esponenziali colle note formole per seno e coseno, e osservando essere

$$\sin.\,h=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos.\,h=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

È poi visibile che nei quattro precedenti esponenziali il coefficiente di $\sqrt{-1}$ è un arco sempre compreso fra $-\pi$, π. Ogni quantità reale positiva è contenuta come caso particolare nella

(*) Paolo Frisiani, Gabrio Piola.

prima o nella terza delle precedenti (α) per b e quindi h *zero*: e similmente ogni quantità reale negativa nella seconda o nella quarta.

Così l'idea di una variabile x alquanto vaga alla maniera ordinaria quando le si lascia la possibilità di prendere anche valori immaginarii, si cambia con quella di una funzione semplicissima $Xe^{p\sqrt{-1}}$ di due variabili X, p aventi corsi reali fra certi limiti [la prima fra *zero*, ∞, la seconda fra $-\pi, \pi$]. Un tal cambiamento è di effetto felicissimo per la chiarezza delle idee. Quando ad una variabile semplice x si intende surrogata l'espressione $Xe^{p\sqrt{-1}}$ anzi detta, il nostro Autore scrive $\overline{x}$: talchè vedendo questa lineetta, bisogna immaginarsi di vedere l'espressione $Xe^{p\sqrt{-1}}$ che sarebbe lungo scrivere dappertutto.

La quantità che si considera non sia semplice ma composta, cioè $f(x)$ funzione di quella x a cui è permesso prendere valori immaginarii, e di altre quantità che pel momento supporremo essere tutte reali. Mettendo $Xe^{p\sqrt{-1}}$ per x la $f(Xe^{p\sqrt{-1}})$ può sempre ridursi alla forma $A+B\sqrt{-1}$, e quindi alla $Ye^{q\sqrt{-1}}$, essendo

$$(\mathcal{E}) \qquad Y=\sqrt{A^2+B^2}, \qquad q=\text{Arc. tan.}\,\frac{B}{A}.$$

È questa una proposizione provata in lungo dagli Analisti. (*). Il valore di Y preso positivamente è ciò che noi chiameremo *modulo della funzione* $f(\overline{x})$.

La quantità che si considera sia una funzione $f(x_1, x_2, x_3, ---)$ di molte $x_1, x_2, x_3 ---$ a cui si lascia la possibilità di prendere anche valori immaginarii. Se ad esse s'intendano sostituite le analoghe espressioni

$$X_1 e^{p_1\sqrt{-1}},\ X_2 e^{p_2\sqrt{-1}},\ X_3 e^{p_3\sqrt{-1}},\ \text{ecc.} \quad \text{la} \quad f\left(X_1 e^{p_1\sqrt{-1}},\ X_2 e^{p_2\sqrt{-1}},\ X_3 e^{p_3\sqrt{-1}},\ \text{ecc.}\right)$$

potrà ancora ridursi alla forma $A+B\sqrt{-1}$, e quindi alla $Ye^{q\sqrt{-1}}$. Questa Y è funzione di quantità per supposizione tutte reali: è dessa che avremo di mira quando nomineremo il modulo della funzione $f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \text{ecc.})$.

Teorema Primo

Il modulo della somma

$$X_1 e^{p_1\sqrt{-1}}+X_2 e^{p_2\sqrt{-1}}+X_3 e^{p_3\sqrt{-1}}+---$$

è sempre minore della somma

$$X_1+X_2+X_3+\text{ecc.}$$

dei moduli dei singoli termini.

Dimostrazione. La quantità proposta si mette sotto la forma $A+B\sqrt{-1}$, essendo

$$A=X_1\cos.p_1+X_2\cos.p_2+X_3\cos.p_3+---$$

$$B=X_1\sin.p_1+X_2\sin.p_2+X_3\sin.p_3+---.$$

Quindi per la prima delle ($\mathcal{E}$) il modulo cercato sarà la radice quadrata dell'espressione

$$X_1^2+X_1^2+X_3^2+\text{ecc.}$$
$$+2X_1X_2\cos.(p_1-p_2)+2X_1X_3\cos.(p_1-p_3)+2X_2X_3\cos.(p_2-p_3)+\text{ecc.},$$

sempre minore della

$$X_1^2+X_2^2+X_3^2+----+2X_1X_2+2X_1X_3+2X_2X_3+\text{ecc.},$$

la quale è il quadrato della somma $X_1+X_2+X_3+\text{ecc.}$ quindi ecc.

(*) Vedi: Petri Paoli *Opuscula Analytica*: *Opusculum* III, ovvero il Capitolo V. pag. 179 T. 1.° Elementi d'Algebra dello stesso Autore.

Anche un integrale definito $\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot f(\overline{x})$ sarà una quantità, che, immaginando eseguita l'operazione indicata, potrà sempre ridursi alla forma $A+B\sqrt{-1}$, e quindi alla $Z e^{r\sqrt{-1}}$, essendo Z, r quantità reali, e la prima di esse sempre positiva. In questo caso le Z, r non conterranno la variabile p come le Y, q delle equazioni (δ); ma questa differenza non ci toglie di poterci formare mediante la Z un' idea di ciò che chiameremo il modulo del proposto integrale definito.

Teorema II.

Il modulo di un integrale definito è quantità sempre minore di quella che si ottiene integrando fra gli stessi limiti il modulo della funzione sotto il segno.

Dimostrazione. Sia $f(\overline{x}) = Y(p) e^{q(p)\sqrt{-1}}$; siccome la funzione $f(\overline{x})$, ove si lascia X nella sua generalità, non diventa infinita per nessun valore di p compreso fra $-\pi$, π, se facciamo $\omega = \frac{2\pi}{n}$, e supponiamo n numero che diventa sempreppiù grande, avremo (*)

$$\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot f(\overline{x}) = \lim. \left\{ \omega Y(-\pi) e^{q(-\pi)\sqrt{-1}} + \omega Y(-\pi+\omega) e^{q(-\pi+\omega)\sqrt{-1}} + \text{----} + \omega Y(\pi-\omega) e^{q(\pi-\omega)\sqrt{-1}} \right\}.$$

Ora se mediante l' andamento analitico esposto nella dimostrazione del Teorema precedente, il secondo membro di tale equazione si mette sotto la solita forma, il limite del modulo di questa sarà la Z modulo del proposto integrale, cioè

$$Z = \lim. \omega \sqrt{\left\{ \begin{array}{l} Y^2(-\pi) + Y^2(-\pi+\omega) + Y^2(-\pi+2\omega) + \text{ecc.} \\ + 2\, Y(-\pi)\, Y(-\pi+\omega) \cos. [q(-\pi) - q(-\pi+\omega)] + \text{ecc.} \end{array} \right\}};$$

ma siffatta espressione è quantità sempre minore di

$$\lim. \left\{ \omega Y(-\pi) + \omega Y(-\pi+\omega) + \text{----} + \omega Y(\pi-\omega) \right\}$$

la quale eguaglia $\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot Y(p)$. Adunque $Z < \int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot Y(p)$ ossia

$$(\gamma) \qquad \text{mod.} \int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot f(\overline{x}) < \int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \text{mod.} f(\overline{x})$$

in cui si legge il teorema.

II.[A]

pag. 9....*e si suppone che la funzione di* X *e di* p *rappresentata da* f($\overline{x}$) *resti finita e continua, qualunque sia* p, *pel valore attribuito ad* X, *e per un valore più piccolo* - - -

È interessante il far attenzione a questa condizione per evitare di prendere sbaglio intorno all' uso della formola (3) la quale è fondamentale in tutta questa memoria, e di grande importanza nel calcolo degli integrali definiti. A persuaderci tale necessità esaminiamo la dimostrazione. Ai due membri dell' equazione identica

$$\frac{d f(\overline{x})}{d X} = \frac{1}{X\sqrt{-1}} \frac{d f(\overline{x})}{d p}$$

(*) Vedi il Trattato posto nella seconda parte dei nostri Opuscoli. T. 1.° pag. 371.

si applica una doppia integrazione definita e si ha

$$\int_{-\pi}^{\pi} dp \int_0^X dX \cdot \frac{df(\bar{x})}{dX} = \frac{1}{\sqrt{-1}} \int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \int_0^X dX \cdot \frac{1}{X} \frac{df(\bar{x})}{dp}.$$

Nel primo membro l'integrazione per X si può eseguire ed ottenendo

$$\int_0^X dX \cdot \frac{df(\bar{x})}{dX} = f(\bar{x}) - f(0)$$

esso diventa

$$\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot f(\bar{x}) - 2\pi f(0).$$

Nel secondo membro si invertono le integrazioni, giacchè non può ivi eseguirsi in generale l'integrazione per X, ma bensì quella per p, e si ha

$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \int_0^X dX \cdot \frac{1}{X} \left[f\left(X e^{\pi\sqrt{-1}}\right) - f\left(X e^{-\pi\sqrt{-1}}\right) \right]$$

ove la quantità sotto l'integrale è zero per essere $e^{\pi\sqrt{-1}} = e^{-\pi\sqrt{-1}}$: allora il primo membro dà la formola (3).

Si vede essenziale a questa dimostrazione l'accennata inversione delle due integrazioni. Ma se vogliamo formarci una prova persuadente dell'essere permessa tale inversione in un integrale definito duplicato non potremo usare altro mezzo che considerando gl'integrali come limiti di somme di serie (*): considerazione la quale esige indispensabilmente che la funzione sottoposta al doppio segno non diventi infinita per nessuna combinazione di valori delle due variabili compresi fra i quattro limiti. Se pertanto l'indicata condizione manca, non abbiamo più dimostrazione a convincerci la legittimità di quella inversione: e però nessuna meraviglia che risultati basati su tale inversione si trovino erronei. V'è di più: il nostro Autore ha realmente provato in uno di questi casi particolari in cui la funzione passa per l'infinito che gl'integrali presi a rovescio danno risultati diversi (**). Conchiudasi che la data dimostrazione non regge più se la quantità $\frac{1}{X\sqrt{-1}} \cdot \frac{df(\bar{x})}{dp}$ ossia $f'(\bar{x})$ diventa infinita per valori di X, p compresi fra i quattro limiti *zero*, X; $-\pi$, π; e questa è veramente la condizione per la sussistenza della formola (3). L'Autore pone la condizione nella $f(\bar{x})$ piuttosto che nella derivata $f'(\bar{x})$, perchè d'ordinario, quantunque non sempre, sussistendo in quella sussiste anche in questa.

Non badando alla posta condizione, e ponendo nella (3) $\frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^n}$ in luogo di $f(\bar{x})$ avremmo erroneamente conchiuso per $\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^n}$ un valore infinito mentre, colla (4) si vede che il suo valore è ben diverso. La ragione dell'errore sta in ciò che $\frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^n}$ diviene infinita per $X = 0$, e quindi la formola (3) non è applicabile.

Quando l'A. sostisuisce nella (3) o nella (5) che ne è conseguenza alla $f(\bar{x})$ la $\bar{x} \frac{f(\bar{x}) - f(x)}{\bar{x} - x}$, pone una funzione il cui denominatore passa per zero, giacchè scrivendo $\xi e^{s\sqrt{-1}}$ invece di x si fa vedere subito dopo dover essere $\xi < X$, e siccome è sempre s un arco fra $-\pi$, π, si capisce che havvi per X, p fra *zero*, X; $-\pi$, π una combinazione di valori tale da rendere

(*) Vedi il Trattato sopra citato, nello stesso luogo.
(**) *Exercices de Mathématiques*. T. I.er pag. 85.

$\bar{x}=x$. A schivare però il passaggio per l'infinito l'A. ha scelto il numeratore $f(\bar{x})-f(x)$ in maniera che quando $\bar{x}=x$ il vero valore della funzione non è già l'infinito ma $xf'(x)$; senza tale avvertenza nella scelta del numeratore si sarebbe potuto venire a conseguenze falsissime.

La (4) è una formola diversa dalla (3) perchè si riferisce al caso in cui la funzione posta sotto il segno integrale diventa infinita per $\bar{x}=0$. Pongasi $\frac{f(x)}{x^n}=\varphi(x)$, quella (4) diventerà

$$(\delta)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} dp\cdot\varphi(\bar{x})=\frac{2\pi}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\frac{d^n x^n\varphi(x)}{dx^n}$$

fatta a derivazioni eseguite $x=0$: questa formola ci sarà molto utile in seguito.

Osserviamo che essa può anche scriversi

$$(\varepsilon)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} dp\cdot\varphi(\bar{x})=\frac{2\pi}{1\cdot 2\cdots h}\cdot\frac{d^h x^h\varphi(x)}{dx^h}$$

fatta a derivazioni eseguite $x=0$: essendo $h\geqq n$ (*); cioè h non può mai essere minore dell'esponente di x nel denominatore della frazione indicata con $\varphi(x)$, ma può essere qualunque numero intero positivo maggiore. Per dimostrare ciò conviene provare che il secondo membro della (ε), il quale può scriversi $\frac{2\pi}{1\cdot 2\cdots h}\cdot\frac{d^h\cdot x^{h-n}f(x)}{dx^h}$, fatta a derivazioni eseguite $x=0$, eguaglia $\frac{2\pi f^{(n)}(0)}{1\cdot 2\cdots n}$. Ora indicando sempre cogli apici le derivate per x, abbiamo per formola nota

$$[x^{h-n}f(x)]^{(h)}=x^{h-n}f^{(h)}(x)+h(x^{h-n})'f^{(h-1)}(x)+h\left(\frac{h-1}{2}\right)(x^{h-n})''f^{(h-2)}(x)+\cdots$$

$$+\frac{h(h-1)(h-2)\cdots(n+1)}{1\cdot 2\cdots(h-n)}(x^{h-n})^{(h-n)}f^{(n)}(x)+\cdots+(x^{h-n})^{(h)}f(x).$$

I termini antecedenti a quello che contiene la derivata $(x^{h-n})^{(h-n)}$, essendo moltiplicati per potenze positive di x, svaniscono tutti quando si fa $x=0$: i posteriori sono pur zero, perchè sono zero tutte le derivate $(x^{h-n})^{(h-n+1)}\cdots(x^{h-n})^{(h)}$. Resta dunque quel solo che per essere

$$(x^{h-n})^{(h-n)}=(h-n)(h-n-1)\cdots 2\cdot 3\cdot 1$$

si riduce

$$h(h-1)(h-2)\cdots(n+1)f^{(n)}(0);$$

e questa quantità divisa per $1\cdot 2\cdots n(n+1)\cdots(h-1)h$ rende il secondo membro della (ε) appunto qual si volea dimostrare.

La formola (ε) più generale contiene non solo la (4), ma anche la (3) antecedente. Infatti $\varphi(\bar{x})$ mutasi in $f(\bar{x})$ facendo $n=0$, e la (ε) ci somministra allora la (3), come provasi facendo $h=1$, ovvero un'altro numero intero positivo.

Noteremo che dalla (4) dell'Autore deducesi subito la formola di Laplace già riferita in altro luogo de' nostri Opuscoli (**); e che però a motivo della condizione di continuità nella $f(x)$, viene ad esservi per la suddetta formola una eccezione ultimamente e saggiamente osservata dal sig. Frullani (***).

(*) Prendiamo dai geometri tedeschi questa maniera di scrivere $h\geqq n$ per significare h eguale ovvero maggiore di n. Essa è vantaggiosa per abbreviare quando, come in questa memoria, occorre frequentemente.

(**) T. I, pag. 93.

(***) Vedi il giornale intitolato: *Annali delle scienze del Regno Lombardo-Veneto*, anno 1832 pag. 265.

III.ª

pag. 10. *Se nella formola* (5) - - -

La deduzione della (6) dalla $\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{\bar{x} f(\bar{x})}{\bar{x}-x} = f(x) \int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{x}-x}$ si fa calcolando $\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{x}-x}$ mediante la serie infinita convergente sostituita ad $\frac{\bar{x}}{\bar{x}-x}$, e osservando che tutti i termini fuori del primo riescono zero a motivo della (1). Alcuno qui però potrebbe muovere una difficoltà. L'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{x}-x}$ riescirebbe zero calcolato colla (5), e zero anche l'integrale componente il secondo membro della (6), come dunque non sono tali? La risposta è facile richiamando ciò che dicemmo nella nota precedente circa il passaggio della quantità $\bar{x}-x$ per lo zero. Le due funzioni $\frac{\bar{x}}{\bar{x}-x}$, $\frac{\bar{x} f(\bar{x})}{\bar{x}-x}$ diventano infinite per una combinazione di valori delle X, p fra *zero*, X; $-\pi$, π, quindi sarebbe assurdo calcolare il valore degli integrali rispettivi colla (3) o colla (5).

Osserviamo che la (6) ove sostituiscasi alla frazione $\frac{\bar{x}}{\bar{x}-x}$ l'espressione identicamente eguale

$$1 + \frac{x}{\bar{x}} + \frac{x^2}{\bar{x}^2} + - - - - + \frac{x^{n-1}}{\bar{x}^{n-1}} + \frac{x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)}$$

dà la formola importantissima

$$(\xi) \quad \begin{aligned} f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot f(\bar{x}) + \frac{x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}} + \frac{x^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^2} + - - - \\ + \frac{x^{n-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^{n-1}} + \frac{x^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{f(\bar{x})}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)} \end{aligned}$$

per lo sviluppo di una funzione secondo le potenze ascendenti della variabile arrestato dopo n termini coll'espressione del resto, data poco dopo anche dall'A., e che consente con quella trovata altrimenti in questi Opuscoli (*). Ogni termine di questa (ξ) è poi trasformato dall'A. [sua formola (7)] mediante la replicata applicazione della (4). Gioverà notare che la precedente (ξ) è più generale della (8) perchè non si esige in essa la continuità in tutte le derivate $f'(\bar{x})$, $f''(\bar{x})$ - - - come nella (8) a motivo dell'applicazione della formola (4) trovata con sì fatta condizione.

IV.ª

pag. 11. *Così, in particolare, poichè le funzioni* - - -

A ben comprendere quanto qui dice l'Autore convien sapere ch'egli ammette nelle funzioni altre specie di discontinuità per valori particolari della variabile oltre quella del passaggio per l'infinito da noi discussa nella nota seconda. Da alcuni luoghi delle sue opere (**) devesi arguire ch'egli chiama discontinua una funzione anche quando per un valore partico-

(*) T. I, pag. 96.

(**) *Leçons sur le Calcul Différentiel*. pag. 9.
Cours d'Analyse. pag. 34, et suiv.

lare della variabile prende un valore molteplice, ovvero immaginario. In questo senso sono discontinue le funzioni $\sqrt{1+\bar{x}}$, $\frac{\bar{x}}{1+\sqrt{1-\bar{x}^2}}$ che diventano immaginarie la prima per $X>1$; $p=\pm\pi$, e la seconda per $X>1$; $p=-\pi$, *zero*, π; essendo da notarsi che trattasi qui non della forma immaginaria indotta dall'espressione $Xe^{p\sqrt{-1}}$ ma di quella che risulta da un radicale quando $Xe^{p\sqrt{-1}}$ diventa quantità reale. Nel nuovo senso è anche discontinua la funzione cos. $\frac{1}{\bar{x}}$ che per $X=0$ piglia un valore indeterminato. Siccome però l'insussistenza delle equazioni (3), (5), (6) è stata provata solamente per quella specie di discontinuità che si riferisce al passaggio per l'infinito, ne viene di conseguenza che quanto qui dice l'A. circa gli sviluppi delle funzioni $\sqrt{1+\bar{x}}$, $\frac{\bar{x}}{1+\sqrt{1-\bar{x}^2}}$, cos. $\frac{1}{\bar{x}}$ non ci sembra da lui dimostrato. Nondimeno tutto ciò ch'egli asserisce in questo luogo è verissimo per un'altra ragione. Vedemmo nella nota seconda che la condizione per la sussistenza della formola (3), e quindi delle (5), (6) non è veramente la continuità nella $f(\bar{x})$, ma nella sua derivata $f'(\bar{x})$. Ora le derivate delle tre precedenti funzioni sono rispettivamente

$$\frac{1}{2\sqrt{1+\bar{x}}},\quad \frac{1}{\left(1+\sqrt{1-\bar{x}^2}\right)\sqrt{1-\bar{x}^2}},\quad \sin.\frac{1}{\bar{x}}\cdot\frac{1}{\bar{x}^2}$$

e queste diventano infinite, la prima per $X=1$; $p=\pm\pi$, la seconda per $X=1$; $p=-\pi$, *zero*, π, e la terza per $X=0$; p qualunque: dunque ecc.

V.[A]

pag. 11. *Se si chiama* ξ *il modulo di* x - - -

Essendovi in queste poche linee i principj del nuovo calcolo dei limiti sarà bene procedere con lentezza e fissarne le idee. S'intende [rivedi la Nota I.ª] trasformata $f(\bar{x})$ nell'espressione equivalente $Y(X, p)\,e^{\eta(X,p)\sqrt{-1}}$, e il modulo $Y(X, p)$, funzione delle due variabili X, p, s'intende portato al massimo, restando X costante. Il valore di p che induce il massimo in $Y(X, p)$ si trova ordinariamente mediante l'equazione

$$\frac{dY}{dp}=0,$$

ed il criterio, $\frac{d^2Y}{dp}$ eguale a quantità negativa: se l'equazione ha più radici deve farsi p eguale a quella che rende $Y(X, p)$ un massimo fra i massimi. La funzione poi $Y(X, p)$ divenuta massima per la sostituzione del valore particolare di p, è quella che l'Autore indica col simbolo $\Lambda f(\bar{x})$. Si vedranno più tardi copiosi esempj per la determinazione delle Λ in diversi casi particolari della $f(\bar{x})$. Intanto notiamo, perchè ne avremo tosto bisogno, che se H è una costante reale, $k(p)$ una funzione reale di p, discende dagli esposti principj essere

$$(\lambda)\qquad \Lambda\left[He^{k(p)\sqrt{-1}}f(\bar{x})\right]=H\Lambda f(\bar{x}).$$

Richiaminsi ora le cose dette sul fine della Nota I.ª, e osservisi l'equazione

$$\int_{-\pi}^{\pi}dp\cdot Y(X, p)=\lim.\,\omega\left\{Y(X, -\pi)+Y(X, -\pi+\omega)+\text{----}+Y(X, \pi-\omega)\right\}$$

dove nel secondo membro il numero dei termini è n. Se per $\Lambda f(\bar{x})$ esprimasi il massimo valore che prende $Y(X, p)$ nel corso di p da $-\pi$ a π, vedesi manifestamente che nessuno dei

termini $Y(X, -\pi)$, $Y(X, -\pi+\omega)$, ecc. potrà essere maggiore di $\Lambda f(\overline{x})$, e molti ne saranno minori, talchè sicuramente il secondo membro della precedente equazione è sempre minore di $n\omega\Lambda f(\overline{x})$ ossia di $2\pi\Lambda f(\overline{x})$. Adunque si stabilisca

$$\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot Y(X, p) < 2\pi\Lambda f(\overline{x})$$

che può scriversi

$$(\theta) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \text{mod.} f(x) < \Lambda f(\overline{x}).$$

Avremo poi a più forte ragione per la formola (γ) del Teorema 2.° della Nota I.ª

$$(\lambda) \qquad \text{mod.} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot f(\overline{x}) < \Lambda f(\overline{x});$$

passaggio pel quale si è supposto quest'altro

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \text{mod.} y = \text{mod.} \frac{1}{2\pi} y$$

essendo y quantità qualunque: e la verità ne è evidente.

Osserviamo che se nella (θ), (λ) la Λ deve avere il significato attribuito a tal notazione sul principio di questa nota, bisogna che il valore di p portante il massimo in $Y(X, p) = \text{mod.} f(\overline{x})$ sia compreso fra $-\pi$, π. Condizione è questa a cui trovasi sempre il modo di soddisfare: come vedremo negli esempj.

Applichiamo la precedente formola generale (λ) a trovare i limiti di cui sono minori i moduli del termine generale e del resto della precedente (ξ) [Nota III.ª].

Pel primo avvertiamo che nell'espressione $\frac{x^{n-1}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{f(\overline{x})}{\overline{x}^{n-1}}$ il fattore x^{n-1} può passarsi sotto il segno integrale, quindi per la (λ)

$$\text{mod.} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{x^{n-1}}{\overline{x}^{n-1}} f(\overline{x}) < \Lambda\left[\left(\frac{\xi}{X}\right)^{n-1} e^{(n-1)(s-p)\sqrt{-1}} f(\overline{x})\right]$$

e mettendo n per $n-1$, e usando la formola (λ)

$$(\mu) \qquad \text{mod.} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{x^n}{\overline{x}^n} f(\overline{x}) < \left(\frac{\xi}{X}\right)^n \Lambda f(\overline{x})$$

in cui si vede la proposizione riferita dal nostro Autore nella sua espressione (9).

Quanto al modulo del resto, avremo per la (λ)

$$(\nu) \qquad \text{mod.} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{x^n f(\overline{x})}{\overline{x}^{n-1}(\overline{x}-x)} < \Lambda\left[\frac{x^n f(\overline{x})}{\overline{x}^{n-1}(\overline{x}-x)}\right]$$

e sotto questa forma dà anche l'Autore più tardi [sua espressione (34)] la quantità di cui è minore il modulo del detto resto. Per cavarne poi l'espressione adotta in questo luogo osserveremo che

$$\frac{x^n f(\overline{x})}{\overline{x}^{n-1}(\overline{x}-x)} = \frac{\xi^n}{X^{n-1}} \cdot \frac{e^{n(s-p)\sqrt{-1}} f(\overline{x})}{X - \xi e^{(s-p)\sqrt{-1}}},$$

e siccome

$$\frac{1}{X - \xi e^{(s-p)\sqrt{-1}}} = \frac{e^{r\sqrt{-1}}}{\sqrt{X^2 - 2X\xi\cos.(s-p) + \xi^2}}$$

dove

$$r = \text{Arc. tan.} \frac{\xi \sin.(s-p)}{X - \xi\cos.(s-p)};$$

la (ν) in forza della (λ) darà quest'altra

$$(\xi) \qquad \text{mod.}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{\bar{x}^n f(\bar{x})}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)} < \frac{\xi^n}{X^{n-1}}\,\Lambda\left[\frac{f(\bar{x})}{\sqrt{X^2-2X\xi\cos.(s-p)+\xi^2}}\right].$$

Ora essendo sempre

$$\sqrt{X^2-2X\xi\cos.(s-p)+\xi^2} > X-\xi,$$

avremo per ogni valore di p

$$\frac{f(\bar{x})}{\sqrt{X^2-2X\xi\cos.(s-p)+\xi^2}} < \frac{f(\bar{x})}{X-\xi}$$

ed anco

$$\text{mod.}\left[\frac{f(\bar{x})}{\sqrt{X^2-2X\xi\cos.(s-p)+\xi^2}}\right] < \text{mod.}\ \frac{f(\bar{x})}{X-\xi},$$

quindi anche quando p ha il valore inducente il massimo: perciò

$$\Lambda\left[\frac{f(\bar{x})}{\sqrt{X^2-2X\xi\cos.(s-p)+\xi^2}}\right] < \Lambda\left[\frac{f(\bar{x})}{X-\xi}\right].$$

Mettasi [a motivo della (λ)] $\frac{1}{X-\xi}\Lambda f(\bar{x})$ invece di $\Lambda\left[\frac{f(\bar{x})}{X-\xi}\right]$, e si moltiplichi per $\frac{\xi^n}{X^{n-1}}$. avremo

$$\frac{\xi^n}{X^{n-1}}\,\Lambda\left[\frac{f(\bar{x})}{\sqrt{X^2-2X\xi\cos.(s-p)+\xi^2}}\right] < \frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\,\Lambda f(\bar{x});$$

e in seguito dalla (ξ) a più forte ragione

$$(o) \qquad \text{mod.}\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{\bar{x}^n f(\bar{x})}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)} < \frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\,\Lambda f(\bar{x}).$$

Questa (o) contiene la seconda proposizione dell'Autore enunciata mediante la sua espressione (11).

Le formole (μ), (o) sono di un'importanza capitale: fermiamoci un momento a considerarla. L'analisi generalissima di Cauchy abbraccia anche le funzioni immaginarie; d'ordinario però, e specialmente nell'applicazione ai problemi fisici le serie sono fatte di quantità tutte reali. In tal caso, siccome il modulo di una quantità reale è la stessa quantità reale presa sempre positivamente, segue dalle (μ), (o) che il termine generale $(n+1)$ *esimo* nello sviluppo della funzione $f(\bar{x})$ secondo le potenze intere ed ascendenti di x è sempre minore della quantità (9) del testo: e il resto della stessa serie dopo un numero n di termini è sempre minore della quantità (11). Avvertasi che nelle (9), (11) in tal caso la ξ è la stessa x: la X poi ha un valore positivo arbitrario ma però maggiore di x, e minore di quello che combinato con uno di p fra $-\pi$, π rende $f(Xe^{p\sqrt{-1}})$ infinita. Le quantità (9), (11) sono di sempre possibile, anzi di facile calcolazione. Ecco una conclusione interessantissima fra le quantità reali cui siamo giunti percorrendo una via spinosa fra gl'immaginarii.

VI.[A]

pag. 13. *Parimenti se si indica* - - -

Per tradurre al caso di più variabili le teoriche superiormente esposte per una sola variabile cominceremo a richiamare dalla Nota I.ª l'idea del modulo di una funzione a più variabili, e non ci sarà difficile capire che la funzione $f(x, y, z$ - - -) dopo la sostituzione alle x, y, z - - - delle $\bar{x}=Xe^{p\sqrt{-1}}$, $\bar{y}=Ye^{q\sqrt{-1}}$, $\bar{z}=Ze^{r\sqrt{-1}}$, - - - può ridursi alla forma

$$U(X, Y, Z \text{ - - - } p, q, r \text{ - - -})\, e^{u(X, Y, Z \text{ - - - } p, q, r \text{ - - -})\sqrt{-1}}.$$

Il valore *massimo tra i massimi* che prende questa $U(X, Y, Z - - - p, q, r - - -)$ per la variabilità delle $p, q, r - - -$ restando costanti le $X, Y, Z - - -$ è quello che qui si indica per $\Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -)$. Supponiamo che il lettore conosca la teorica dei massimi e minimi per le funzioni a più variabili dietro la quale trovare l'opportuna combinazione dei valori delle $p, q, r - - -$ conducente all'indicato scopo.

Risulta dalla data definizione la formola

$$(\pi) \qquad \Lambda\left[H e^{k(p, q, r - - -)\sqrt{-1}} f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -)\right] = H \Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -)$$

che è una generalizzazione dell'analoga (η) data nella Nota precedente.
Cerchiamo altresì una formola che sia una generalizzazione della (λ): essa è

$$(\rho) \qquad \text{mod.} \frac{1}{(2\pi)^m} \int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \int_{-\pi}^{\pi} dr - - - f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -) < \Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -)$$

dove m esprime il numero delle variabili $p, q, r - - -$ ossia delle $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z} - - -$.
Per dimostrarla prendiamo ad esaminare il caso di due sole variabili. Non havvi difficoltà fuori di quella di una maggior lunghezza di calcoli nell'estendere il processo analitico dato sulla fine della Nota I.ª: e considerando l'integrale duplicato $\int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot f(\bar{x}, \bar{y})$ come limite di una serie doppia, conchiudere

$$\text{mod.} \int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot f(\bar{x}, \bar{y}) < \int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \text{mod.} f(\bar{x}, \bar{y}).$$

In seguito per mezzo di una simile serie doppia e coll'estensione del processo analitico tenuto al principio della Nota precedente si trova pure

$$\int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \text{mod.} f(\bar{x}, \bar{y}) < (2\pi)^2 \Lambda f(\bar{x}, \bar{y});$$

le quali due ultime formole danno la dimostrazione della formola (ρ) pel caso di due variabili. Passando a quello di tre variabili bisognerà nei due luoghi analoghi far uso di serie triple aventi integrali triplicati per limiti: il che complica assai più il calcolo, ma non lo muta nella sostanza. Anzi l'osservazione che l'estendere le formole (γ), (θ) al caso di due e tre variabili non porta mutazione intrinseca all'indole di quell'analisi, permette di concludere la formola (ρ) in generale.

Queste cose premesse, facciamo attenzione che la formola (6) del nostro testo si estende facilmente al caso di due e più variabili. Cominciando da due, se y riguardisi dapprima come una costante, quella (6) dà

$$f(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{x} - x} f(\bar{x}, y);$$

ma la stessa (6) ove adesso riguardisi come costante la $\bar{x}$, somministra

$$f(\bar{x}, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \frac{\bar{y}}{\bar{y} - y} f(\bar{x}, \bar{y}),$$

la quale sostituita nella precedente la riduce

$$f(x, y) = \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \frac{\bar{x}}{\bar{x} - x} \cdot \frac{\bar{y}}{\bar{y} - y} f(\bar{x}, \bar{y})$$

formola osservabile per la trasformazione di una funzione a due variabili.

Lo stesso metodo ci guida facilmente a conchiudere in generale

$$(\sigma)\qquad f(x, y, z---)=\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{-\pi}^{\pi}dp\int_{-\pi}^{\pi}dq\int_{-\pi}^{\pi}dr---\frac{\bar{x}}{\bar{x}-x}\cdot\frac{\bar{y}}{\bar{y}-y}\cdot\frac{\bar{z}}{\bar{z}-z}---f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}---)$$

dove m rappresenta come nella (ρ) il numero delle variabili p, q, r - - -.
Osserviamo che per la sussistenza della precedente (σ) si esige che $f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}---)$ non diventi infinita per nessuna combinazione di valori delle X, p fra i limiti *zero*, X; $-\pi$, π: per nessuna combinazione di valori delle Y, q fra i limiti *zero*, Y; $-\pi$, π: per nessuna dei valori delle Z, r fra i limiti *zero*, Z; $-\pi$, π: ecc. Di più che facendo

$$x=\xi e^{s\sqrt{-1}};\quad y=\eta e^{t\sqrt{-1}};\quad z=\zeta e^{v\sqrt{-1}};\ \text{ecc.}$$

i valori attualmente attribuiti nella (σ) alle X, Y, Z - - - siano rispettivamente maggiori dei moduli ξ, η, ζ - - -.

Se nella (σ) s'immagina sostituito al prodotto $\frac{\bar{x}}{\bar{x}-x}\cdot\frac{\bar{y}}{\bar{y}-y}\cdot\frac{\bar{z}}{\bar{z}-z}$ - - - l'equivalente

$$(\tau)\qquad \left[1+\frac{x}{\bar{x}}+\frac{x^2}{\bar{x}^2}+----+\frac{x^{n-1}}{\bar{x}^{n-1}}+\frac{x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)}\right]\left[1+\frac{y}{\bar{y}}+\frac{y^2}{\bar{y}^2}+---\right.$$
$$\left.+\frac{y^{n'-1}}{\bar{y}^{n'-1}}+\frac{y^{n'}}{\bar{y}^{n'-1}(\bar{y}-y)}\right]\left[1+\frac{z}{\bar{z}}+\frac{z^2}{\bar{z}^2}+----+\frac{z^{n''-1}}{\bar{z}^{n''-1}}+\frac{z^{n''}}{\bar{z}^{n''-1}(\bar{z}-z)}\right]---$$

e s'immaginano eseguite in questo le moltiplicazioni accennate, si riconosce la $f(x, y, z---)$ sviluppabile per una serie ordinata secondo le potenze intere e positive delle x, y, z - - -, i cui coefficienti sono integrali definiti multipli. Così si riconosce

$$\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{-\pi}^{\pi}dp\int_{-\pi}^{\pi}dq\int_{-\pi}^{\pi}dr---\frac{f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}---)}{\bar{x}^n\,\bar{y}^{n'}\,\bar{z}^{n''}---}$$

pel coefficiente di $x^n y^{n'} z^{n''}$ - - - dove n, n', n'' - - - possono avere tutti i valori numeri interi da zero all'infinito positivo. Il modulo di questo termine generale

$$\frac{1}{(2\pi)^m}\int_{-\pi}^{\pi}dp\int_{-\pi}^{\pi}dq\int_{-\pi}^{\pi}dr---\frac{x^n y^{n'} z^{n''}---}{\bar{x}^n\,\bar{y}^{n'}\,\bar{z}^{n''}---}f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}---)$$

si convince per la (ρ) minore della quantità

$$\Lambda\left[\left(\frac{\xi}{X}\right)^n\left(\frac{\eta}{X}\right)^{n'}\left(\frac{\zeta}{X}\right)^{n''}---e^{[n(s-p)+n'(t-q)+n''(v-r)+---]\sqrt{-1}}f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}---)\right]$$

ossia per la (π) minore di

$$(\upsilon)\qquad \left(\frac{\xi}{X}\right)^n\left(\frac{\eta}{X}\right)^{n'}\left(\frac{\zeta}{X}\right)^{n''}---\Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}---):$$

con che si rileva la prima proposizione enunciata dall'Autore nel suo Teorema 2.°

Passando ora all'altra parte di detto teorema relativa al modulo del resto, ci pare prima di tutto necessario fissar bene un'idea chiara di ciò che deve qui intendersi per questo resto; giacchè nell'enunciato del Teorema 2.° non si pronuncia in maniera determinata. Stando però a quanto l'Autore dice nel luogo analogo del precedente estratto, s'intenderebbe qui per resto la somma di tutti quei termini nei quali l'esponente di x è eguale o maggiore di un dato numero n, quello di y eguale o maggiore di un dato numero n', quello di z eguale o maggiore di un dato numero n'', ecc. Se così è, troviamo essenziale avvertire che un tal

senso è totalmente diverso da quello che, nel caso dello sviluppo di una funzione a più variabili, si attribuisce ordinariamente alla parola *resto*, e che dall'Autore stesso è poi adottato subito dopo. Allora sarebbe bensì infinito il numero dei termini di cui quel resto equivarrebbe alla somma, ma anche infinito il numero dei termini che s'intenderebbero ritenuti fuori di quel resto; mentre nel senso ordinario il resto equivale a un numero infinito di termini, e il numero de' termini che si ritengono è finito. A veder ciò chiaramente con un esempio, riflettiamo al caso più semplice dello sviluppo di una funzione a due variabili x, y; se chiamasi resto il complesso dei termini in cui l'esponente di x è eguale o maggiore di 2, e quello di y eguale o maggiore di 5, essi saranno i termini che contengono

$$x^2y^3,\ x^2y^4,\ x^2y^5,\ ---;\ x^3y^3,\ x^3y^4,\ x^3y^5;\ \text{ecc.}$$

di numero infinito. Ma infinito è pure il numero dei termini non compresi in tal complesso, e sono quelli che hanno per fattori

$$1, y, y^2, y^3\ ---;\ x, xy, xy^2, xy^3, ---;\ x^2, x^3, x^4, ---;$$

$$x^2y, x^3y, x^4y, x^5y, ---;\ x^2y^2, x^3y^2, x^4y^2, x^5y^2\ ---;$$

cinque serie che vanno tutte all'infinito.

Cerchiamo l'espressione del resto in questo primo senso particolare, che non ci pare possa venir utile nelle applicazioni: e riflettendo alla formola (σ), e al prodotto (τ) capiremo che è

$$(\varphi)\qquad \frac{1}{(2\pi)^m}\int_{-\pi}^{\pi}dp\int_{-\pi}^{\pi}dq\int_{-\pi}^{\pi}dr\ ---\ \frac{x^n y^{n'} z^{n''}\ ---}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)\bar{y}^{n'-1}(\bar{y}-y)\bar{z}^{n''-1}(\bar{z}-z)\ ---}f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, ---).$$

Da quanto si è detto nella Nota precedente si comprende che le frazioni

$$\frac{x^n}{\bar{x}^{n-1}(\bar{x}-x)};\ \frac{y^{n'}}{\bar{y}^{n'-1}(\bar{y}-y)};\ \frac{z^{n''}}{\bar{z}^{n''-1}(\bar{z}-z)};\ \text{ecc.}$$

possono ridursi rispettivamente alle espressioni equivalenti

$$\frac{\xi^n}{X^{n-1}D}e^{[n(s-p)+a]\sqrt{-1}};\ \frac{\eta^{n'}}{Y^{n'-1}D'}e^{[n'(t-q)+a']\sqrt{-1}};\ \frac{\zeta^{n''}}{Z^{n''-1}D''}e^{[n''(\nu-r)+a'']\sqrt{-1}};\ ---$$

essendo

$$a=\text{Arc.tan.}\frac{\xi\sin.(s-p)}{X-\xi\cos.(s-p)};\ a'=\text{Arc.tan.}\frac{\eta\sin.(t-q)}{Y-\eta\cos.(t-q)};\ a''=\text{Arc.tan.}\frac{\zeta\sin.(\nu-r)}{Z-\zeta\cos.(\nu-r)};\ ---$$

$$(\varkappa)\quad D=\sqrt{X^2-2X\xi\cos.(s-p)+\xi^2};\ D'=\sqrt{Y^2-2Y\eta\cos.(t-q)+\eta^2};\ D''=\sqrt{Z^2-2Z\zeta\cos.(\nu-r)+\zeta^2};\ ---$$

quindi il modulo dell'integrale multiplo (φ) si dimostra per la (ρ) minore della quantità

$$\Lambda\left[\frac{\xi^n\eta^{n'}\zeta^{n''}\ ---}{X^{n-1}Y^{n'-1}Z^{n''-1}\ ---}\cdot\frac{e^{k\sqrt{-1}}}{DD'D''\ ---}f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, ---)\right]$$

avendo posto per abbreviare

$$k=n(s-p)+n'(t-q)+n''(\nu-r)\ ---+a+a'+a''\ ---;$$

ossia, per la (π), minore della quantità

$$(\psi)\qquad \frac{\xi^n\eta^{n'}\zeta^{n''}\ ---}{X^{n-1}Y^{n'-1}Z^{n''-1}\ ---}\Lambda\left[\frac{f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, ---)}{DD'D''\ ---}\right];$$

e siccome è sempre

$$DD'D''\ ---\ >(X-\xi)(Y-\eta)(Z-\zeta)\ ---$$

il modulo di (φ) si prova a più forte ragione minore di

$$(\omega) \qquad \frac{\xi^n \eta^{n'} \zeta^{n''} - - -}{X^{n-1}(X-\xi)\, Y^{n'-1}(Y-\eta)\, Z^{n''-1}(Z-\zeta) - - -} \Lambda f(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, - - -)$$

espressione del limite del modulo del resto quale è descritta in parole nel corrispondente luogo del precedente estratto.

Siegue nel testo l'esposizione del metodo con cui nello sviluppo di una funzione a più variabili si giunge a ottenere l'espressione del resto preso nel senso universalmente ricevuto, cioè di una quantità equivalente a tutti i termini nei quali la somma degli esponenti delle variabili è maggiore di un dato numero. L'Autore vi riesce mediante il seguente artificio. Si cominci dall'ovvia osservazione che la $f(x, y, z, - - -)$ eguaglia la $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, - - -)$ ove facciasi $\alpha = 1$. Poi si rifletta che questa $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, - - -)$, mentre α lasciasi indeterminata, può svilupparsi secondo le potenze ascendenti di α in due diverse maniere. La prima colla formola (σ) come una funzione a più variabili ove $\alpha x, \alpha y, \alpha z - - -$ stanno per $x, y, z - - -$. Si vede chiaramente che un tale sviluppo non può differire da quello ottenuto colla (σ) se non in quanto i termini sono moltiplicati per potenze di α; così il termine che in quello aveva il fattore $x^n y^{n'} z^{n''} - - -$ avrà in vece il fattore $\alpha^{n+n'+n''+- - -} x^n y^{n'} z^{n''} - - -$, essendone lo stesso il coefficiente. E ponendo [equaz. (18) del testo] $n + n' + n'' + - - - = h$, si capirà che di questi termini contenenti la potenza (h) *esima* di α non ve ne sarà un solo ma tanti quanti diversi modi vi saranno di soddisfare a tale equazione (18) dando alle $n, n', n'' - - -$ valori numeri interi da zero inclusivamente ad h inclusivamente. L'altra maniera di sviluppare $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z - - -)$ si è di considerarla come funzione di α a cui poi si sostituisce $\bar{\alpha} = A e^{u\sqrt{-1}}$. Per le cose discorse nel caso dello sviluppo ad una sola variabile [vedi anche Nota III.ª equazione (ζ)] il termine contenente la potenza (h) *esima* di α sarà uno solo, cioè

$$\frac{\alpha^h}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} du \cdot \frac{f(\bar{\alpha} x, \bar{\alpha} y, \bar{\alpha} z - - -)}{\bar{\alpha}^h};$$

e questo confrontando i due sviluppi della stessa quantità, dovrà equivalere alla somma di tutti quei termini del primo sviluppo in cui α è alla potenza (h) *esima*. Quindi facendo $\alpha = 1$ si giunge a conchiudere che l'espressione

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} du \cdot \frac{f(\bar{\alpha} x, \bar{\alpha} y, \bar{\alpha} z - - -)}{\bar{\alpha}^h}$$

equivarrà alla somma di tutti quei termini che nello sviluppo della (σ) hanno la somma $n + n' + n'' + - - -$ degli esponenti delle variabili eguale ad h.

Quanto ai resti il ragionamento va di pari passo: tutti i termini che nel primo sviluppo di $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z - - -)$ hanno potenze di α eguali o superiori alla (h) *esima*, e che sono queglino stessi per cui la somma degli esponenti delle variabili $x, y, z - - -$

$$n + n' + n'' + - - - \geqq h,$$

dovranno equivalere a tutti i termini dell'altro sviluppo nei quali l'esponente di α è eguale o superiore ad h: e di questi la somma è nota, cioè

$$\frac{\alpha^h}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} du \cdot \frac{f(\bar{\alpha} x, \bar{\alpha} y, \bar{\alpha} z - - -)}{\bar{\alpha}^{h-1}(\bar{\alpha} - \alpha)}.$$

Se ora facciasi $\alpha = 1$, si viene a capire che l'espressione

$$(\alpha') \qquad \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} du \cdot \frac{f(\bar{\alpha} x, \bar{\alpha} y, \bar{\alpha} z - - -)}{\bar{\alpha}^{h-1}(\bar{\alpha} - 1)}$$

equivale a tutti i termini che nello sviluppo della (σ) hanno la somma degli esponenti delle variabili eguale o maggiore di h ossia al suo resto preso nel senso ordinario. Ma per la formola (σ) (Nota precedente) il modulo del presente integrale (α') si riconosce minore di

$$(\mathcal{E}') \qquad \frac{1}{A^{h-1}(A-1)} \Lambda f(\bar{\alpha}x, \bar{\alpha}y, \bar{\alpha}z \text{ - - -})$$

dove la notazione Λ esprime il massimo del modulo di

$$f(Axe^{u\sqrt{-1}},\ Aye^{u\sqrt{-1}},\ Aze^{u\sqrt{-1}}, \text{ - - -})$$

ottenuto mediante la variabilità di u; adunque il modulo del resto della serie ottenuta svolgendo il secondo membro della (σ) e avendo scritti i soli termini pei quali la somma degli esponenti delle variabili è minore di h, è provato minore della precedente quantità ($\mathcal{E}'$) che è la (19) del testo.

Per una verificazione, è chiaro che quando $y = z =$ ecc. $= 0$, lo sviluppo di $f(x, 0, 0, \text{ - - -})$ conterrà i soli termini colle potenze di x, quindi il modulo del resto dall'(h)*esimo* innanzi sarà per la formola (σ) minore di

$$\frac{\xi^h}{X^{h-1}(X-\xi)} \Lambda f(Xe^{p\sqrt{-1}}, 0, 0, \text{ - - -});$$

colla precedente ($\mathcal{E}'$) esso si prova minore di

$$\frac{1}{A^{h-1}(A-1)} \Lambda f(A\xi e^{(u+s)\sqrt{-1}}, 0, 0, \text{ - - -})$$

quantità eguale all'anzi scritta, perchè riuscendo dal confronto $A\xi = X$, anche il coefficiente della seconda si muta in quello della prima. Osserviamo che la condizione $A > 1$ è mantenuta, essendo $A = \frac{X}{\xi}$, e per supposizione $X > \xi$.

In questo caso è $A = \frac{X}{\xi}$, ma nel caso generale bisogna che A, essendo > 1, sia però minore di ciascuno dei rapporti $\frac{X}{\xi}$, $\frac{Y}{\eta}$, $\frac{Z}{\zeta}$, - - - o al più eguale ad uno di essi, e minore di tutti gli altri. La ragione si è che se A sorpassasse alcuno di tali rapporti, per esempio $\frac{Y}{\eta}$, allora nella

$$f(A\xi e^{(u+s)\sqrt{-1}},\ A\eta e^{(u+t)\sqrt{-1}},\ A\zeta e^{(u+v)\sqrt{-1}}, \text{ - - -}),$$

la quale è una funzione che trovasi nelle stesse circostanze della

$$f\left(Xe^{p\sqrt{-1}},\ Ye^{q\sqrt{-1}},\ Ze^{r\sqrt{-1}}, \text{ - - -}\right),$$

il modulo $A\eta$ sarebbe maggiore di Y, passerebbe cioè al di là del limite per cui la funzione rimane finita e continua. Tutto ciò ritenendo che X, Y, Z - - - siano quegli ultimi valori al di là dei quali la funzione cessa d'essere continua: perchè se fossero valori più piccoli di tali limiti, quanto qui si è detto patirebbe eccezione. Ci verrà in seguito utile l'osservazione ora fatta.

Quando invece di $f(\alpha x, \alpha y, \alpha z, \text{ - - -})$, si prende $f(\alpha^k x, \alpha^{k'} y, \alpha^{k''} z, \text{ - - -})$, debbonsi egualmente considerare le due maniere di sviluppo secondo le potenze ascendenti di α. Nella prima fatta colla (σ), il termine che nello sviluppo della stessa (σ) conteneva $x^n y^{n'} z^{n''}$ - - - diventa invece $\alpha^{kn+k'n'+k''n''+\text{ - - -}} x^n y^{n'} z^{n''}$ - - -, non essendovi alcuna differenza nel coefficiente. Essendo poi $kn + k'n' + k''n'' + \text{ - - -} = h$ [formola (16) del testo], il termine colla potenza (h)*esima* di α in quel primo sviluppo non sarà uno solo, ma ve ne saranno tanti quante sono le maniere di ridurre $kn + k'n' + k''n'' + \text{ - - -}$ eguale ad h, tenendovi fissi i numeri interi k, k', k'' - - - assunti arbitrarii in origine, e variando dopo zero d'uno in altro numero

intero le n, n', n'' - - -. Il termine poi corrispondente nel secondo sviluppo sarà uno solo, cioè

$$\frac{\alpha^h}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} du \cdot \frac{f(\bar{\alpha}^k x, \bar{\alpha}^{k'} y, \bar{\alpha}^{k''} z, - - -)}{\bar{\alpha}^h}.$$

Quanto ai resti, si troverà egualmente sotto forma monomia la quantità equivalente a tutti i termini del primo sviluppo in cui le potenze di α sono eguali o maggiori di h, e quindi, fatta $\alpha = 1$, si proverà che

$$(\gamma') \qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} du \cdot \frac{f(\bar{\alpha}^k x, \bar{\alpha}^{k'} y, \bar{\alpha}^{k''} z, - - -)}{\bar{\alpha}^{h-1}(\bar{\alpha}-1)}$$

equivale alla somma di tutti gl'infiniti termini che nello sviluppo di $f(x, y, z$ - - -) hanno gli esponenti delle x, y, z - - - tali da soddisfare alla (16). Un tal resto è generalmente ben diverso dal primo (α') riferendosi anche a termini che in quello non sono compresi: e ad esso si riduce quando tutte le k, k', k'' - - - si fanno eguali all'unità. Se cerchisi poi mediante la formola (o) [Nota precedente] la quantità di cui è minore il modulo di un tal resto (γ'), si troverà la (17) dell'Autore, ritenendo d'interpretare la notazione A per una sola variabile u come si è detto relativamente alla (β').

VII.[A]

pag. 14. *Così, per esempio,* - - -

Si trovano qui gli esempj di cui dicemmo al principio della Nota V.[a] per la determinazione delle A in diversi casi particolari: è bene che il lettore vi si eserciti a fine di famigliarizzarsi col nuovo calcolo. Ecco qualche schiarimento. Le (21) suppongono alcune equazioni intermedie saltate dall'Autore per brevità, cioè le

$$\text{mod.}(a+\bar{x}) = \sqrt{X^2 + 2aX\cos.p + a^2}\,; \quad \text{mod.}(a-\bar{x}) = \sqrt{X^2 - 2aX\cos.p + a^2}$$

$$(\delta') \qquad \text{mod.}\, a\bar{x} = aX; \quad \text{mod.}\, \frac{a}{\bar{x}} = \frac{a}{X}$$

$$\text{mod.}\, a^{\bar{x}} = a^{X\cos.p}; \quad \text{mod.}\, a^{-\bar{x}} = a^{-x\cos.p}; \quad \text{mod.}\, a^{\bar{x}\sqrt{-1}} = a^{-X\sin.p}; \quad \text{mod.}\, a^{-\bar{x}\sqrt{-1}} = a^{X\sin.p};$$

queste sono di facile ritrovamento: avvertiremo per le ultime quattro la sostituzione che si fa negli esponenti, di $\cos.p + \sqrt{-1}\sin.p$ in luogo di $e^{p\sqrt{-1}}$.

Si possono portare al massimo i secondi membri delle precedenti equazioni usando il metodo ordinario indicato nella Nota V.[a]; ma anche senza di esso si vede subito che il primo giunge al massimo per $p = 0$, il secondo per $p = \pi$, il quinto per $p = 0$, il sesto per $p = \pi$, il settimo per $p = -\frac{\pi}{2}$, e l'ottavo per $p = \frac{\pi}{2}$. Quindi i risultati (21), dei quali i quattro penultimi sono compresi nei quattro ultimi.

Le (22) suppongono le quattro

$$(\varepsilon') \qquad \begin{aligned} &\text{mod.}(1+\bar{x})^a = (1+2X\cos.p+X^2)^{\frac{a}{2}}; \quad &&\text{mod.}(1-\bar{x})^a = (1-2X\cos.p+X^2)^{\frac{a}{2}} \\ &\text{mod.}(1+\bar{x})^{-a} = (1+2X\cos.p+X^2)^{-\frac{a}{2}}; \quad &&\text{mod.}(1-\bar{x})^{-a} = (1-2X\cos.p+X^2)^{-\frac{a}{2}}, \end{aligned}$$

la prima delle quali si dimostra ponendo

$$\left(1 + Xe^{p\sqrt{-1}}\right)^a = Ye^{q\sqrt{-1}};$$

questa riducesi

$$1 + Xe^{p\sqrt{-1}} = Y^{\frac{1}{a}} e^{\frac{q}{a}\sqrt{-1}}$$

ossia

$$1 + X\cos.p + X\sin.p\sqrt{-1} = Y^{\frac{1}{a}}\cos.\frac{q}{a} + Y^{\frac{1}{a}}\sin.\frac{q}{a}\sqrt{-1}.$$

Pel confronto fatto a parte dei termini reali e degli immaginarii si deducono da quest'ultima due equazioni che quadrate e sommate somministrano

$$Y^{\frac{2}{a}} = 1 + 2X\cos.p + X^2$$

la quale innalzata ne' suoi due membri alla potenza $\frac{a}{2}$ diventa la prima delle (ε'). La seconda delle (ε') si ha collo stesso calcolo: le altre due si hanno dalle due precedenti, fatta a negativa. È facile vedere senza prender penna che delle funzioni di p secondi membri delle (ε') la prima ottiene il massimo per $p=0$, la seconda per $p=\pi$, la terza per $p=\pi$, e la quarta per $p=0$.

L'Autore mette la condizione $X<1$, perchè altrimenti il valore comune alle ultime fra le (22) per a numero intero dispari diverrebbe quantità negativa contro la nozione primieramente stabilita. Vedremo fra poco come egli fa in simili casi, e come mediante il suo modo di scrivere ivi adottato potrebbe evitarsi di mettere l'accennata condizione.

Per avere mod. sin. $\bar{x}$ osservisi essere

$$\begin{aligned}\sin.\bar{x} &= \sin.(X\cos.p + X\sin.p\sqrt{-1})\\ &= \sin.(X\cos.p)\cos.(X\sin.p\sqrt{-1}) + \cos.(X\cos.p)\sin.(X\sin.p\sqrt{-1})\\ &= \frac{1}{2}\sin.(X\cos.p)\left(e^{X\sin.p} + e^{-X\sin.p}\right) + \frac{1}{2}\cos.(X\cos.p)\left(e^{X\sin.p} - e^{-X\sin.p}\right)\sqrt{-1}\,;\end{aligned}$$

quindi ponendo

$$\sin.\bar{x} = Ye^{q\sqrt{-1}} = Y\cos.q + Y\sin.q\sqrt{-1}\,,$$

il confronto delle due espressioni di sin. $\bar{x}$ dà due equazioni che quadrate e sommate somministrano

$$4Y^2 = e^{2X\sin.p} + e^{-2X\sin.p} + 2\left[\sin.^2(X\cos.p) - \cos.^2(X\cos.p)\right]$$

ossia

$$(\zeta') \qquad \text{mod.}^2\sin.\bar{x} = \frac{1}{4}\left[e^{2X\sin.p} + e^{-2X\sin.p} - 2\cos.\left(2X\cos.p\right)\right].$$

Una quantità avendo il suo massimo quando l'ha il suo quadrato, invece di cercare il massimo di mod. sin. $\bar{x}$ potremo per facilitare il calcolo cercare il massimo del secondo membro della (ζ') ossia ΛY^2. Non essendo qui facile vedere la soluzione a colpo d'occhio useremo il metodo generale indicato al principio della Nota V.ª Abbiamo per la (ζ')

$$\frac{dY^2}{dp} = \frac{1}{2}X\cos.p\left(e^{2X\sin.p} - e^{-2X\sin.p}\right) - X\sin.p\sin.(2X\cos.p)$$

$$(\eta') \qquad \begin{aligned}\frac{d^2Y^2}{dp^2} = {}& X^2\cos.^2p\left(e^{2X\sin.p} + e^{-2X\sin.p}\right) - \frac{1}{2}X\sin.p\left(e^{2X\sin.p} - e^{-2X\sin.p}\right)\\ & - X\cos.p\sin.(2X\cos.p) + 2X^2\sin.^2p\cos.(2X\cos.p).\end{aligned}$$

L'equazione da cui cavare il valore di p è

$$\cos.p\left(e^{2X\sin.p} - e^{-2X\sin.p}\right) - 2\sin.p\sin.(2X\cos.p) = 0$$

e questa ha infinite radici distribuibili in due classi

$$p = k\pi\,, \quad p = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

dando a k qualunque valore numero intero. Quelle della classe prima conducono tutte al minimo, perchè facendo $p=k\pi$ nella (η') si cava per $\frac{d^2Y^2}{dp^2}$ il valore

$$X(2X - \sin.2X)$$

sempre positivo. Questo valore del minimo risulta per la (ζ') sin.^2X, e quindi il valor minimo

del modulo di $\sin.\overline{x}$ è $\sin.X$, che ci sarà utile in seguito. Le radici che inducono il massimo sono quelle della classe seconda, perchè facendo $p = k\pi + \frac{\pi}{2}$ nella (η'), il secondo membro diventa

$$-\frac{1}{2}X\left(e^{2X} - e^{-2X}\right) + 2X^2 = -\frac{4}{3}X^4 - \text{ecc.}$$

quantità tutta negativa. Allora la (ζ') dà

$$\Lambda\, Y^2 = \frac{1}{4}\left(e^X - e^{-X}\right)^2$$

e in conseguenza la prima delle (23). È notabile lo sparire dell' indeterminata k tanto nei criterii quanto nei risultati. La seconda delle (23) dimostrasi dietro una traccia di calcolo affatto simile all' esposta.

Per dimostrare le (24) bisogna mettere la formola

$$(\vartheta') \qquad \Lambda\left[f(\overline{x}) \pm \phi(\overline{x})\right] < \Lambda f(\overline{x}) + \Lambda\, \phi(\overline{x})$$

la quale è pronta conseguenza della

$$\text{mod.}\left[f(\overline{x}) \pm \phi(\overline{x})\right] < \text{mod.}\, f(\overline{x}) + \text{mod.}\, \phi(\overline{x})\,;$$

questa si prova come il Teorema 1.° della Nota I.ª, e si noti che è vera quando nel primo membro ha luogo il segno $+$, e lo è a più forte ragione quando vi si prende il segno $-$. Ora colla (ϑ') e colla (η) della Nota V.ª si ha

$$\Lambda \sin.(a \pm \overline{x}) < \sin.a\, \Lambda \cos.\overline{x} + \cos.a\, \Lambda \sin.\overline{x}$$

da cui per le (23) la prima delle (24). L' Autore mette *eguale* o *minore* invece di *minore* per includere il caso di $a = 0$; mette $\sqrt{\cos.^2 a}$, $\sqrt{\sin.^2 a}$ invece di $\cos.a$, $\sin.a$, perchè queste seconde espressioni possono con certi valori di a divenir negative, e qui s' intende che si debbano sempre prendere positivamente quali appunto sono le quantità $\sqrt{\cos.^2 a}$, $\sqrt{\sin.^2 a}$ dopo la convenzione di prendere i radicali positivamente. Con questo modo di scrivere ponendo nelle (22) $\sqrt{(1-X)^2}$ invece di $1-X$ si poteva, come si è già accennato, togliere la condizione $X < 1$.

La prima delle (25) si prova come la precedente (ϑ') essendo manifesto che quel ragionamento sussiste egualmente quando le funzioni sono a più variabili. L' Autore pone qui pure $\overline{\overline{<}}$ invece di $<$ a fine d' includere alcuni casi particolari, per esempio quello di tutte le $\overline{u}$, $\overline{v}$, $\overline{w}$ - - - fra di loro eguali. Dicasi lo stesso della seguente la quale si riconosce vera colla semplice osservazione che un prodotto è portato al suo massimo quando è reso massimo in particolare ciascuno de' suoi fattori: ma il prodotto dei massimi può sorpassare il massimo del prodotto, perchè le variabili che per ciascuno dei fattori resi massimi possono prendere valori diversi, non prendono che un valore per ciascuna quando si cerca il massimo del prodotto.

Quanto alla (26) essa è prontamente dimostrata se riflettasi che fatta $\overline{u} = A + B\sqrt{-1}$, è

$$\text{mod.}\, e^{\overline{u}\sqrt{-1}} = e^{-B}\,; \quad 2\,\text{mod.}\cos.\overline{u} = \sqrt{e^{2B} + e^{-2B} + 2\cos.2A}.$$

Chi ha ben inteso tutto il fin qui detto non troverà difficoltà in quanto l' Autore soggiunge circa i valori minimi dei moduli di diverse funzioni. Pensando alle (δ'), (ε') è facile scorgere i valori di p che ne rendono minimi i secondi membri, e concludere le (27), (28). Della prima delle (29) si è già detto, e il discorso vale anche per la seconda: la (30) abbisogna dello stesso ragionamento qui sopra riferito per la seconda delle (25). Le (31), (32) sono formole la cui verità è persuasa, per poco che vi si ponga attenzione, dal solo raziocinio senza bisogno di calcolo.

VIII.A

pag. 17. *Per mostrare un'applicazione* - - -

A capire quanto è detto del valore di X che induce il minimo nella prima espressione delle (37), osservisi che la derivata prima di $\frac{e^X}{X^n}$ presa per X è $e^X \cdot \frac{X-n}{X^{n+1}}$ la quale si annulla per $X=n$, e la derivata seconda

$$e^X \cdot \frac{(X-n)\left(1-\frac{n+1}{X}\right)+1}{X^{n+1}}$$

che per $X=n$ è quantità positiva. La prima poi delle (38) avrà il minimo quando avrà il massimo il suo denominatore $X^n(1-X)^a$. Ora di questa la derivata per X può scriversi

$$X^{n-1}(1-X)^{a-1}\left[n-(a+n)X\right]$$

e la derivata seconda

$$X^{n-2}(1-X)^{a-2}\left[n(n-1)(1-X)^2-2anX(1-X)+a(a-1)X^2\right].$$

Delle tre radici, *zero*, 1, $\frac{n}{a+n}$ che annullano la derivata prima, l'ultima sola rende la derivata seconda quantità negativa; le due prime la rendono positiva essendo $n>1$, $a>1$ condizioni volute dalla stessa loro sussistenza.

Ci sembra qui necessaria una osservazione. La quantità che interessa di render minima non è tanto il limite del modulo del termine generale, ma piuttosto il limite del modulo del resto. Però i valori di X inducenti il minimo [anche in correlazione a ciò che è detto più sopra] non si dovrebbero cercare dietro le prime formole delle (37), (38), ma dietro le seconde. Allora essi risultano rispettivamente

$$X=\frac{1}{2}\left[n+\xi+\sqrt{(n-\xi)^2+4\xi}\right]$$

$$X=\frac{1}{2}\left\{\xi+\frac{n-\xi}{a+n}+\sqrt{\left(\xi+\frac{n-\xi}{a+n}\right)^2-\frac{4\xi(n-1)}{a+n}}\right\}$$

che sostituiti nelle (37), (38) danno espressioni assai diverse dalle (39), (40).

Giova anche osservare che la X nelle espressioni ridotte dall'Autore ai suoi moduli principali è una variabile ristretta fra certi limiti, dovendo da una parte essere maggiore di ξ, e dall'altra minore di quel valore che renderebbe la funzione discontinua. Quando pertanto il valore, che per X si cava col solito metodo come quello che induce il minimo nella funzione, non fosse compreso fra gl'indicati limiti, non sarebbe in quel caso assegnabile il modulo principale, e bisognerebbe accontentarsi di altro con un valore di X compreso fra i limiti medesimi.

Ecco qualche schiarimento circa a quanto si dice nel testo per $\Lambda\frac{f(\bar{x})}{F(\bar{x})}$. Essendo $F(x)$ funzione intera di x, si potrà sempre mettere sotto la forma

$$F(x)=C\left(x-\rho e^{r\sqrt{-1}}\right)\left(x-\rho' e^{r'\sqrt{-1}}\right)\left(x-\rho'' e^{r''\sqrt{-1}}\right)---$$

dove C è una costante che non contiene x. Essa si determina osservando che

$$F(0)=\pm C\rho\rho'\rho''---e^{(r+r'+r''+\cdots)\sqrt{-1}}$$

da cui

$$\text{mod.}\,F(0)=K=C\rho\rho'\rho''---;$$

il valore di C cavato da quest'ultima ci presenta

$$F(x)=\frac{K}{\rho\rho'\rho''---}(x-\rho e^{r\sqrt{-1}})(x-\rho' e^{r'\sqrt{-1}})(x-\rho'' e^{r''\sqrt{-1}})---.$$

Viene così

$$(\lambda') \qquad \Lambda\frac{f(\bar{x})}{F(\bar{x})}=\frac{\rho\rho'\rho''---}{K}\Lambda\frac{f(\bar{x})}{(\bar{x}-\rho e^{r\sqrt{-1}})(\bar{x}-\rho' e^{r'\sqrt{-1}})(\bar{x}-\rho'' e^{r''\sqrt{-1}})---}.$$

Chiamisi per un momento D il denominatore di quest' ultima espressione, avremo per la prima delle (31)

$$(\mu') \qquad \Lambda\frac{f(\bar{x})}{D}\overset{=}{<}\frac{\Lambda f(\bar{x})}{\Lambda' D}.$$

Ora per la (30)

$$\Lambda' D\overset{=}{>}\Lambda'(\bar{x}-\rho e^{r\sqrt{-1}})\Lambda'(\bar{x}-\rho' e^{r'\sqrt{-1}})\Lambda'(\bar{x}-\rho'' e^{r''\sqrt{-1}})---,$$

e siccome

$$\text{mod.}(\bar{x}-\rho e^{r\sqrt{-1}})=\sqrt{X^2-2\rho X\cos.(p-r)+\rho^2}$$

e quindi

$$\Lambda'(\bar{x}-\rho e^{r\sqrt{-1}})=\rho-X:$$

e lo stesso di tutte le quantità analoghe; avremo

$$\Lambda' D\overset{=}{>}(\rho-X)(\rho'-X)(\rho''-X)---.$$

Ciò posto, abbiamo dalla (μ') a più forte ragione

$$\Lambda\frac{f(\bar{x})}{D}\overset{=}{<}\frac{\Lambda f(\bar{x})}{(\rho-X)(\rho'-X)(\rho''-X)---}$$

per cui la (λ') si muta nell'espressione del testo.

I due valori di X che rendono massimi i valori $X^{n-1}(\rho-X)$; $(X-\xi)(\rho-X)$ sono rispettivamente

$$\frac{n-1}{n}\rho\,;\quad \frac{1}{2}(\rho+\xi)$$

e si trovano col solito metodo e dietro l'esame del solito criterio.

Quanto in seguito si asserisce del doversi aver di mira anche le radici dell'equazione $f(x)=0$, allorchè si tratta di svolgere in serie la funzione $\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^a$, si capirà senza difficoltà riflettendo che se a è negativa, per tutto ciò che riguarda i casi in cui la funzione diventa infinita, viene la $f(x)$ a cambiar di posto colla $F(x)$. Quando poi è a positiva e fratta, se non si tiene il modulo di x al di sotto del più piccolo modulo delle radici di $f(x)=0$, può $f(x)$ divenire negativa, e il valore della funzione farsi immaginario.

Qui l'Autore si limita ad esporre la condizione perchè sia legittimo lo svolgimento della $\left(\frac{f(x)}{F(x)}\right)^a$ in serie, e non assegna in generale, come nel caso di $a=1$, una quantità di cui $\Lambda\left(\frac{f(\bar{x})}{F(\bar{x})}\right)^a$ debba essere minore od eguale. Dà però un esempio di questa ricerca in un caso particolare. Osservisi essere

$$1-2\bar{x}\cos.\vartheta+\bar{x}^2=(1-Xe^{(p-\vartheta)\sqrt{-1}})(1-Xe^{(p+\vartheta)\sqrt{-1}})$$

e avremo per la seconda delle (25)

$$\Lambda(1-2\bar{x}\cos.\vartheta+\bar{x}^2)^{-a}\overset{=}{<}\Lambda(1-Xe^{(p-\vartheta)\sqrt{-1}})^{-a}\Lambda(1-Xe^{(p+\vartheta)\sqrt{-1}})^{-a}.$$

Questi due fattori si provano, per la quarta delle (22), eguali ciascuno ad $(1-X)^{-a}$, non facendo difficoltà [rivedi il calcolo dato per quel luogo] che siavi $p-\vartheta$, $p+\vartheta$ in luogo di p. Il resto è chiaro: però noteremo soltanto che i due valori di X inducenti il massimo nei prodotti

$$X^{n-1}(1-X)^{2a}\ ;\quad (X-\xi)(1-X)^{2a}$$

sono rispettivamente

$$X=\frac{n-1}{n-1+2a}\ ;\quad X=\frac{1+2a\xi}{1+2a}\ .$$

Il primo riduce $\frac{\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)(1-X)^{2a}}$ come sul testo; ma il secondo dà un valore che ha il fattore $(1-\xi)^{2a+1}$ nel denominatore, e non nel numeratore: le altre parti essendo come le dà l'Autore.

IX.[A]

pag. 20. *Prima di passare* - - -

L'Autore comincia da questo luogo della sua memoria a far uso di alcune formole prese dal suo calcolo dei residui. Già dicemmo nel primo tomo dei presenti Opuscoli essere nostro pensiero d'inserirvi qualche articolo intorno a questo nuovo calcolo per facilitarne l'intelligenza a chi non lo ha di già studiato nelle memorie originali. Ciò però non essendo ancora fatto, nè potendo farsi in questo luogo per non essere impresa da sbrigarsi brevemente, ci limiteremo qui a spiegare il solo significato della nuova notazione mediante altre espressioni di cui si hanno idee chiare. Così potrà intendersi il senso delle diverse formole espresse coi residui, anche fino al punto di poterne far uso; siccome però le formole stesse non vengono per tal modo dimostrate, sarà nostra cura nelle seguenti Note dedurre da altri principj tutti i risultati di questa memoria che l'Autore cava dal calcolo dei residui [il che, come vedremo, è in parte stato fatto da lui stesso]: affinchè possa la medesima considerarsi come ridotta indipendente da un tal calcolo.

Essendo $f(x)$ una funzione qualsivoglia di x, l'equazione

$$(\nu')\qquad \frac{1}{f(x)}=0$$

abbia m radici eguali ad a, n radici eguali a b, p radici eguali a c ecc.; pongansi le denominazioni

$$(\xi')\qquad f_1(x)=f(x)(x-a)^m\ ;\ \ f_2(x)=f(x)(x-b)^n\ ;\ \ f_3(x)=f(x)(x-c)^p\ ;\ \text{ecc.}$$

che saranno tante quante le radici diseguali della (ν'). Si consideri ora la somma

$$(o')\qquad \frac{1}{\Gamma(m)}f_1(x)_a^{(m-1)}+\frac{1}{\Gamma(n)}f_2(x)_b^{(n-1)}+\frac{1}{\Gamma(p)}f_3(x)_c^{(p-1)}+\text{ecc.}$$

di tanti termini quanto è il numero delle $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, ecc. Il significato del primo di tali termini [dicasi similmente degli altri] è il seguente; $f_1(x)_a^{(m-1)}$ vuol dire la derivata $(m-1)$ *esima* di $f_1(x)$ presa per x, fattavi ad operazioni eseguite $x=a$: essa è poi divisa per $\Gamma(m)$, cioè quando $m>1$ per $1\cdot2\cdot3$ - - - $(m-1)$ (*), e quando $m=1$ per 1 (**): la m essendo qui di sua natura numero intero e positivo.

La precedente somma (o') a costituire la quale si fanno entrare tutte le radici diseguali della (ν') è quella cui piacque al nostro Autore dare il nome di *residuo integrale*, e che egli indica altrove per

$$\mathcal{E}((f(x))).$$

Non è però la quantità da lui usata in questo luogo, la quale non comprende tutti i termini della somma (o'). A ben capire quali sono i termini esclusi riflettasi, che le radici a, b, c - - - della (ν') saranno il più sovente immaginarie, e quindi [vedi Nota I.ª] per abbracciare tutti i casi bisognerà rappresentarsele sotto la forma $re^{a\sqrt{-1}}$. Restano pertanto esclusi dalla som-

(*) Vedi il Tomo I.° de' nostri Opuscoli pag. 186, formola (i).

(**) Vedi ivi pag. 185, formola (d).

ma (o') tutti i termini corrispondenti a radici i cui moduli superano una data quantità X. La somma degli altri termini corrispondenti a radici che hanno moduli compresi fra *zero*, X, è quella quantità che l'Autore indica per

$$\overset{(X)}{\underset{(o)}{\mathcal{E}}}{}^{(\pi)}_{(-\pi)} ((f(x))).$$

Qualche volta egli circonda di doppia parentesi non tutta la $f(x)$ ma soltanto un suo fattore: per esempio, essendo $f(x) = \phi(x)\chi(x)$, egli scrive

$$\overset{(X)}{\underset{(o)}{\mathcal{E}}}{}^{(\pi)}_{(-\pi)} \phi(x)((\chi(x))),$$

allora vuol dire che nella (ν') e quindi nella (o') egli considera le sole radici provenienti dal fattore $\chi(x)$: stando tutto il resto come sopra.

Bastano per l'oggetto nostro tali indicazioni: così vedremo chiaramente le formole (3), (6) uscire dalla (41). Per la prima, la equazione (ν') è qui

$$\frac{x}{f(x)} = 0$$

di cui una radice è $x = 0$: le altre radici che potessero dedursi dal fattore $\frac{1}{f(x)}$ sono tutte escluse dalla somma (o'). Infatti perchè dovesse usarsi un'altra radice $x = re^{a\sqrt{-1}}$, bisognerebbe che r fosse compresa fra *zero*, X; ma allora la $f(\overline{x})$, che potrebbesi mettere sotto la forma $\frac{\psi(\overline{x})}{(\overline{x} - re^{a\sqrt{-1}})^n}$, diventerebbe infinita per un valore di X compreso fra *zero*, X, contro la condizione di continuità già stabilita per la sussistenza della (3). Adunque, vista la prima delle (ξ'), la somma (o') diventa nel nostro caso fatta del solo primo termine, e per essere $m = 1$, prende il valore $f(0)$: quindi subito dalla (41) la (3).

Per la formola (6): cerchiamo il valore dell'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} dp \cdot \frac{\overline{x} f(\overline{x})}{\overline{x} - y}$ col mezzo della (41) avendo posto y per x a scanso di equivoco. L'equazione (41) è in tal caso

$$\frac{x - y}{f(x)} = 0$$

di cui una radice $x = y$: le altre dovendo essere tutte escluse per la stessa ragione accennata nell'applicazione precedente. Il primo termine della (o'), unico da ritenersi, viene $f(y)$: quindi il valore del proposto integrale è per la (41) $2\pi f(y)$. Rimessa x per y, si ha la formola (6).

Del resto la formola (41) fu data dall'Autore in altra sua opera (*) colla sola differenza che ivi ha l'unità invece del limite più generale X: lo stesso dicasi della seguente (46) (**).

X.A

pag. 20. *Sia ora* y *una funzione implicita* - - -

Supponiamo che il lettore conosca l'indole delle ricerche analitiche intorno allo sviluppo delle funzioni implicite. Per rammentarne l'idea con poche parole, diremo essere tali che si potrebbero ridurre a sviluppi di funzioni esplicite sciogliendo una o più equazioni; ma che siccome quest'ultima operazione è il più delle volte impraticabile, si viene in quelle ad ottenere gli sviluppi ricercati saltando una tale difficoltà, cioè facendo solamente uso delle date forme di funzione che stabiliscono il primo o i primi membri delle equazioni che dovrebbero risolversi, senza effettuarne la risoluzione.

(*) *Exercices de Mathématiques*. T. I. pag. 216, formule (85).
(**) *Ibid* pag. 357, formule (111).

Per la ragione adotta nella Nota precedente noi qui non ci occuperemo della prima dimostrazione che l'Autore dà della formola (49) cavandola dalla considerazione dei residui: e piuttosto insisteremo a chiarirne la seconda. Al quale oggetto è necessario fissar bene una nuova idea qui introdotta intorno a *un limite costante di un modulo variabile.* Si dice che Z deve essere maggiore del modulo di z radice dell'equazione (44): ora Z è una quantità costante indipendente da x variabile semplice dell'equazione (44), come si vedrà necessario per le cose seguenti; e z è una funzione di x, che messa sotto la forma $\xi e^{r\sqrt{-1}}$ avrà il modulo ξ funzione di x e variabile con esso ovvero funzione del modulo variabile di x, se per questa stessa x si scrive $\xi e^{s\sqrt{-1}}$. Tutto ciò è possibile immaginando Z maggiore del massimo valore che può prendere ξ per la variabilità di x o del suo modulo ξ, la quale sarà il più delle volte ristretta fra certi limiti.

Il binomio

$$\frac{\chi(x,\, b+\bar{z})}{f(x,\, b+\bar{z})}\, F(b+\bar{z}) - \frac{F(b+z)}{\bar{z}-z}$$

che può scriversi

$$(\pi') \qquad \frac{(\bar{z}-z)\,\chi(x,\, b+\bar{z})\,F(b+\bar{z}) - f(x,\, b+\bar{z})\,F(b+z)}{(\bar{z}-z)\,f(x,\, b+\bar{z})}$$

diventa $\frac{0}{0}$ per $\bar{z}=z$, perchè quest'ultima z non deve considerarsi quantità semplice, ma la funzione di x che rende identica l'equazione (44).

Il vero valore della frazione (π') si ha colla nota regola. Si notino cogli apici, ove torni comodo, le derivate per $\bar{z}$; le derivate prime per $\bar{z}$ del numeratore e denominatore della (π'), richiamato il significato della forma χ dato dalla (45), saranno rispettivamente

$$\chi(x,\, b+\bar{z})\,[F(b+\bar{z}) - F(b+z)] + (\bar{z}-z)\,[\chi'(x,\, b+\bar{z})\,F(b+\bar{z}) + \chi(x,\, b+\bar{z})\,F'(b+\bar{z})]\,;$$

$$f(x,\, b+\bar{z}) + (\bar{z}-z)\,\chi(x,\, b+\bar{z})\,;$$

e queste sono ancora entrambe zero per $\bar{z}=z$. Conviene dunque discendere alle derivate seconde le quali sono

$$2\chi'(x,\, b+\bar{z})\,F(b+\bar{z}) + 2\chi(x,\, b+\bar{z})\,F'(b+\bar{z}) - \chi'(x,\, b+\bar{z})\,F(b+z)$$
$$+ (\bar{z}-z)\,[\chi'(x,\, b+\bar{z})\,F(b+\bar{z}) + \chi(x,\, b+\bar{z})\,F'(b+\bar{z})]'\,;$$

$$2\chi(x,\, b+\bar{z}) + (\bar{z}-z)\,\chi'(x,\, b+\bar{z})\,;$$

che per $\bar{z}=z$ diventano rispettivamente

$$\chi'(x,\, b+z)\,F(b+z) + 2\chi(x,\, b+z)\,F'(b+z)\,;$$

$$2\chi(x,\, b+z).$$

Dividendo il primo di questi risultati pel secondo si ha il vero valore della (π') come sul testo.

Ciò premesso, si capisce che il prodotto (50) registrato nella memoria è tale che diventa zero per $\bar{z}=0$, e non diventa infinito per nessuna combinazione di valori di Z, q fra *zero*, Z; $-\pi, \pi$; giacchè l'unica combinazione di questi che rende $\bar{z}=z$, fa bensì diventare infinito ciascuno dei due termini del prodotto, ma non già la loro differenza. Stando qui dunque $\bar{z}$ per $\bar{x}$, Z per X, q per p, si riconosce applicabile l'equazione (5), dalla quale, come si vede nel testo, esce la (49).

Noteremo che la (49) poteva scriversi

$$(\rho') \qquad F(y_x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \frac{\bar{y}\,\chi(x,\, \bar{y})}{f(x,\, \bar{y})}\, F(\bar{y})$$

indicando per y_x il valore di y cavato dalla (42), e per $\bar{y}$ l'espressione $Ye^{q\sqrt{-1}}$ essendo Y quantità costante maggiore di mod. y_x. L'Autore esprime per $b+z_x$ la stessa radice che ora abbiamo espressa con y_x: il motivo per cui fa così si comprende nel seguito. Di più: la

formola (ρ') può scriversi più generalmente

$$(\sigma') \qquad F(x, y_x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \frac{\bar{y}\chi(x, \bar{y})}{f(x, \bar{y})} F(x, \bar{y})$$

colla variabile x nella F anche esplicita alla y_x. Si replichi un calcolo similissimo a quello indicato dall'Autore adottando invece del prodotto (50) quest'altro

$$\bar{y}\left\{\frac{\chi(x, \bar{y})}{f(x, \bar{y})} F(x, \bar{y}) - \frac{F(x, y_x)}{\bar{y} - y_x}\right\},$$

e si vedrà che il ragionamento e la conclusione sussistono egualmente. Questa riflessione circa il poter esservi nella F la x esplicita alla y_x o alla $b + z_x$, ci verrà utile in seguito per comprendere un passo della memoria; d'altronde essa estende di moltissimo le applicazioni della formola (ρ') già per se importantissima in analisi. Osservisi che la (6) è un caso particolarissimo della (ρ'), quando l'equazione (42) sia la semplice $x - y = 0$.

La (53) dà l'espressione generale della radice della (42) il cui modulo è minore di Z, di qualunque natura sia questa equazione, per mezzo di un integrale definito: quando si conosca un valore b di y corrispondente ad uno particolare a di x, che spesso si prende zero.

Dalla (ρ') la radice si ha prontamente e senz'altro espressa da

$$(\tau') \qquad y_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \bar{y}^2 \frac{\chi(x, \bar{y})}{f(x, \bar{y})}.$$

XI.ª

pag. 22. *Se l'equazione* (44) - - -

L'equazione (55) può, come accenna anche l'Autore, stabilirsi direttamente senza dipendere dai residui: ed ecco in quale maniera. Invece del prodotto (50) del testo bisogna adottare quest'altro

$$(\nu') \qquad \bar{z}\left\{\frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} F(b+\bar{z}) - \frac{F(y)}{\bar{z} - z} - \frac{F(y_1)}{\bar{z} - z_1} - \frac{F(y_2)}{\bar{z} - z_2} - - - - - \frac{F(y_{m-1})}{\bar{z} - z_{m-1}}\right\}$$

dove le $y, y_1, y_2 - - - y_{m-1}$ stanno per le quantità rispettivamente eguali $b + z$, $b + z_1$, $b + z_2$, - - - $b + z_{m-1}$. Esso è una quantità che rimane finita e continua per tutti i valori di Z fra *zero*, Z; perchè fra questi ve ne sono bensì varii che rendono infiniti due termini di siffatto polinomio [il primo e il secondo, o il primo e il terzo, o il primo e il quarto, ecc.] ma esso complessivamente conserva sempre un valore finito. Così quando $\bar{z} = z$, il valore del polinomio è [rivedi la Nota precedente]

$$z\left\{F'(y) + \frac{1}{2}\frac{\chi'(x, y)}{\chi(x, y)} F(y) - \frac{F(y_1)}{z - z_1} - \frac{F(y_2)}{z - z_2} - - - - - \frac{F(y_{m-1})}{z - z_{m-1}}\right\};$$

quando $\bar{z} = z_1$ è invece

$$z_1\left\{F'(y_1) + \frac{1}{2}\frac{\chi'(x, y_1)}{\chi(x, y_1)} F(y_1) - \frac{F(y)}{z_1 - z} - \frac{F(y_2)}{z_1 - z_2} - - - - - \frac{F(y_{m-1})}{z_1 - z_{m-1}}\right\};$$

e similmente per $\bar{z} = z_2$, $\bar{z} = z_3$, ecc. Pertanto il prodotto (ν') può come il prodotto (50) sostituirsi alla $f(\bar{x})$ nella equazione (5); quindi l'equazione

$$\int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \bar{z}\frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})} F(b+\bar{z}) = F(y)\int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z} - z} + F(y_1)\int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \frac{\bar{z}}{\bar{z} - z_1} + \text{ecc.}$$

In questa tutti gl'integrali che entrano nel secondo membro si provano [rivedi il principio della Nota III.ª] eguali a 2π, giacchè il modulo costante Z di $\bar{z}$ è per supposizione maggiore di tutti i moduli variabili delle z, z_1, z_2, ecc.; e così ne discende subito la (55).

Faremo qui pure osservare che nella F può entrare anche la x esplicita alle y, y_1, y_2 - - - giacchè nel prodotto (ν') scrivendo $F(x, b+\bar{z})$, $F(x, y)$, $F(x, y_1)$, $F(x, y_2)$, ecc. invece di

$F(b+\bar{z})$, $F(y)$, $F(y_1)$, $F(y_2)$, ecc., tutto il susseguente ragionamento rimane il medesimo. Per tal modo si ottiene una formola più generale, che comprende la (55).

La formola (56) può sulle prime presentare una difficoltà analoga a quella che abbiamo proposta e sciolta nella Nota III.ª. Quantunque la funzione sotto il segno diventi zero per $\bar{z}=0$, non è però zero il valore dell'integrale, come sembrerebbe dover essere per la (5): e la ragione si vede in ciò, che quella funzione diventa infinita per varii valori di Z compresi fra *zero*, Z, i quali rendono $\bar{z}=z$, $\bar{z}=z_1$, ecc. e quindi la formola (5) non è più applicabile, mancando la condizione di continuità per essa necessaria.

XII.ª

pag. 22. *Sia* m *il numero delle radici* - - -

A capire il vantaggio di questo teorema si rifletta che le radici della (59) sono quantità costanti mentre quelle della (44) erano funzioni di x: e che la (59) è spesso assai più semplice della (44) perchè l'annullamento di x può farne svanire alcuni termini, e talvolta quelli che ne rendono più difficile la soluzione. Qui poi X è un limite superiore che restringe fra *zero*, X la variabilità di ξ modulo di x di cui è funzione il modulo variabile ζ di una radice z della (44), secondo si disse al principio della Nota X.ª

Abbiamo l'equazione identica

$$(\wp') \qquad \frac{\chi(x,\, b+\bar{z})}{f(x,\, b+\bar{z})} = \frac{\chi(0,\, b+\bar{z})}{f(0,\, b+\bar{z})} + \frac{d\cdot 1.\, \dfrac{f(x,\, b+\bar{z})}{f(0,\, b+\bar{z})}}{d\bar{z}}\,;$$

da questa, supposta la (61), si ha subito la (62).

Riteniamo poi, perchè ne avremo bisogno in seguito, essere

$$\bar{u}_1 = \left(\frac{f'(x,\, b+\bar{z})}{f(x,\, b+\bar{z})}\right)_0 ; \quad \bar{u}_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{f'(x,\, b+\bar{z})}{f(x,\, b+\bar{z})}\right)'_0 \text{ - - -}$$

$$\bar{u}_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3 \text{ - - - } n}\left(\frac{f'(x,\, b+\bar{z})}{f(x,\, b+\bar{z})}\right)^{(n-1)}_0$$

dove gli apici indicano le derivate per x e lo zero al piede indica, che ad operazioni eseguite deve farsi $x=0$. Se si sviluppa quest'ultima espressione, e si scrive per brevità f_0 invece di $f(0,\, b+\bar{z})$, trovasi che ad $\bar{u}_n$ può darsi la forma

$$(\chi') \qquad \bar{u}_n = \frac{1}{2\cdot 3 \text{ - - - } n}\left\{\frac{A}{f_0} + \frac{B}{f_0^2} + \text{ - - - - } + \frac{T}{f_0^n}\right\}$$

essendo A, B, - - - T quantità non divisibili esattamente per f_0.

Di facile intelligenza sembra sulle prime il ragionamento dell'Autore a fine di passare dalla (62) alla (63), ma riflettendovi alquanto emerge una difficoltà. Può domandarsi per qual motivo egli non moltiplica per $\frac{1}{\sqrt{-1}}\,d\bar{z}$ anche l'uno o l'altro di quei due termini che moltiplica invece per $\bar{z}\,dq$, il che facendo si potrebbe a prima giunta sospettare che anche quel termine svanisse dopo l'integrazione. A ciò però si risponde colla seguente osservazione. Abbiamo per la (5) in generale

$$\int_{-\pi}^{\pi} dq\cdot \bar{z}\,\psi(\bar{z}) = 0$$

purchè $\psi(\bar{z})$ rimanga finita e continua per tutti i valori di $\bar{z}$ compresi fra *zero*, Z, e senza questa condizione l'equazione è falsa. Adunque per la trasformazione qui indicata dall'Autore, anche l'integrale

$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\int d\bar{z}\cdot\psi(\bar{z})$$

definito fra i limiti eguali $\bar{z}=Ze^{-\pi\sqrt{-1}}$, $\bar{z}=Ze^{\pi\sqrt{-1}}$ non è zero se non verificandosi la stessa condizione di continuità in riguardo a $\psi(\bar{z})$. Quindi non è zero l'integrale

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{-1}}\int d\bar{z}\cdot\frac{\chi(x,\,b+\bar{z})}{f(x,\,b+\bar{z})}$$

definito fra $\bar{z}=Ze^{-\pi\sqrt{-1}}$, $\bar{z}=Ze^{\pi\sqrt{-1}}$, il quale è identico col primo membro della (56), siccome mostrammo anche sulla fine della Nota precedente.

Questa medesima osservazione vale a provare che non sono zero gl'integrali nelle equazioni (67), (69), ecc. giacchè le $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, ecc. $\bar{u}_1$, $\bar{u}_2$, ecc. sono tutte funzioni di $\bar{z}$ che diventano infinite per valori di $\bar{z}$ compresi fra *zero*, Z.

Quanto l'Autore asserisce prima di notare l'espressione (81) è manifesto dietro la formola (γ) della Nota I.ª Pongasi mente ch'egli qui si restringe a dare il limite del modulo del termine generale, e non quello del resto il quale è il più importante. Fa poi, come vedremo, l'una e l'altra cosa in appresso ripigliando da capo a dare in altra maniera le serie generali per gli sviluppi delle funzioni implicite col mezzo d'integrali duplicati.

XIII.ª

pag. 26. *Si potrebbe* - - -

Qui sulle prime viene in punto l'osservazione che abbiamo avuto cura di fare nelle Note X.ª, XI.ª circa il poter esservi dentro F anche esplicitamente ad y_x la variabile x; perciò approfittandone non avremo ora difficoltà ad intendere subito la verità della (83). Il passaggio alla (84) sarà manifesto se si rifletta che nella (83) la quantità sotto il segno integrale è veramente una funzione di x indipendente da $\bar{z}$, avendo noi fatto osservare che il modulo Z di quest'ultima è costante per riguardo ad x. Così col primo integrale si toglie la variabile x che sta nella z_x radice della (44), giacchè si sostituisce la $\bar{z}$; e col secondo integrale si toglie anche la x esplicita alla z_x e contenuta nelle funzioni χ, f, F: sono da notarsi questi successivi passi che portano all'intento desiderato.

La (84) è subito sviluppabile in serie secondo le potenze ascendenti di x, mettendo per $\frac{\bar{x}}{\bar{x}-x}$ la sua espressione equivalente [vedi Nota III.ª]. Il termine generale di tal serie è

$$\frac{x^n}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}dp\int_{-\pi}^{\pi}dq\cdot\frac{\bar{z}\chi(\bar{x},\,b+\bar{z})}{\bar{x}^n f(\bar{x},\,b+\bar{z})}F(\bar{x},\,b+\bar{z})$$

e il suo resto dopo n termini

$$\frac{x^n}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}dp\int_{-\pi}^{\pi}dq\cdot\frac{\bar{z}\chi(\bar{x},b+\bar{z})F(\bar{x},b+\bar{z})}{\bar{x}^{n-1}f(\bar{x},b+\bar{z})(\bar{x}-x)}.$$

Richiamate le formole (π), (ρ) della Nota VI.ª e riveduti quei calcoli, non si durerà fatica a comprendere, che il modulo di un tal termine generale è sempre minore di

$$(\psi')\qquad Z\left(\frac{\xi}{X}\right)\Lambda\frac{\chi(\bar{x},\,b+\bar{z})}{f(\bar{x},\,b+\bar{z})}F(\bar{x},\,b+\bar{z}),$$

e il modulo di un tal resto sempre minore di

$$(\omega')\qquad \frac{Z\,\xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)}\Lambda\frac{\chi(\bar{x},\,b+\bar{z})}{f(\bar{x},\,b+\bar{z})}F(\bar{x},\,b+\bar{z}).$$

Per fissare maggiormente questa dottrina, fermiamoci un momento a considerare il senso della (88). La funzione implicita y_x che risulta dalla equazione $f(x,\,y)=0$, si ha in serie per le potenze di x, conoscendo b valore particolare di y corrispondente ad uno a di x, nel seguente modo

$$y=b+C_1x+C_2x^2+\text{----}+C_{n-1}x^{n-1}+R;$$

dove
$$C_n = \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \frac{\bar{z}^2 \chi(\bar{x}, b+\bar{z})}{\bar{x}^n f(\bar{x}, b+\bar{z})}$$
$$R = \frac{x^n}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} dp \int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \frac{\bar{z}^2 \chi(\bar{x}, b+\bar{z})}{\bar{x}^{n-1} f(\bar{x}, b+\bar{z})(\bar{x}-x)};$$
la forma χ è la derivata della f per y; $X > \xi$ che è il modulo di x, $Z > y_x - b$, ma maggiore solo di tanto da non potersi assegnare altra radice che abbia il suo modulo fra *zero*, Z. Quindi si ha sempre
$$\text{mod. } C_n x^n < Z^2 \left(\frac{\xi}{X}\right) \Lambda \frac{\chi(\bar{x}, b+\bar{z})}{f(\bar{x}, b+\bar{z})}$$
$$\text{mod. } R < \frac{Z^2 \xi^n}{X^{n-1}(X-\xi)} \Lambda \frac{\chi(\bar{x}, b+\bar{z})}{f(\bar{x}, b+\bar{z})}.$$

XIV.ª

pag. 27. *Se si indica per* U_n - - -

Passa l'Autore a insegnare una terza maniera per ottenere lo sviluppo del primo membro della (83) in serie ordinata secondo le potenze di x, e formato solo con integrali definiti semplici. È questa la più ovvia perchè fondata sullo sviluppo ordinario dedotto dalla formola di Taylor: avvertendo che le derivazioni per x si possono far passare sotto il segno d'integrazione relativo ad altra lettera. Messo così lo sviluppo sotto la forma
$$U_0 + x U_1 + x^2 U_2 + \text{- - - -} + x^n U_n + \text{ecc.},$$
si capisce prontamente che U_n è dato dalla formola (90) del testo, ed è pure evidente il valore di U_0 dato dalla formola (92). Non faremo punto sulle espressioni coi residui poste in questo luogo, e sinonime a quelle date colle notazioni ordinarie: la ragione l'abbiamo già scritta; piuttosto faremo attenzione alla trasformazione che l'Autore fa della (90) riducendola alla (94). Egli usa a questo effetto un'equazione identica che è la nostra (φ') della Nota XII.ª, non facendo differenza che vi sia z per $\bar{z}$, anzi abbisognando qui proprio la (φ') colla $\bar{z}$. Allora si vede tosto prodursi il primo termine del valore di U_n nella (94); ma quanto al secondo esso è
$$\frac{1}{1\cdot 2 \text{- - -} n} \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \frac{\bar{z}\, d^n \cdot \left\{ \frac{d \cdot \text{l.} \frac{f(x, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})}}{d\bar{z}} F(x, b+\bar{z}) \right\}}{d x^n}$$
colla solita avvertenza di fare $x = 0$ a derivazioni eseguite. Per ridurre questo al termine dato dall'Autore bisogna estrarre dal segno integrale il simbolo d^n della derivazione $(n)esima$ per x, poi trasformare l'integrale restante, come già vedemmo più volte, nell'equivalente
$$\frac{1}{\sqrt{-1}}\int d\bar{z} \cdot \frac{d \cdot \text{l.} \frac{f(x, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})}}{d\bar{z}} F(x, b+\bar{z})$$
da definirsi fra i limiti eguali $\bar{z} = Z e^{-\pi\sqrt{-1}}$, $\bar{z} = Z e^{\pi\sqrt{-1}}$; poi integrar questo a parti osservandolo identico colla quantità
$$\frac{1}{\sqrt{-1}} \text{l.} \frac{f(x, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})} F(x, b+\bar{z}) - \frac{1}{\sqrt{-1}}\int d\bar{z} \cdot \text{l.} \frac{f(x, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})} \cdot \frac{d F(x, b+\bar{z})}{d\bar{z}};$$
indi, ritenendo che della parte sgombra da segno integrale svanisca la differenza ai due limiti eguali, e restituendo all'integrale restante la prima espressione mediante la trasformazione inversa alla superiormente usata, si ha il risultato del testo.

XV.ª

pag. 28. *Allorchè una sola radice* - - -

Osserviamo che la (83) per $x=0$ diventa

$$(\alpha'') \qquad F(0, y_0) + F(0, y_{10}) + \cdots = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \bar{z}\,\frac{\chi(0, b+\bar{z})}{f(0, b+\bar{z})}\,F(0, b+\bar{z}).$$

Dalle (42), (59) si vede che nel caso di $z=0$ è $y_0=b$; e siccome nella supposizione di una sola radice della (59) col modulo fra *zero*, Z il primo membro della precedente equazione si riduce al solo primo termine, la (92) diventa la (96).

A provare come dalla (90) si deduce la (97) serve il seguente ragionamento. Osservando le (3), (4) viene subito il pensiero di cambiare il secondo membro della (90) in una espressione sgombra di segno integrale, ma ciò non può farsi colla stessa (3) perchè la funzione

$$(\delta'') \qquad \bar{z}\,\frac{d^n\left\{\frac{\chi(x, b+\bar{z})}{f(x, b+\bar{z})}\,F(x, b+\bar{z})\right\}}{dx^n}$$

ove a derivazioni eseguite si fa $x=0$, diventa infinita per $\bar{z}=0$: siccome or ora dimostreremo. Abbiamo qui dunque un caso affatto simile a quello della formola (ε) della Nota II.ª e però useremo tal formola, talchè la (90) si cambierà nella

$$(\gamma'') \qquad U_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\frac{d^h\cdot\left\{z^{h+1}\,\frac{d^n\left\{\frac{\chi(x, b+z)}{f(x, b+z)}\,F(x, b+z)\right\}}{dx^n}\right\}}{dz^h}$$

essendo h un numero intero opportunamente scelto a fine che la quantità sottoposta alle parentesi maggiori non abbia a divenire infinita quando si fanno $x=0$, $z=0$. È manifesto che $\bar{z}$ essendo qui destinata a svanire, potevasi per essa surrogare la semplice z. Resta ad assegnare il numero intero h. Si osservi che la quantità (δ'') equivale per la (62) a quest'altra

$$\bar{z}\left\{(\bar{v}_0 + \bar{v}_1 x + \bar{v}_2 x^2 + \cdots + \bar{v}_n x^n + \cdots)\,F(x, b+\bar{z})\right\}_0^{(n)},$$

significando gli indici come nella Nota XII.ª, ossia a quest'altra

$$\bar{z}\left\{\bar{v}_0 F_0^{(n)} + n\bar{v}_1 F_0^{(n-1)} + \cdots + 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\,\bar{v}_{n-1} F_0' + 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\,\bar{v}_n F_0\right\}.$$

Se ne consideri l'ultimo termine, che per la (65) del testo è

$$(\delta'') \qquad 1\cdot 2\cdot 3\cdots n\,F_0\,\bar{z}\left(\frac{d\,\bar{u}_n}{d\bar{z}}\right);$$

sostituendo ad $\bar{u}_n$ la sua espressione data dalla (χ') [Nota XII.ª], questa (δ'') prende un valore il cui ultimo termine è

$$(\varepsilon'') \qquad -n\,\bar{z}\,F_0\,T\,\frac{\left(\frac{d\cdot f(0, b+\bar{z})}{d\bar{z}}\right)}{f(0, b+\bar{z})^{n+1}}.$$

Pertanto nella (γ'') la quantità sottoposta alle parentesi maggiori avrà un termine

$$-n\,F_0\,T\,\frac{z^{h+1}\left(\frac{d\cdot f(0, b+z)}{dz}\right)}{f(0, b+z)^{n+1}}$$

il quale sarà quello che contiene la $f(0, b+z)$ nel denominatore alla più alta potenza. Perchè questo non diventi infinito facendo $z=0$ conviene che $h \geqq n$: per $h=n$ la (γ'') diventa la (97).

L'equazione (98) si riconosce vera colle seguenti riflessioni. Che nel suo primo termine si trasformi il primo termine della (94) è cosa che si prova per la (83) collo stesso ragionamento fatto più sopra all'oggetto di dimostrare la (96); solamente osservisi che bisogna alla $F(x, y)$

intendere sostituita la $\frac{d^n F(x,y)}{dx^n}$: il che è permesso, essendo F una funzione arbitraria. La trasformazione poi del secondo termine della (94) nel secondo della (98) si fa in un modo precisamente eguale a quello da noi tenuto per trasformare la (90) nella (γ'') e quindi nella (97). Si trova così

$$(\xi'')\quad U_n = \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{d^n F(x,b)}{dx^n} - \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots h}\cdot\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\frac{d^h\cdot\left\{z^{h+1}\cdot\frac{d^n\left\{1.\frac{f(x,b+z)}{f(0,b+z)}\cdot\frac{dF(x,b+z)}{dz}\right\}}{dx^n}\right\}}{dz^h};$$

qui poi a determinare il numero h si osservi che la quantità sotto le parentesi maggiori può scriversi a motivo della (61)

$$z^{h+1}\left\{\left(u_1 x + u_2 x^2 + \cdots + u_n x^n + \cdots\right)\frac{dF(x,b+z)}{dz}\right\}_0^{(n)},$$

che si riduce

$$(\chi'')\quad z^{h+1}\left\{nu_1\left(\frac{dF(x,b+z)}{dz}\right)_0^{(n-1)} + \cdots + 1\cdot 2\cdot 3\cdots nu_{n-1}\left(\frac{dF(x,b+z)}{dz}\right)_0' + 1\cdot 2\cdots nu_n\left(\frac{dF(0,b+z)}{dz}\right)\right\}.$$

Perchè l'ultimo termine di questa espressione

$$(\Im'')\qquad 1\cdot 2\cdot 3\cdots n z^{h+1} u_n\left(\frac{dF(0,b+z)}{dz}\right)$$

non diventi infinito per $z=0$, riassunto il valore di u_n che si desume dalla (χ'), basterà prendere $h \geqq n-1$; la $h=n-1$ cambia la (ξ'') nella (98).

Ecco ora quanto si richiede a comprendere le (99), (100), (101), (102). La (100) diventa manifesta osservando il primo membro della (α'') in cui vi saranno m termini eguali: dicasi a un di presso del primo termine nel secondo membro della (102). Cogli stessi ragionamenti precedentemente usati si fa la trasformazione della (90) nella (γ'') e quella della (94) in una formola che non differisce dalla (ξ'') se non per avere il primo termine del secondo membro moltiplicato per m. Tutto si ridurrà a ben discernere come debbasi determinare il numero h. La (59) ha una sola radice $z=0$ quando è $f(0, b+z)=zA$, essendo A quantità che non si annulla per $z=0$, ed ha m radici eguali a zero, quando è $f(0, b+z)=z^m A$. In quest'ultimo caso basta volgere un'occhiata alla espressione (χ') per capire che u_n può mettersi sotto la forma $\frac{H}{z^{mn}}$, essendo H una quantità che può e non può annullarsi per $z=0$. Se H non si annulla, facendo $z=0$, è evidente che nella precedente ($\Im''$) non basta fare $h \geqq n-1$ a fine di evitare l'infinito quando z è zero, ma convien fare $h \geqq mn-1$. Un tal numero mn è allora il numero delle radici eguali dell'equazione $\frac{z^{mn}}{A}=0$, ossia della (99). Se poi H si annulla facendo $z=0$, la frazione $\frac{H}{z^{mn}}$ potrà ridursi ad un'altra $\frac{K}{z^p}$, dove K più non si annullerà per $z=0$, e p sarà minore di mn. Allora volendo evitare l'infinito nella ($\Im''$) convien prendere $h \geqq p-1$, e questo p è ancora il numero delle radici eguali a zero nella equazione $\frac{z^p}{K}=0$. L'Autore abbraccia i due casi che qui abbiamo distinti, chiamando in generale N il numero delle radici eguali a zero della (99); deve dunque sempre essere $h \geqq N-1$; per $h=N-1$ si ha la formola (102). Riflessioni analoghe persuadono che nella (γ'') dovrà prendersi $h \geqq N$: per $h=N$ essa diventa la (101).

La riduzione della (98) alla (104) è palese osservando l'espressione (χ''). Troviamo necessario avvertire per le formole (107), (109) che la N non è ivi costante come potrebbe sembrare a prima vista, ma dipende da n eguagliando per ogni termine il numero delle radici eguali della (99). Ben è vero che avendo noi dimostrato potersi prendere per N un numero

anche maggiore dell'anzidetto, sarà permesso tenerlo costante per un certo numero di termini dandogli il valore che gli compete, giusta l'esposta regola in riguardo all'ultimo dei termini che si considerano: ma estendendosi la serie all'infinito, è evidente che converrà di tratto in tratto cambiarlo.

XVI.A

pag. 31. *Allorchè nella formola* (102)---

Che N possa divenire eguale ad n si vede da quanto abbiamo detto nella Nota precedente, giacchè quel p minore di mn può imbattersi ad essere la stessa n: sicchè la formola (100) è talvolta vera con $m>1$. L'errore di Laplace è stato di usarla come termine generale nello sviluppo di $mF(x,y)$, o di $mF(x,y_1)$, ecc., mentre, siccome corresse il nostro Paoli, è allora termine generale nello sviluppo di $F(x,y)+F(x,y_1)+$ecc. Entrambi poi sbagliarono nell'estendere al caso generale di $N>n$ una formola vera nel solo caso particolare e assai raro di $N=n$.

Confrontando la (110) con quella data da Laplace nel luogo citato, si osserva diversa la quantità sotto il segno logaritmico, mancando nella formola più antica il denominatore $f(0, b+z)$ al cui luogo sta l'unità: non sarebbe però difficile dimostrare che ciò non dà differenza nei risultati finali.

Gioverà per esercizio far qualche cenno delle operazioni indicate relativamente alle equazioni (112), (113).

Le tre radici della (112) si trovano prontamente trasponendone il secondo termine ed estraendo la radice terza: si hanno così

$$(\lambda'') \qquad y=\frac{b+cx}{1-ax}\,; \quad y_1=\frac{b+\alpha cx}{1-\alpha ax}\,; \quad y_2=\frac{b+\beta cx}{1-\beta ax}$$

essendo

$$\alpha=e^{-\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}\,; \quad \beta=e^{\frac{2\pi}{3}\sqrt{-1}}$$

le altre due radici cubiche dell'unità. È quindi facile svolgere secondo le potenze di x la somma $y+y_1+y_2$: in tale sviluppo il coefficiente U_n di x^n risulta

$$U_n=(ab+c)\,a^{n-1}\,(1+\alpha^n+\beta^n)$$

ossia, attesi i valori di α, β,

$$U_n=(ab+c)\,a^{n-1}\left(1+2\cos.\frac{2n\pi}{3}\right).$$

Siccome poi $\cos.\frac{2n\pi}{3}$ ha sempre il valore 1 quando n è della forma $3q$, ed ha sempre il valore $-\frac{1}{2}$ quando n è di una delle forme $3q+1$, $3q+2$, quello sviluppo non ritiene che i termini nei quali gli esponenti di x sono multipli di 3, che è altresì fattore di tutti i coefficienti.

Deduciamo lo stesso risultato dalla (110): abbiamo

$$1.\,\frac{f(x, b+z)}{f(0, b+z)}=1.\left(1-\left(\frac{ab+c+az}{z}\right)^3 x^3\right);$$

talchè, sviluppando mediante la nota serie del logaritmo, si trovano mancanti tutti i termini nei quali l'esponente di x è della forma $3q+1$, $3q+2$. Possono però questi intercalarsi, giusta quanto or ora si è detto, mettendo al termine $(n)esimo$ generale il coefficiente $\frac{1}{3}\left(1+2\cos.\frac{2n\pi}{3}\right)$. Tal serie sarà la (61), quindi

$$u_n=-\frac{1}{n}\left(1+2\cos.\frac{2n\pi}{3}\right)\left(\frac{ab+c+az}{z}\right)^n,$$

da cui per la (99) si vede verificarsi in questo caso la condizione $N=n$.

Abbiamo $\frac{dF(x,\, b+z)}{dz}=1$, ed è $\left(1.\frac{f(x,\, b+z)}{f(0,\, b+z)}\right)_0^{(n)}=1\cdot 2\cdots n\, u_n$, cioè nel caso presente eguale a $-1\cdot 2\cdots(n-1)\left(1+2\cos.\frac{2n\pi}{3}\right)\left(\frac{ab+c+az}{z}\right)^n$. Pertanto la (110) ci porge

$$U_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(1+2\cos.\frac{2n\pi}{3}\right)\frac{d^{n-1}\cdot(ab+c+az)^n}{dz^{n-1}}$$

ove, finite le derivazioni per z, deve farsi $z=0$: un tal valore viene perfettamente eguale a quello precedentemente trovato.

Le tre radici della (113) sono espresse dalle precedenti (λ''), ove al luogo di x siavi dappertutto $x^{\frac{1}{3}}$. Formando in seguito alla stessa maniera lo sviluppo di $y+y_1+y_2$, si vede che in esso, a motivo della proprietà già marcata nel trinomio $1+\alpha^n+\beta^n$, svaniscono tutti i termini contenenti potenze frazionarie di x, e quelli che rimangono costituiscono una serie in cui entrano tutte le potenze intere della stessa variabile. Chiamato $U_n x^n$ l'(n) *esimo* termine di questa seconda, è

$$U_n=3(ab+c)a^{3n-1}.$$

Da un altro verso abbiamo in questo caso

$$l.\frac{f(x,\, b+z)}{f(0,\, b+z)}=l.\left(1-\left(\frac{ab+c+az}{z}\right)^3 x\right)$$

espressione che svolta in serie dà

$$u_n=-\frac{1}{n}\left(\frac{ab+c+az}{z}\right)^{3n} x^n,$$

quindi dalla (99) $N=3n$. Non è più dunque applicabile la (110), essendo manifesto che sotto le parentesi maggiori bisogna moltiplicare per z^{3n}, e non per z^n. Se invece usiamo la (102) con $N=3n$, otteniamo

$$U_n=\frac{1}{1\cdot 2\cdots(3n-1)}\cdot\frac{1}{n}\cdot\frac{d^{3n-1}\cdot(ab+c+az)^{3n}}{dz^{3n-1}},$$

ritenendo di fare $z=0$ a derivazioni finite: il risultato finale è quello stesso già cavato alla prima maniera.

XVII.[A]

pag. 32. *Si potrebbero ancora generalizzare* - - -

Basta ripetere la dimostrazione della formola (3) data nella Nota II.[a] per comprendere che essa si riduce più generale facendo cominciare l'integrazione per X da x_0 piuttosto che da zero, e risulta

$$(u'')\qquad \int_{-\pi}^{\pi} dp\cdot\left(\phi(\overline{x})-\phi(\underline{x})\right)=0;$$

la quale sempre sussiste quando $\phi(\overline{x})$ non diventa infinita per nessuna combinazione di valori di X fra x_0, X, e di p fra $-\pi$, π. Noteremo che la lettera X qui fa due ufficii; d'indicare una variabile, e nello stesso tempo il limite superiore di questa variabilità: mentre x_0 esprime soltanto il limite inferiore.

Dietro la precedente dimostreremo l'equazione simile alla (49). Ponendo [rivedi la Nota X.[a]] invece di $\phi(\overline{x})$ il prodotto (50), essa ci dà

$$\int_{-\pi}^{\pi} dq\cdot\left[\overline{z}\frac{\chi(x,\, b+\overline{z})}{f(x,\, b+\overline{z})}F(b+\overline{z})-\underline{z}\frac{\chi(x,\, b+\underline{z})}{f(x,\, b+\underline{z})}F(b+\underline{z})\right]=F(b+z)\int_{-\pi}^{\pi} dq\cdot\frac{\overline{z}}{\overline{z}-z}-F(b+z)\int_{-\pi}^{\pi} dq\cdot\frac{\underline{z}}{\underline{z}-z}.$$

Qui l'integrale $\int_{-\pi}^{\pi} dq\cdot\frac{\overline{z}}{\overline{z}-z}$ si dimostra eguale a 2π [vedi Nota III.[a]] mettendo per $\frac{\overline{z}}{\overline{z}-z}$ l'equivalente serie $1+\frac{z}{\overline{z}}+\left(\frac{z}{\overline{z}}\right)^2+$ ecc. che è convergente per essere mod.$\overline{z}>$mod.z. L'altro

integrale $\int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \frac{\underline{z}}{\underline{z}-z}$ è invece zero, perchè abbiamo

$$\frac{\underline{z}}{\underline{z}-z} = -\frac{\underline{z}}{z} - \left(\frac{\underline{z}}{z}\right)^2 - \text{ecc.}$$

serie convergente per essere mod.$\underline{z}$<mod.z: e quindi a motivo della (1), applicando le integrazioni, tutti i termini riescono zero. Pertanto l'antecedente equazione ove mettasi $F(y)$ per $F(b+z)$ diventa

$$(\nu'') \qquad F(y) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \left[\bar{z}\,\frac{\chi(x,\, b+\bar{z})}{f(x,\, b+\bar{z})}F(b+\bar{z}) - \underline{z}\,\frac{\chi(x,\, b+\underline{z})}{f(x,\, b+\underline{z})}F(b+\underline{z})\right]$$

che è la (49) ove, come qui dice l'Autore, si è sostituita sotto il segno integrale alla funzione di $\bar{z}$ la differenza fra questa stessa funzione e la simile di $\underline{z}$.

La proposizione essendo dimostrata nella precedente formola fondamentale (ν''), è facile con un ragionamento simile a quello della Nota XI.ª estenderla a due formole che corrispondano alle (55), (83), e quindi, ripetendo pazientemente i calcoli, a tutte le altre qui indicate dall' Autore.

XVIII.ª

pag. 33. *Per mostrare* - - -

Comincia un'applicazione interessante delle teoriche esposte che si estende per un lungo tratto della memoria dove non noteremo qua e là che poche cose, essendo il rimanente di facile intelligenza a motivo delle premesse.

La condizione della convergenza si vede più presto in forza del Teorema 3.° mediante la espressione di $1.\frac{f(x,\, b+\bar{z})}{f(0,\, b+\bar{z})}$ che nel testo precede la (122); osservata allora questa (122), si riconosce tosto la (117).

La (125) è manifesta per la (ω') della Nota XIII.ª. Il passaggio da essa alla (126) suppone prima l'uso della seconda delle (25) che la cambia in

$$\frac{\xi^n Z}{X^{n-1}(X-\xi)}\,\Lambda\left(\frac{\Pi'(b+\bar{z}) - \bar{x}\,\varpi'(b+\bar{z})}{1-\bar{x}\,\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}}\right)\Lambda\,\frac{F(\bar{x},\, b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}\,;$$

poi la sostituzione della quantità che vedesi nel testo in luogo del primo fattore affetto dal segno Λ è visibilmente permessa, venendo per essa aumentato il numeratore e diminuito il denominatore, il quale rimane sempre positivo a motivo della condizione (117).

Volendo risparmiare i residui, alle formole (128), (129), (133), (134) debbono sostituirsi le seguenti

$$(\xi'')\qquad \begin{aligned}
&F(y)+F(y_1)+\cdots+F(y_{m-1}) = F(\mathfrak{S})+F(\mathfrak{S}_1)+\cdots+F(\mathfrak{S}_{m-1})\\
&\quad+\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dq\cdot\bar{z}\left\{\frac{F(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}\left(\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}\Pi'(b+\bar{z})-\varpi'(b+\bar{z})\right)\left(\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}\right)^{n-1}\right\}\\
&F(y)+F(y_1)+\cdots+F(y_{m-1}) = F(\mathfrak{S})+F(\mathfrak{S}_1)+\cdots+F(\mathfrak{S}_{m-1})\\
&\quad+\Sigma_{n=1}^{n=\infty}\frac{x^n}{2\pi n}\int_{-\pi}^{\pi}dq\cdot\bar{z}\left\{\left(\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}\right)^n F'(b+\bar{z})\right\}\\
&y+y_1+\cdots+y_{m-1} = \mathfrak{S}+\mathfrak{S}_1+\cdots+\mathfrak{S}_{m-1}\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dq\cdot\bar{z}\,\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dq\cdot\bar{z}\left(\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}\right)^2+\text{ecc.}\\
&F(y)+F(y_1)+\cdots+F(y_{m-1}) = F(\mathfrak{S})+F(\mathfrak{S}_1)+\cdots+F(\mathfrak{S}_{m-1})\\
&\quad+\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dq\cdot\bar{z}\,\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}F'(b+\bar{z})+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dq\cdot\bar{z}\left(\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\Pi(b+\bar{z})}\right)^2F'(b+\bar{z})+\text{ecc.}
\end{aligned}$$

Le (138), (139) vengono più naturalmente dalla (105): volendo dedurle dalle due ultime delle precedenti (ξ'') conviene tradurre gl'integrali in differenziali come si è già fatto in generale per passare dalle (90), (94) alle (97), (98).

Invece di partire dalle (128), (129) per giungere alle (141), (142) sembra meglio dedurre quest'ultima dalla (106), la quale per essere, giusta la (122), $u_n = -\frac{1}{n} \cdot \frac{\varpi^n(b+z)}{z^n}$, si muta nella

$$F(y) = F(b) + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{x^n}{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot \frac{d^{n-1}[\varpi^n(b+z)F'(b+z)]}{dz^{n-1}},$$

in cui a derivazioni eseguite deve porsi $z=0$. Siccome però è tale la quantità sotto il segno differenziale che la z non vi entra se non in somma con b, può essa farsi zero anche prima delle derivazioni, dando al differenziale l'indicazione per b invece che per z. Allora si ha la formola (142).

Si può la (141) colle tre seguenti dedurre immediatamente, siccome accenna l'Autore, dalla (148). Infatti per essere

$$\frac{\bar{z}}{\bar{z} - x\varpi(b+\bar{z})} = 1 + \left[\frac{\varpi(b+\bar{z})}{\bar{z}} - \varpi'(b+\bar{z})\right] x + \cdots + \left[\frac{\varpi^n(b+\bar{z})}{\bar{z}^n} - \frac{\varpi^{n-1}(b+\bar{z})\varpi'(b+\bar{z})}{\bar{z}^{n-1}}\right] x^n + \cdots,$$

la (148) dà

$$F(y) = F(b) + \cdots + U_n x^n + \cdots$$

essendo

$$U_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \frac{\varpi^n(b+\bar{z})}{\bar{z}^n} F(b+\bar{z}) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} dq \cdot \frac{\varpi^{n-1}(b+\bar{z})\varpi'(b+\bar{z})}{\bar{z}^{n-1}} F(b+\bar{z}).$$

Si traducano questi integrali in differenziali mediante la formola (δ) della nostra Nota II.ª, indi riflettasi che anche qui può farsi $z=0$ prima delle derivazioni, indicando poi queste per b, a motivo della circostanza più sopra scritta; avremo

$$U_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot \frac{d^n[\varpi^n(b)F(b)]}{db^n} - \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots (n-1)} \cdot \frac{d^{n-1}[\varpi^{n-1}(b)\varpi'(b)F(b)]}{db^{n-1}},$$

per cui è dimostrata la (141). Il passaggio alla (142) si fa manifesto eseguendo nel primo termine una sola delle n derivazioni e indicando le altre.

XIX.ª

pag. 38. *Le formole* - - -

Cerchiamo di farar maggiormente queste idee importanti. La condizione (151) può scriversi

$$\xi < \frac{Z}{\Lambda\varpi(b+\bar{z})},$$

ovvero, indicando $\Lambda\varpi(b+\bar{z})$ con $Z\psi(Z)$,

$$(o'') \qquad \xi < \frac{1}{\psi(Z)}.$$

La Z è qui una lettera che può avere un qualunque valore positivo minore di quello [che per comodità marchiamo con Z'] il quale è il primo nell'ordine progressivo di grandezza a rendere infinita con una opportuna combinazione del valore di q l'una o l'altra delle $\varpi(b+\bar{z})$, $F(b+\bar{z})$. Essendo Z variabile fra *zero*, Z' può in questo corso incontrare un valore che renda $\psi(Z)$ minima: tal quantità diventata minima è quella che l'Autore indica con M. Adottando allora invece della precedente (o'') la condizione

$$\xi < \frac{1}{M},$$

fissiamo per limite di ξ il più gran valore che può avere la frazione $\frac{1}{\psi(Z)}$, ossia diamo il maggior possibile allargo ai valori di ξ.

Dobbiamo considerare anche ξ come variabile da *zero* a $\xi' = \frac{1}{M}$: quella formola che è vera anche quando ξ ha il valore ξ', lo sarà a *fortiori* per $\xi < \xi'$.

Nella (153) Z ha un valore fra *zero*, Z'; ξ ha un valore fra *zero*, $\frac{1}{\psi(Z)}$; X ha un valore fra ξ, $\frac{1}{\psi(Z)}$.

Per giungere alla (156) osservisi essere

$$\sin.(b+\bar{z}) = \sin.(b+Z\cos.q)\cos.(Z\sin.q\sqrt{-1}) + \cos.(b+Z\cos.q)\sin.(Z\sin.q\sqrt{-1});$$

e procedendo come nel caso simile della Nota VII.ª, e mettendo

$$\cos.(2Z\cos.q) - 2\sin.b\sin.(b+2Z\cos.q) \quad \text{invece di} \quad \cos.(2b+2Z\cos.q),$$

si troverà

$$[\text{mod.}\sin.(b+\bar{z})]^2 = \frac{1}{4}\left[e^{2Z\sin.q} + e^{-2Z\sin.q} - 2\cos.(2Z\cos.q)\right] + \sin.b\sin.(b+2Z\cos.q).$$

Presentemente a motivo della prima delle (25) sarà il A del primo membro eguale o minore della somma dei A delle due parti componenti il secondo membro, ossia

$$A[\text{mod.}\sin.(b+\bar{z})]^2 \leqq \left(\frac{e^Z - e^{-Z}}{2}\right)^2 + \sin.B;$$

ma $A[\text{mod.}\sin.(b+\bar{z})]^2 = [A\sin.(b+\bar{z})]^2$ per la ragione che il quadrato ha il suo massimo quando lo ha la sua radice, quindi la (156).

A passare dalla (156) alla (157) ragionisi così. Se il primo membro della (156) fosse soltanto eguale, e non eguale ed anche minore del secondo [che per brevità indichiamo con H], non avrebbesi alcuna difficoltà, per motivo della precedente (0''), a stabilire la (157). Nel caso che abbia luogo quel *minore*, potremo fare $A\sin.(b+\bar{z}) = H - h$, essendo h una certa quantità. Allora la (157) è veramente

$$\xi < \frac{Z}{H-h};$$

ma come $\frac{Z}{H-h} > \frac{Z}{H}$, quella formola che è giusta per un valore di ξ fra *zero*, $\frac{1}{H-h}$, lo sarà tanto più per un valore di ξ fra *zero*, $\frac{Z}{H}$. Ben è vero che in tal caso siamo bensì certi che il valore preso per ξ è tale da soddisfare all'equazione, ma non già ch'essa equazione non possa anche essere vera per un valore di ξ un po' maggiore di $\frac{Z}{H}$.

Lo stesso ragionamento vale per passare dalla (157) alla (158). La formola sussiste purchè ξ sia fra *zero*, $\frac{Z}{H}$, dunque sussiste a più forte ragione se ξ ha un valore fra *zero*, e un limite minore dell'anzidetto qual è

$$\frac{Z}{\left[\left(\frac{e^Z - e^{-Z}}{2}\right)^2 + 1\right]^{\frac{1}{2}}} = \frac{2Z}{e^Z + e^{-Z}}.$$

Ristretto così il limite superiore di ξ quanto fa bisogno a fine di avere formole semplici, cerchiamo poi di allargarlo il più possibile rendendo massima la funzione $\frac{2Z}{e^Z + e^{-Z}}$.

Il secondo membro della (161) è zero per $Z=0$, ed è ancora minore di 1 per $Z=1$, giacchè dalla equazione identica immediatamente precedente rilevasi aver esso allora il valore $1 - \frac{1}{e}$; proseguendo pertanto ad aumentare dopo 1 per gradi insensibili il valore di Z, c'imbatteremo

in quello che rende detto secondo membro eguale precisamente ad 1 e che è perciò radice di quella equazione. Nè potrà esservi altra radice: e si capirà se riflettasi che quel secondo membro crescendo continuamente con Z, non può più mai tornare eguale ad 1. Deve poi essere Z minore di 1,2100 - - -, perchè questo valore rende già eguale ad 1 la somma dei soli primi due termini del secondo membro della (161), talchè l'aggiunta del valore dei seguenti, che pur è qualche cosa, darà una somma totale maggiore del primo membro.

Il valore di Z della (162) non si sostituisca immediatamente nella (160), ma nella

$$\frac{Z+1}{Z-1}\, e^{-2Z}=1$$

che è la stessa (160) posta sott'altra forma.

La sostituzione di $1+2ie^{2\theta i}$ ad e^{2i} si vede potersi fare sviluppando e^{2i} mediante la nota formola dedotta dal teorema di Taylor e arrestata al secondo termine col teorema di Lagrange. Osservisi che dopo la (163) si fa la seconda approssimazione mettendo per i il valore del primo limite della prima approssimazione.

Per capire ciò che dice l'Autore dopo marcata la (166) bisogna osservare che la $\Pi(b+z)=0$ del Teorema 7.° è qui $z=0$, la quale non ha che una sola radice.

Evitando al solito i residui, osserveremo che la (148) ci dà prontamente

$$\frac{1}{1-x\cos y}=1+\frac{x}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dq\cdot\frac{\sin.(b+\bar{z})}{\bar{z}}+\frac{x^2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dq\cdot\frac{\sin.^2(b+\bar{z})}{\bar{z}^2}+\text{- - - -}+\frac{x^n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}dq\cdot\frac{\sin.^n(b+\bar{z})}{\bar{z}^n}+\text{- - -};$$

ora si traducano gl'integrali in differenziali colla formola (δ) della Nota II.ª, e sortirà la (168).

L'Autore cerca il valore di X che rende minima la formola (171) e non quello che rende minima la formola (169); ha qui dunque luogo la stessa osservazione fatta più sopra nella Nota VIII.ª. Il valore di X che rende minima la (169) ci è dato dall'equazione di secondo grado

$$(n+1)MX^2-n(1+\xi M)X+\xi(n-1)=0;$$

rammentiamoci però che esso non sarebbe buono, se non soddisfacesse alle due condizioni $X>\xi$, $X<\frac{1}{M}$.

XX.ª

pag. 42. *Le funzioni implicite* - - -

Si poteva aspettare che avendo l'Autore più sopra dati pochi cenni intorno allo sviluppo delle funzioni esplicite a più variabili [rivedasi la Nota VI.ª], si fosse qui pure tenuto allo stesso metodo. Invece abbiamo osservato con piacere ch'egli in questo luogo non salta alcun'idea importante, talchè ci abbisogna di notare poche cose per la piena intelligenza di questa grande e luminosa dottrina.

L'espressione (180) deve intendersi la somma di una serie finita doppia, tripla ecc., secondo le variabili sono due, tre, ecc; cioè, la somma

$$F(x, x', \text{- - -} y, y', \text{- - -})+F(x, x' \text{- - -} y_1, y', \text{- - -})+\text{- - - -}+F(x, x' \text{- - -} y_{m-1}, y', \text{- - -})$$

deve primieramente ripetersi per ognuna delle radici y', y'_1, y'_2 - - - $y'_{m'-1}$ della seconda (175): poi il quadro così formato deve ripetersi per ognuna delle radici y'', y''_1, y''_2 - - - $y''_{m''-1}$ della terza (175); ecc.

A ben comprendere la dimostrazione della (184) fissiamo dapprima che si abbiano due sole variabili x, x'; nel primo membro della (181) vi sarà la somma

$$F(x, x', y, y')+F(x, x', y_1, y')+\text{- - - -}+F(x, x', y_{m-1}, y'),$$

e nel secondo vi sarà sotto il segno integrale il fattore $F(x, x', b+\bar{z}, y')$. Una tale equazione va replicata m' volte mettendo per y' successivamente y', y'_1, y'_2 - - - $y'_{m'-1}$; si sommino poi

queste m' equazioni: avremo nel primo membro una serie finita doppia, e nel secondo sotto l'integrale la serie semplice

$$F(x, x', b+\bar{z}, y') + F(x, x', b+\bar{z}, y'_1) + \cdots + F(x, x', b+\bar{z}, y'_{m'-1});$$

la quale è poi mediante la (182) ridotta ad un solo termine quando s'introduce il secondo integrale definito. Così con tre variabili una serie tripla nel primo membro si trova eguale ad una serie doppia nel secondo posta sotto un integrale definito semplice; ad una serie semplice posta sotto un integrale definito duplicato; ad un termine solo posto sotto un integrale definito triplicato. Non havvi difficoltà ad estendere questa vista ad un maggior numero di variabili.

Come l'Autore passò dalla (83) alla (84) si potrebbe passare dalla (184) ad una formola in cui, essendo raddoppiato il numero degli integrali, le variabili x, x' - - - sarebbero cavate fuori anche dalle forme F, χ, χ' - - - f, f', - - -. Si evita nel testo una tal formola complicata [che pur è bene contemplare almeno nel pensiero, essendo essa quella che scioglie in tutta la generalità la questione] facendo lo sviluppo in due volte. Il prodotto (178) posto sotto gl'integrali della (184) si consideri una funzione di x, x', - - - e s'immagini sviluppato in serie mediante la formola (σ) della Nota VI.ª [avvertendo che qui abbiamo x', x'' - - - invece di y, z - - -]; non si avrà difficoltà, vista la (σ') della stessa Nota, a capire che il modulo del resto di una tal serie ha per limite l'espressione (186) dove la A deve intendersi presa relativamente alla u, essendo $\bar{\alpha} = Ae^{u\sqrt{-1}}$, come si è detto nel luogo citato. Ora questo stesso limite è a maggior ragione limite del modulo del resto della (184), e si comprenderà riflettendo sulla formola (ρ) della medesima Nota. Così si giunge allo scopo saltando l'espressione di quei secondi integrali multipli che si dovrebbero usare per presentare all'occhio lo sviluppo del prodotto (178).

La condizione che A debba essere minore dei rapporti $\frac{X}{\xi}$, $\frac{X'}{\xi'}$, ecc. si capirà rileggendo un luogo analogo della Nota VI.ª ivi preparato per l'uso che qui se ne doveva fare.

XXI.ª

pag. 46. *Allorchè col mezzo* - - -

È questo il luogo in cui si vede più apertamente la grande utilità delle esposte dottrine e l'applicazione che possono avere principalmente pel calcolo delle serie astronomiche a scanso di computi laboriosissimi fatti finora il più sovente senza avere una sufficiente idea di ciò che si trascura.

Di due quantità frazionarie, il logaritmo della minore è un numero negativo, che astrazion fatta dal segno, è maggiore del logaritmo della maggiore: perciò cambiati i segni, la (192) è

$$0{,}4234029 \cdots n - \left[L(n+1) - L\left(1 - \frac{0{,}6057\cdots}{n}\right)\right] > N + 0{,}6399617\cdots,$$

da questa nel caso di $N=3$ si ha subito la (193). Ora essendo sempre n maggiore di 1, il secondo termine del denominatore, che può anche scriversi $-\frac{1}{n} L \cdot \frac{n(n+1)}{n-0{,}6057\cdots}$, è sempre quantità negativa. Pertanto, se questo termine si trascura, si prende per limite di n un numero minore del vero, essendo in generale $\frac{A}{a} < \frac{A}{a-b}$ quando $b < a$. Nondimeno un tal numero può assumersi come valore di n per passare ad una seconda approssimazione. Così fa l'Autore sostituendo 9 per n in quel secondo termine negativo del denominatore, e cava il

valore del limite più prossimo al vero. Egli poi osserva che quel termine negativo nel denominatore della (193) ottiene per $n=9$ una specie di valor massimo, perchè facendo $n=9+p$ [intendasi p numero positivo minore di 10], il rapporto $\frac{L(n+1)}{n}$, da cui principalmente dipende la grandezza di siffatto termine, è minore di $\frac{1}{9}$ suo valore per $n=9$.

Ciò si fa manifesto mettendo per $\frac{L\cdot(10+p)}{9+p}$ l'espressione equivalente

$$\frac{1+0,43429---\left[\frac{p}{10}-\frac{1}{2}\left(\frac{p}{10}\right)^2+\frac{1}{3}\left(\frac{p}{10}\right)^3-\text{ecc.}\right]}{9+p}$$

e svolgendo di nuovo in serie ordinata secondo le potenze di p. Se poi quel termine negativo nel denominatore della (193) ha il valor massimo per $n=9$, avrà un valor minore pel vero valore di n che sappiamo dover essere maggiore di 9: quindi riuscirà allora maggiore il denominatore, quindi minore il vero valore della frazione. Infatti adottando $n=11,7---$ per passare ad una terza approssimazione, si trova $n=11,1---$.

Merita osservazione la circostanza d'essere noi arrivati ad assegnare i valori dei limiti in numeri, quantunque nell'equazione proposta siavi una costante b rimasta indeterminata.

XXII.[A]

pag. 47. *Si vede da ciò che precede* - - -

Facile e pronto è il mezzo che l'Autore ci propone per la valutazione delle Λ: osserveremo solo che a motivo della prima formola (25) qui richiamata, in varii luoghi ove è messo il segno $=$, cioè nei valori di $\Lambda\sin.\bar{x}$, $\Lambda\cos.\bar{x}$, e nelle (194), si sarebbe rigorosamente dovuto mettere il segno $\overline{\overline{<}}$, non essendo noi in diritto col solo uso della (25) di toglierci a tale ambiguità. Sotto quest'aspetto pare migliore il primo metodo più lungo, che pronuncia intorno a quei valori assolutamente: ma per le applicazioni potrà benissimo supplire anche quello ora accennato. Intorno alle (195), (196) basterà dimostrare la prima, valendo un simile ragionamento anche per le altre. Ora

$$\sin.\bar{u}=\bar{u}-\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\bar{u}^3+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\bar{u}^5-\text{ecc.};$$

e quindi per la prima delle (25)

$$\Lambda\sin.\bar{u}\overline{\overline{<}}\Lambda\bar{u}+\frac{1}{1\cdot2\cdot3}\Lambda\bar{u}^3+\frac{1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}\Lambda\bar{u}^5+\text{ecc.}$$

Esprimendo $\bar{u}$ con $Ue^{k\sqrt{-1}}$, si vede che

$$\text{mod.}\,\bar{u}^n=U^n=(\text{mod.}\,\bar{u})^n;$$

perciò $\Lambda\bar{u}^n$ equivarrà al valor massimo di $(\text{mod.}\,\bar{u})^n$: e siccome una potenza positiva ha il valor massimo quando lo ha la radice, sarà

$$\Lambda\bar{u}^n=(\Lambda\bar{u})^n.$$

Con questa formola i termini della precedente serie si riducono subito in modo da riuscir evidente la prima delle (195).

(*sarà continuato*)

SULLA GRANDINE

MEMORIA

DI ANGELO BELLANI

CAPITOLO PRIMO

Se i vapori considerati come tali, ossia prima di ridursi in gocce d'acqua possano costituire la grandine.

Nella guisa che il Geologo arriva a classificare talvolta un minerale anche dai soli caratteri esterni, così il Fisico può sperare di determinare l'origine ancora sconosciuta della grandine, coll'esaminare quali sono i suoi caratteri particolari e da essi argomentare a qual classe di fenomeni appartenga.

Finora la maggior parte dei Fisici si è limitata a considerare la grandine come un ammasso di vapori acquei congelati, consistente ordinariamente in un fiocco nevoso involto in diversi strati più o meno diafani. Questa osservazione già stata fatta da Cartesio (1) fu fra i moderni e insigni presa novamente dal Volta in considerazione, il quale da questi caratteri apparenti ha principalmente desunta la sua ipotesi, ch'ebbe per un tempo della celebrità. Ma a mio avviso su questi stessi caratteri non è stata finora bastantemente fissata la nostra attenzione di maniera che sono per dimostrare desumersi dai medesimi che il grano di grandine non può derivare da una semplice successiva congelazione di vapori sopra un centro comune, ma derivare unicamente da una o più gocciole d'acqua gelate successivamente, e formanti il nocciolo bianchiccio, opaco e molle involto ne' diversi strati di ghiaccio più duro e trasparente.

Devo però qui sulle prime confessare che quando fino dal 1817 (2) mi feci a proporre alcuni dubbj sull'ipotesi del Volta, producendo al tempo istesso una mia nuova spiegazione intorno alla formazione della grandine; sebbene avessi adottata fin dall'ora quella causa medesima che sono ora per riproporre convalidata forse da altri migliori argomenti; mi era però attenuto all'opinione generalmente invalsa, e dal Volta stesso specialmente appoggiata, che la grandine derivasse per lo più dai vapori acquei gelati. L'accoglienza che trovarono

(1) *Meteororum* Cap. IV. §. 3.° *Quomodo in nubibus particulæ glaciei multæ simul in floccos congregentur. Et quomodo isti flocci in nivem, vel pluviam, vel grandinem cadant.* §. V. *Cur crassiora grandinis grana in superficie sint pellucida, et intus alba. Et cur fere tantum in aestate decidat talis grando* ecc.

(2) Giornale di Fisica di Pavia anno 1817, pag. 348 e 422. Altra edizione fatta dal tipografo Manini in Milano 1825 con alcune variazioni in aggiunta alla Memoria del C. Volta *Sulla formazione della grandine.*

presso i Fisici que' miei dubbj, e quella mia novella ipotesi, mi diede spinta a pubblicare la presente Memoria.

I vapori acquei esistono nell'atmosfera sotto due forme, o invisibili, aeriformi, ed espansibili; oppure resi visibili, vescicolari, o concreti per diminuita temperatura, o per diminuito spazio, e questi secondi possono restar sospesi nell' atmosfera medesima allo stato liquido, o allo stato solido, oppure soffrire una lentissima discesa. Ma queste molecole vaporose all'atto che gelano quando la loro temperatura è giunta allo zero del termometro di Reaumur, e centigrado, o più sotto, essendo la congelazione una vera cristallizzazione, devono unirsi insieme, e formar quelle figure loro proprie di aghi, di prismetti, o di stellette, che in tante guise poi si connettono, e si confondano, come avviene in qualsiasi altra cristallizzazione, e come già Cartesio nel luogo sopra citato aveva ben fatto rimarcare.

Risulterà dunque una massa bianca ed opaca da questi infinitamente piccoli cristalli che si trovano sparsi nell' atmosfera, e ad una certa distanza fra loro, che riuniti formerebbero una specie di fiocco di neve, perchè diffatti anche la neve non da altro deriva. La sovrapposizione di altre ed altre molecole vaporose e gelate non farà che aumentare il volume del primo embrione, ma non potrà mai produrre degli strati distinti e diafani, non essendo il tutto che un ammasso, come dissi, più o meno confuso di piccolissimi cristalli intersecati dall' aria atmosferica.

E per verità si sogliono distinguere in qualunque corpo della natura li diversi strati di cui fosse formato, appunto dalle diverse apparenze che essi presentano, sia nel colore, o nella sostanza, o da un distacco fra le parti omogenee, o dall' interposizione fra queste di una estranea sostanza; ma se ad una pallottolina di neve altra neve vi si aggiunga, e se ne formi una palla più grossa come se a cera vi si aggiungesse altra cera, si formerebbe un tutto uniforme ed omogeneo, senza distinzione di sovrapposizione di parti. Come dunque avverrà che in una massa di vapore gelato sovrapposto ad altro consimile vapore si possano distinguere le diverse sovrapposizioni, che effettivamente vi si veggono; mentre generalmente nella grandine si distingue il nucleo dai diversi sovrapposti strati mediante il passaggio dal ghiaccio spungoso e opaco all' altro compatto e trasparente?

Se si forma una mescolanza frigorifica in un bicchiere, si vede la parte esterna di esso ricoprirsi di quel vapore prima invisibile, e gelarvi aderente in figura di brina: continuando il freddo s' ingrosserà quella crosta bensì, ma non sarà che un unico strato sempre uniforme e più grosso, e non mai interposto da lamine, o strati diafani. Lo stesso succede d'inverno nell' interiore delle nostre abitazioni sulla superficie dei vetri delle finestre. Anche la brina che ho nominato deriva da vapori, che si gelano naturalmente in contatto di altri corpi resi alquanto più freddi per irradiamento, ossia è rugiada gelata: le nebbie, e le nubi stesse producono un eguale effetto al contatto dei corpi terrestri, sia che si trovino nell'atmosfera allo stato di congelazione, sia che conservino lo

stato detto vescicolare; e ben anche si suppone dai Fisici, quando sono ridotte a minime goccioline d'acqua, che possono resistere anche a molti gradi sotto il termine della congelazione (1); come è noto succedere anche all'acqua raccolta in massa più o meno notabile.

La grandine dunque dovrebbe essere sempre somigliante a pallottoline di neve, o al *grésil* dei Francesi che noi diremmo nevischia, o nevischio (2) qua-

---

(1) Questo fenomeno di gocciole d'acqua rimaste liquide nell'atmosfera sotto il termine della congelazione, pare che fosse già stato osservato da Cartesio, sebbene sfuggito in seguito a tutti gli altri fisici osservatori. *Meteororum* Cap. VI, §. 8.° *Ne autem me hæc fingere, vel ex levi tantum conjectura scribere putetis, referam ea quæ proxima hyeme anni* 1635, *Amstelodami, ubi tunc eram, circa hanc rem observavi. Quarto Februarii, quum dies admodum frigida præcessisset, vesperi paululum pluviæ decidit, quæ in glaciem vertebatur simul ac terram contingebat: postea sequuta est grando exigua, cujus grana, quæ ejus magnitudinis erant quam repræsentatam videmus ad H* (poco più di un grano di miglio), *ejusdem pluviæ guttas in aëre gelatas arbitrabar. Tamen loco illius figuræ accurate rotundæ, quam sine dubio hæ guttæ ante habuerant, notabiliter ab una quam ab altera parte planiores erant; ita ut figuram fere similem haberent parti oculi nostri, quam vulgò crystallinum humorem dicimus* ecc.

(2) Questo vocabolo tanto in francese come in italiano è alquanto indeterminato; però mi pare potersi ritenere questo per dinotare quello stato intermedio fra la neve e la grandine, che partecipa or più, or meno dell'una e dell'altra, e che può avere origine da quelle cause medesime che producono la neve, o la grandine. Stimo d'insistere su questa definizione, per togliere gli equivoci. Nel *Dizionario universale critico-enciclopedico* dell'abate Alberti (Lucca 1803) si definisce dietro l'autorità del Vocabolario della Crusca, la *nevischia*, o il *nevischio* il nevicare in poca quantità; ma l'esempio che ivi si cita indica piuttosto una specie di grandine nevosa, ossia il *grésil*, che appunto cade di primavera. Nel *Grande Dizionario italiano francese* dello stesso Alberti (Bassano 1811) si traducono que' due vocaboli per *bruine, petite grêle fort menue et fort dure*, che si traduce poi per *neve forte, neve di Corsica*, lo che pare in contraddizione, e tanto più che i derivati *grésillement* e *grésiller* si traducono *nevajo, nevazzo* e *nevicare:* ma poi si aggiunge *grésiller signifie faire que quelque chose se fronce, se retrécisse, se racornisse, se retire*... in italiano *aggrovigliare*, che vuol dire *ritorcersi in se stesso . . . aggrovigliato, raggrinzato*, o *ristretto insieme*, che secondo me è proprio del *grésil* di presentare come una piccola pallottola di neve compressa.

Nell'*Enciclopedia metodica* (Parigi 1819, Physique art. Grésil) si traduce in latino *grando minutissima*, in tedesco *graupen hagel* ossia *petite grêle fine et menue*. Si soggiunge fra le altre distinzioni, che il *grésil* cade ordinariamente d'estate sulle alte montagne . . . che qualche volta è mescolato colla neve, e che la grandine che cade d'inverno nella parte settentrionale dell'Europa, non è per lo più che *grésil*. Si continua a dire » che non solamente il » *grésil* diversifica dalla grandine per la grossezza, ma n'è ancora differente nella sua confor- » mazione. I grani di grandine hanno una forma regolare, rotondata; sono coperti di due » sostanze: l'una porosa, e opaca al centro; l'altra solida, e trasparente alla superficie. Il » *grésil* è angoloso, tenero e poroso . . . Volta e alcuni altri fisici riguardano il *grésil* come » la sostanza che forma il nocciolo della grandine . . . altri presumono che il *grésil* non sia » nè neve, nè ghiaccio, ma delle gocce d'acqua formate dalle nubi che si sono congelate » dopo la loro formazione . . . Saussure pensa che il *grésil* si formi d'estate nelle più alte » regioni dell'atmosfera, e che non si cangi in grandine, che quando attraversa prima degli » strati d'aria abbastanza caldi per contenere dell'acqua sotto forma fluida, ed in seguito » altri strati abbastanza freddi per congelare quest'acqua ecc. »

lunque fosse le sua grossezza, e non distinguersi punto il nucleo dagli strati concentrici, poichè per l'intrecciamento e sovrapposizione degli infiniti aghi, o prismetti, o stellette, l'aria vi resta imprigionata.

E sebbene nella supposizione che la grandine si formi per esempio ad una altezza dove sia ridotta alla metà la pressione atmosferica, potesse alcuno sospettare che nella discesa dovessero quelle soffici pallottoline alquanto comprimersi sia per la pressione dell'aria esterna, la quale non comunicasse liberamente coll'interna, sia per un leggiero urto contro la massa aerea sottoposta a cui s'appoggiano nel discendere; questa compressione però sarà in generale leggerissima, e in nessun caso potrà esser tale da espellere tutta l'aria interposta, e ridursi diafane, così vediamo potersi comprimere la neve più o meno artificialmente senza mai darle l'apparenza di ghiaccio solido, e diafano; ma ancorchè si giungesse a ciò ottenere, sarebbe sempre un unico strato omogeneo che si formerebbe. Quel colore bianchiccio proprio della neve, e della brina, e dei vapori in qualunque modo gelati è dovuto a quella causa medesima che rende bianca la spuma dell'acqua per l'interposizione di tant'aria da cui nascono infinite riflessioni, e rifrazioni della luce, come è notissimo.

Se si aliti sopra uno specchio, le molecole vaporose trovandosi fra loro ad una certa distanza, si depositano pure nell'egual modo su quella fredda superficie, ma se coll'alito si continui a sovrapporre molecole a molecole, o se con un dito passatovi sopra si riuniscano quelle molecole sparse, si produrrà uno strato sottile di vera acqua, la quale se venisse a congelare presenterebbe una sottilissima crosta di vero ghiaccio diafano; mentre se quel vapore depositato sullo specchio fosse gelato prima, non avrebbe presentata una crosta continuata. Anche il vapore che naturalmente si deposita e gela sui diversi corpi, se per giornate più calde viene a fondersi, e quindi a nuovamente gelare dall'aspetto bianchiccio, opaco e farinoso, passa a quello diafano e duro, ossia allo stato di vero ghiaccio. Possiamo imitare questo naturale effetto riscaldando coll'alito della bocca o in qualunque siasi altro modo facendo fondere il vapore gelato dei vetri delle finestre, che ritornando a gelare rimane diafano.

È dunque di necessità che acciò i vapori disseminati prima nell'aria possano convertirsi in ghiaccio trasparente più o meno, debbano prima riunirsi fra loro, e passare allo stato concreto d'acqua in un volume di certa estensione, cioè in una vera goccia d'acqua più o meno grossa, per cui le molecole trovandosi del continuo all'immediato contatto di altre, ed altre consimili nella loro cristallizzazione formino un tutto omogeneo e diafano, come era il liquido da cui provenivano; nella guisa che lo zuccaro in polvere, o in pane diversifica da quello detto candito, ossia cristallizzato in massa regolare e trasparente. Passa dalla cristallizzazione de' vapori a quella dell'acqua la diversità che passa dal vetro pesto al vetro intiero.

Almeno questo nocciolo nevoso che quasi costantemente si trova verso il centro della grandine avrà avuto origine da vapori congelati, come in quasi tutte le ipotesi finora si è ammesso; ma neppur questo io concedo, e lo provo.

Non rare volte sarà occorso di osservare che lasciando spontaneamente gelare dell' acqua rimasta in un bicchiere la parte più interna del pezzo di ghiaccio che ne risulta è la più porosa e opaca, mentre il ghiaccio più solido e diafano è all' intorno formandone come uno strato concentrico. La ragione si è che siccome l'acqua nel convertirsi in ghiaccio aumenta considerabilmente di volume, cioè tra un decimo ed un ottavo, e le prime porzioni che gelano sono quelle della superficie, così di mano in mano che i piccoli cristalli si dispongono secondo l' attrazione delle rispettive faccie e i punti di maggior contatto, l' aria che trovavasi disseminata fra le molecole dell' acqua, e che non ha potuto sortire alla superficie già solidificata, viene cacciata e concentrata verso il mezzo, che è l' ultimo a raffreddarsi e congelare; ed ecco come si deve in ogni piccola o grande massa d' acqua che passi dallo stato liquido al solido trovarsi nel mezzo la parte più fioccosa e molle: l' aria interposta sarà in bolle tanto più piccole, e tanto più somiglianti ad un fiocco di neve, quanto più il volume d' acqua posto a gelare sarà stato minore; quanto più grande sarà stata la pressione sofferta dall' istessa acqua nell' atto di gelare rinchiusa fra le pareti del recipiente; e quanto più grossa la crosta di ghiaccio della superficie, oltre alla maggiore prontezza nell' agghiacciamento medesimo (1).

S' imitano poi perfettamente i grani della grandine introducendo dell' acqua nelle bolle di vetro simili a quelle dei termometri, purchè non sieno piene, onde lasciare lo spazio all' aumento di volume che acquista l'acqua gelando; perchè spezzata quindi la sottile parete di vetro, si otterranno de' globetti di ghiaccio più o meno trasparente con in mezzo quel nucleo più poroso e opaco,

(1) Se dopo gelata una data quantità d' acqua, per esempio in un bicchiere, altr' acqua si aggiunga, e questa pure venga a gelare, si vedrà questa seconda porzione solidificata in uno strato distinto: poichè per lo stesso motivo che si disse da prima, lo strato d' acqua aggiunto cominciando anch' esso a gelare a preferenza sulla superficie, sì per essere immediatamente in contatto coll' aria più fredda, come perchè le molecole dell' acqua avendo il massimo di densità a qualche grado sopra il termine della congelazione devono quelle più fredde, e più prossime a questo termine portarsi alla superficie. Ne deriva dunque anche in questo caso che l' aria ospitante viene o espulsa alla superficie o restando più o meno solida questa, quell' aria imprigionata rimane respinta al contatto del sottoposto ghiaccio già preesistente, di mano in mano, che quelle nuove molecole d' acqua si cristallizzano dall' alto al basso. Dall' interposizione poi di quest' aria fra il primo ghiaccio e il secondo ne risulta quella separazione che chiamiamo strato. Ciò si osserva frequentemente ma in ordine inverso, nella congelazione dei fiumi, dei laghi, e degli stagni, dove gli strati si succedono dall' alto al basso, in un tanto maggior numero, quanto più il freddo è continuato ed intenso, e ciò avviene perchè quell' aria che nell' esperienza del bicchiere si sarebbe sprigionata alla superficie ancor liquida; nel caso dei laghi e fiumi si trova impedita dallo stato superficiale già gelato che la trattiene sotto di se; ond' è che ad ogni nuova congelazione pel freddo propagato dall' alto al basso in grazia delle diverse vicende atmosferiche, pel variare cioè delle temperature, cagionato anche dal semplice alternare del giorno e della notte, l' aria viene sorpresa e trattenuta immediatamente sotto il ghiaccio formatosi nei dì precedenti. Si consulti a questo proposito la Biblioteca Universale di Ginevra T. XIX, pag. 248. *Circostanze che accompagnano la formazione del ghiaccio sulle acque tranquille.*

che forma appunto il nucleo e lo strato della grandine. Anzi riesce meglio l'esperienza introducendo l'acqua nella porzione che più s'accosta alla globosa della vescica natatoria di alcuni piccoli pesci, sospesa all'aria fredda sotto *zero*, perchè in queste la estensibilità dell'involucro dà luogo all'aumento di volume che vi acquista dentro l'acqua gelando. In queste esperienze però è sempre uno solo lo strato che ricopre il nucleo a differenza della grandine che talvolta è ricoperta di più strati per le ragioni che dirò in seguito. Ma anche questi diversi strati io li poteva facilmente ottenere artificialmente se pel centro di quel globetto di ghiaccio io faceva passare un filo di ferro arroventato; oppure avendo formato una pallottolina di neve io la attraversava con un sottile e lungo stecco di legno; e quindi mentre in un rigoroso inverno la temperatura all'aria libera era da 10 a 15 gradi sotto *zero*, teneva fra le dita l'estremità di quel filo di ferro o di quel fuscello, e faceva con essi girare intorno o il globetto di ghiaccio, o la pallottolina di neve, come se fossero sopra un perno; versandovi di tempo in tempo con un orciuolo una gocciola dell'acqua ivi contenuta mista a neve per conservare la temperatura della congelazione: in tal guisa l'acqua in breve tempo vi gelava sopra formandovi altrettanti sottili strati, quante erano le gocciole versate, e imitando così li diversi involucri della grandine. Se dunque artificialmente si può imitare la grandine, perchè non si produrrà anche naturalmente nella stessa guisa? Coloro che opinano derivare la grandine immediatamente dai vapori e non da acqua già formata, tenteranno invano con tutto il freddo loro disponibile di radunare una massa vaporosa somigliante alla grandine.

Sia dunque che la congelazione abbia luogo ne' vapori già esistenti nell'aria allo stato liquido o vescicolare, o che succeda in quelli ancora invisibili ed elastici che si precipitano al contatto di un corpo più freddo, non mai potranno essi produrre una massa solida e diafana, come il ghiaccio proveniente da gocciole di acqua, e il Volta invano si è studiato di far distinzione fra i diversi vapori, onde dare maggior verosimiglianza alla sua ipotesi; ed anche non sempre caratterizzando bene queste diverse modificazioni. La lingua italiana quanto ricca in tutte le altre parti, altrettanto è mancante di termini per esprimere le diverse modificazioni che soffrono i vapori ai diversi gradi di freddo: prova che è una lingua nata in paesi temperati. Anche la lingua francese si è veduta mancante di vocaboli per esprimere alcune di queste stesse modificazioni occasionate da' freddi ancor più rigorosi, come si ricava dalla relazione datasi del viaggio di Scoresby (*Tableau des Régions arctiques*, *Annales de Chim. et Phys.*, Tom. XVIII, pag. 38) in cui dall'illustre redattore si sono dovuti impiegare i vocaboli inglesi (Vedi anche sul grado di freddo osservato da Wilson: *Bibl. Brit.* T. VII). Secondo il Volta i Francesi chiamano *gelée blanche* o *givre* quello che noi diremmo nebbia gelata, o specie di brina. Il *grésil* secondo lui sarebbe da noi detto neve gelata, ma meglio nevischio. Dove poi sembra che il Volta abbia preso equivoco in quanto al modo di sua formazione si è riguardo al *verglas* che noi diciamo gelicidio.

« Abbiamo, dice egli, un esempio del coprirsi per l'umido grande dell'aria, « di una lamina o crosta di ghiaccio sodo, anzichè di brina, o di *givre* alcuni « corpi, come le colonne, i pavimenti, le muraglie, i vetri delle finestre, quan- « do appunto avendo essi concepito e ritenuto un freddo di alcuni gradi più « forte del zero di Reaumur trovinsi esposti ad un aria sciroccale, cioè assai « più calda, e molto umida senza però essere nebbiosa. Il gelicidio nasce a « dirittura dal disfacimento del vapor elastico difuso nell'aria serena, il quale « si depone precipitandosi, e forma uno strato, o lamina unita sulla superficie « dei corpi assai più freddi di esso, e dell'aria, ed ivi vien tosto per tal freddo « rappreso ed indurito in ghiaccio. Ora nei grani di grandine, che mostransi « più trasparenti che opachi, in cui sono più le croste durissime di ghiaccio « sodo, che le parti bianchiccie e molli, o spugnose, appare che questa del « gelicidio ha prevalso all'altra foggia di congelazione. »

Se il gelicidio si formasse, come il Volta suppone, dovrebbe lo stesso succedere verificandosi appunto le circostanze da lui assegnate sull'esterna superficie dei recipienti di vetro o di metallo nei quali fosse una mescolanza frigorifica molto più fredda dell'aria circostante; mentre, come già dissi, non si vede formarsi una lamina, o crosta di ghiaccio sodo e trasparente, ma un rivestimento a somiglianza di brina o di *givre* cioè opaco e farinoso, sebbene alquanto più denso e compatto per essere stata rapida la precipitazione dei vapori. Gli Accademici del Cimento avevano già ben distinta questa precipitazione (*Saggi di naturali esperienze; ottava esperienza intorno al ghiaccio naturale*) paragonando quell'appannamento ad un fumo nebbioso ed umido gelato a mo' di rugiada, e come polvere di vetro pesto. De Mairan (*Dissertation sur la Glace.* T. II, sect. IV, Chap. 6.°; *De la glace ou de l'espèce de neige qui s'attache aux murailles, après les longues gelées pendant le dégel*) aveva ben distinto quando nevoso, e quando trasparente compariva quel gelicidio, essendo necessaria un'antecedente fusione, che gli Accademici del Cimento dicevano *didiacciamento*, e come ho già fatto rimarcare; per cui quell'umidità che si attacca ai corpi più freddi ritorna a congelare sia per freddo maggiore sorvenuto nell'aria stessa ambiente, sia per la temperatura più fredda dell'interno del corpo su cui si era deposto, e che ha prevalso. De Luc (*Idées sur la Météorologie* §. 611) aveva anch'esso ben distinto il *verglas* dal *givre*: « quanto al *verglas* ve n'ha di due specie, di cui l'una si forma sui corpi molto « raffreddati, quando sorvenga un cambiamento improvviso nell'aria che la « renda al tempo stesso più umida, e più calda di questi corpi: allora i vapori « decomponendosi al loro contatto, *convertiti prima in acqua* vi si gelano, e li « coprono di una crosta di ghiaccio: ma vi è un'altra sorta di *verglas* ecc. . . »

Anche recentemente Pouillet (*Élémens de Physique.* T. II, P. II.ª pag. 578) definisce il *verglas* uno strato di ghiaccio unito, sottile, trasparente, che copre la terra, e talvolta anche le piante, e tutti i corpi sul suolo. La condizione necessaria alla sua produzione è che l'aria sia abbastanza calda per dar luogo alla pioggia, e che il terreno sia assai freddo per congelare questa pioggia a misura che cade.

Il Dizionario di Gehler all' articolo *Glatteis* steso da Honer così dice:

Glatteis in tedesco, *glacies tenuis corporum superficies inducens* in latino, *verglas* in francese, *glazed frost* in inglese, (e possiamo aggiungere *gelicidio* in italiano) è quella sottile crosta di ghiaccio che talvolta ricopre i selciati, i pavimenti, e le muraglie. Si forma esso comunemente sulle strade al mitigarsi del freddo allorchè la pioggia dotata di una temperatura vicina alla congelazione, o anche mista di gocce agghiacciate viene a contatto col suolo raffreddato al di sotto del gelo. In siffatte circostanze anche il ghiaccio medesimo e la neve vengono rivestiti di una cotal crosta. Sulle muraglie può questo gelicidio prodursi anche per la pioggia che vi venga gettata contro, ma principalmente vi si forma per lo agghiacciarsi dei vapori acquei, contenuti nell' aria umida molto, ma anche meno fredda, ed i quali si depongono su quelle pareti già molto più raffreddate. Si distingue esso dalla *brina*, e dalla nebbia gelata, e dal *frimas* dei Francesi pel suo liscio e per la sua compattezza; perciocchè in grazia dell' eccedente umidità dell' aria, e perchè dopo essersi deposto non agghiaccia già, lasciando lo stato di vapore ma bensì quello di acqua liquida, esso forma una unita e trasparente pellicola di ghiaccio; laddove in quelle altre deposizioni le minime separate masse dei vapori visibili si attaccano e si uniscano a modo di piccoli cristalli, e così producono un opaco rivestimento simile a neve (*Dizionario di Fisica* di Gehler. T. IV, pag. 1601 edizione del 1825 e seguente).

Ho voluto insistere molto su questa distinzione perchè nell' ipotesi del Volta, e di chiunque altro che fa derivare la formazione degli strati concentrici diafani della grandine da vapori gelati, si possa riconoscere l' impossibilità di questa formazione.

La trasparenza della grandine può variare secondo la quantità d' aria che può rimanere interposta fra li diversi strati, e sarà stata più o meno rapida la congelazione. I grani più piccoli sono anche i più diafani ma in generale questa trasparenza non è mai così grande come nel ghiaccio che lentamente si forma, o come si scorge in quelle gocciole di rugiada, o di brina antecedentemente fusa dal calore solare, le quali tornano a gelare sulle foglie dei cavoli o pendenti dagli steli dell' erbe, o dai rami degli alberi. È osservazione già stata fatta da Mairan (*Dissertation sur la Glace*) e quindi da Leslie (*Sur un nouveau procédé de congélation artificielle* Bib. Univ. T. VIII, pag. 203; vedi anche *Sulle variazioni che presenta la congelazione dell' acqua secondo le circostanze, di Duhamel.* Bulletin de De Ferussac, I.re Sect. Avril 1831, pag. 243), che quando l' acqua ha acquistata una temperatura eguale in tutta la massa, il che nelle masse molto piccole è più facile a succedere, i primi cristalli che si formano a guisa di lamine sottilissime, e di lunghi aghi, o di piume, s' internano, e si prolungano nella massa stessa più o meno secondo che la congelazione succede con minore o maggiore rapidità. Secondo la teoria del Volta come mai con soli vapori precipitati sopra altri vapori già prima, o dopo gelati, come concepire strati diversi dal primo nucleo nevoso formato anch'es-

so da eguali molecole vaporose? Ma supposti anche questi diversi strati come provenienti dal rapidissimo andare e venire ossia dalla danza di quel primo nucleo dall' una all' altra delle due nubi elettrizzate in senso opposto; siccome il Volta suppone che per l' ingrossamento di quello si richieda la sospensione nell' aria anche talvolta di molte ore, così questi strati, o sovrapposizioni di nuovi vapori dovrebbero essere infiniti, e perciò impossibili a discernersi in una massa di poche linee od anche di un pollice e più di diametro; mentre distintamente se ne contano pochi in ogni grano qualunque sia il suo volume.

Nella tavola delle osservazioni meteorologiche che si fanno al convento di S. Bernardo sotto il mese di gennajo 1822 vi si nota che il vapore gelato attaccato alle finestre del refettorio aveva quattro linee di spessore, e in un appartamento al piano terreno era di otto linee al di dentro dei vetri; ma non si parla di diversi strati.

In altre circostanze questi strati della grandine non sono più tanto distinti, e il ghiaccio è semiopaco: questo può succedere in due modi: cioè o che la congelazione è stata rapidissima, trovandosi forse già le gocciole d' acqua ancora liquide sotto il termine della congelazione di molti gradi, prima che abbiano cominciato a gelare; oppure che quella grandine è un aggregato di più minute gocciole già gelate e ad una temperatura di alcuni gradi sotto il termine della congelazione conglomerate e cementate con successivi vapori precipitati, o con altre gocciolette ancor liquide che vi si congelano, come si dirà in appresso. Che i vapori gelati in aria vi possano rimaner pensili, o almeno in atto di una lentissima discesa se ne ha una prova nel fenomeno ottico degli aloni che si attribuisce a piccoli aghi, o prismetti solidi di ghiaccio, i quali vi potranno rimanere sospesi, per quelle medesime cause per le quali il possono i vapori non gelati: sia ciò per l' azione diretta del sole il quale scalda più i vapori che non l' aria circostante, ma sempre sotto il termine della congelazione, sia per colonne d' aria ascendenti, sia pel calorico oscuro e radiante dalla terra, sia per calorico che si sviluppa nel passaggio del vapore da aeriforme a liquido, o da liquido a solido, sia per attrazioni o ripulsioni elettriche ecc. (*Sull' ascensione delle nubi nell' atmosfera, di Fresnel.* Bibl. Univer. T. XXI, pag. 256. *Sulla sospensione delle nubi, di Gay Lussac.* Annales de Chim. et Phys. T. XXI, pag. 59). Vediamo tutto giorno nell' aria illuminata da un raggio di sole rivolgersi e salire la polvere che in paragone dei vapori acquei è composta di molecole ben più pesanti e grossolane, perchè scaldandosi quel polviscolo molto più dell' aria diafana, comunica questa sua temperatura all' aria stessa ambiente, formandosi altrettante piccole atmosfere all' intorno, le quali acquistando un moto ascensivo trasportano seco il corpo riscaldato, e riscaldante; come si slanciano nell' aria le scintille spiccatesi da un tizzone acceso. Seneca aveva già in parte notato il duplice riscaldamento delle nubi proveniente dal sole, e dal calorico radiante del suolo, quando disse (*Natur. Quæst.* lib. VI, cap. 8.°): *radii solis a terra resiliunt, et in se recur-*

runt. Horum duplicatio proxima quæque a terris calefacit. Quæ ideo plus habent teporis, quia solem bis sentiunt.

ARTICOLO II.

Della figura della Grandine.

Considerata la struttura interna, passiamo a considerare la figura della grandine. Questa è generalmente più o meno globulosa, e tanto più s'avvicina alla perfetta rotondità quanto più è piccola; quanto più è grossa presenta alla sua superficie delle gobbe e prominenze: talvolta compare di figura più o meno schiacciata, e in alcuni casi anche in pezzi piramidali. Ma l'osservazione più importante è quella stata fatta primamente da Senebier nella sua Memoria sui mezzi di perfezionare la Meteorologia (*Journal de Physique*, anno 1787, T. XXX, pag. 337) parlando della grandine dice: « I grani di grandine gelati alla su-« perficie, e fluidi al centro annunciano una congelazione rapida; ma suppon-« gono ancora che quest'acqua fosse stata già riunita in grosse gocce, e vi « sono diversi casi nei quali la grandine cade asciutta senz'acqua: la pioggia « comincerebbe ella allora a formarsi nelle regioni più elevate? Ma come si « gelerebbe ella nelle regioni le più basse che sono allora ben calde? » Un fatto di questo genere viene riferito anche da Dolomieu nella sua *Descrizione delle Isole di Lipari*, il quale narra che ivi durava ancora la memoria del temporale avvenuto l'11 ottobre 1692: il mare infuriò allora terribilmente, e caddero dei pezzi di grandine della grossezza di 5 libbre, di forme irregolari, e a punte acute con una bolla aerea nel mezzo rassomigliante ad un occhio. (De Buch, *Sulla grandine*, nelle Memorie dell'Accademia di Berlino per gli anni 1814 e 1815, pag. 79). Quel vacuo rimasto nel mezzo della grandine indicherebbe lo spazio occupato prima dall'acqua non per anco congelatasi, e che se n'era escita nello spezzamento dei grani. Posso anch'io assicurare d'avere alcune volte osservato al principio d'un temporale cadere misti a quei goccioloni d'acqua soliti a precedere la grandine alcuni grossi grani non per anche compiti, perchè rompendosi nella caduta, mostravano che la congelazione non era ancora penetrata nel mezzo, presentando come un guscio gelato pieno d'acqua ancor liquida; anzi una volta mi è avvenuto di raccogliere un grano di grandine spaccato in due, e vuoto nel mezzo, ma con attaccati ancora da un lato i due gusci a somiglianza quasi di una conchiglia bivalve. Talvolta la grandine cade coperta da una specie di polviscolo ghiacciato, talchè si direbbe infarinata ovvero inzuccherata, cioè coperta da vapori congelati nel passaggio attraverso l'aria a guisa di brina, ed è quando cade asciutta, cioè non mista a gocciole d'acqua (come già fece rimarcare Senebier) mentre queste nel passaggio la lavano, dirò così, rendendola più trasparente, la quale trasparenza può essa grandine acquistare anche dopo qualche tempo in terra per un principio di fusione.

Tutte queste modificazioni mi sembra che non potrebbero mai aver luogo se provenisse la grandine da un ammasso di vapori sparsi nell' atmosfera, e formanti le nubi stesse del temporale, i quali si trovassero già gelati, o si gelassero all' atto di formare il grano della grandine. Supponendo invece, come dissi che il grano della grandine derivi da una gocciola d' acqua già formata, come nelle pioggie comuni, la quale nella sua caduta venga rappresa da un grado di freddo molto più intenso che incontra, tutte queste diverse figure che può assumere rimangono facilmente spiegate.

Abbiamo detto in primo luogo che la figura della grandine tanto più si accosta alla rotondità quanto più è piccola: ciò avviene perchè supposta rotonda anche la gocciola d' acqua, le irregolarità che nascono nella figura per l' aumento di volume che acquista gelando, meno si rendono sensibili quanto più piccola è la massa che gela. Ora a tutti è noto che gelando l' acqua in un recipiente qualunque, la sua superficie non si mantiene più ad un perfetto livello, ma quà e là e specialmente nel mezzo s' innalza in piccole irregolari prominenze le quali derivano e dall' aumento di volume che acquista l' acqua gelando, e da quell' acqua ancor liquida la quale si apre un uscita nella crosta superficiale già formata per gelarvisi in seguito, essendo notissimo quanta sia la forza espansiva dell' acqua nell' atto della congelazione.

Quando la massa dell' acqua è notabile ossia quando la grossa gocciola d' acqua gela alla superficie, può succedere che lo sforzo interno la spezzi in più parti, come spezza le più robuste pareti in cui si trovasse ristretta; e come si è riscontrato in alcuni frammenti di grossi grani formati probabilmente dal concorso simultaneo di più gocciole spaccati in aria prima di giungere a terra. Questo non può succedere come si è supposto, per urti, o collisioni fra loro dei grani in aria, perchè movendosi essi ed essendo agitati nel medesimo mezzo non vi sarebbe che un piccolo eccesso di velocità acquistato da un grano sopra un altro nella discesa a cagione di una piccola differenza nella grossezza e nella figura per la resistenza dell' aria, che è in ragione diretta delle superficie, ed inversa delle masse; e per cui l' urto sarebbe sempre poco considerevole e incapace per lo più di spezzare quelle palle di duro ghiaccio. Questi spezzamenti che succedono in aria e prima di toccare il suolo hanno forse dato motivo ad alcuni di dire d'avere osservato talvolta la grandine cadere in masse irregolari ed angolari; potrebbe però una siffatta irregolarità nascere altresì dalla fortuita combinazione di molti pezzi congelatisi insieme durante la caduta; od anche dopo la caduta quelle straordinarie grossezze da alcuni assegnate alla grandine saranno derivate da queste stesse cause. Le gocciole d'acqua finchè sono liquide non possono mai cadere tanto ingrossate per fortuite combinazioni, perchè nell' urto contro l' aria, cadendo si sparpagliano, nella guisa che versando da un' alta torre un secchio d' acqua tutto in una volta, prima di arrivare a terra si suddivide in altrettanti minuti spruzzi: anche la neve non può in larghe falde riunirsi verso terra, perchè la stessa resistenza dell' aria rompe quella debole coesione di parti. Quei grossi goccioloni d' acqua che per

lo più precedono la grandine in un temporale non vengono dall' aria nella caduta suddivisi, perchè essendo già vestiti di una sottil crosta di ghiaccio, questa o si rompe, o si fonde cadendo sul suolo ancor caldo, o si era fusa in aria un momento prima della caduta.

Quello dunque che succede, come dissi, sulla superficie d'un recipiente dovrà succedere egualmente su tutta la superficie della gocciola d'acqua, e presentare delle protuberanze tanto maggiori quanto più è notabile la massa dell' acqua nell' atto della caduta. Ma siccome in generale queste gocciole d' acqua non sono molto voluminose, perciò il raffreddamento essendo più pronto, e perciò più presto passando dalla superficie al centro, il grano di grandine non si spezza in più parti, ma screpula in diversi punti della sua superficie per dare luogo anche all' acqua rinchiusa di dilatarsi gelando: le gocciole poi di pioggia successiva che vi cadono sopra e l' investono, dove più o meno si accumulano ivi producono più o meno di prominenze.

Esaminati con attenzione alcuni grani nei diversi temporali vi si scorgono degli accidenti tali che sono manifeste prove di quanto asserisco, ma che difficilmente si potrebbero descrivere in poche parole: in somma la grandine è pioggia che si congela cadendo. Se questa pioggia è accompagnata da venti come per lo più suole succedere, e da venti turbinosi, rotolandosi le gocciole nella caduta, conserveranno più o meno la forma globosa; ma se cadrà tranquillamente, allora la resistenza che le gocciole proveranno contro l' aria, resistenza che rende uniforme lo stesso loro moto accelerato dalla caduta, farà sì che la gocciola non più globosa, ma schiacciata, o piramidale dovrà conformarsi (1).

Se rapida sarà la congelazione, e senza notabile agitazione nell' aria, si otterranno invece di globi dei dischi più o meno compressi perchè all' atto che si gela la superficie inferiore di quella gocciola (già anch' essa alquanto schiacciata per la resistenza dell' aria nella caduta, come si vedrà in seguito) aumentando contemporaneamente il volume presenta una maggiore resistenza all'aria, e per cui il suo moto viene alquanto ritardato e il resto dell' acqua formante la goccia ritenendo tutta la sua velocità primitiva si deprime, e si allarga sulla crosta solida che si forma. Se più lenta sarà la congelazione ma continuata per un tempo sufficiente durante la caduta delle gocce d' acqua se ne potrà ottenere forse una grandine che indicherà più o meno la sua forma propria di cristallizzazione; per non trovarsi quelle piccole masse d' acqua nell' aria al contatto di altri corpi, o fra questi ritenute, come succede sulla superficie del suolo, o nei nostri recipienti. Si aggiunga, come vedremo più innanzi, che la gocciola d' acqua cadendo già ridotta alla temperatura di zero, incontra un' infinità di molecole di acqueo vapore già cristallizzato nella sottoposta nube per

(1) Nella Tavola delle Osservazioni Meteorologiche che si fanno al S. Bernardo (Bibl. Univ. di Ginevra, Luglio 1821) » si rimarca nulla essere a quelle grandi altezze più comune dei » vortici di vento. »

cui di queste se ne inzuppa dirò così, e forman corpo con essa. Vediamo anche nei nostri recipienti quando l'acqua comincia a gelarvisi lentamente ed uniformemente in tutta la massa, partire dalle pareti del recipiente, e dalla superficie dell'acqua dei lunghi aghi e delle lamine cristallizzate, che penetrano nella massa del liquido, e l'intersecano in tutti i sensi ma sempre sotto angoli determinati. Anche il vapore acqueo nell'atto della sua precipitazione e congelazione non presenta una cristallizzazione distinta se non quando succede lentamente, come si scorge d'inverno sulla superficie interna dei vetri delle finestre, o sui rami degli alberi, o sopra altri corpi esposti all'aria (1).

Nei Commentarj d'ottica di Giambattista Venturi (Bologna 1814 pag. 168) per spiegare le iridi inferiori alla principale, e concentriche ad essa si prova che le grosse gocce di pioggia cadendo si schiacciano: questi faceva cadere l'acqua attraverso un alto strato d'olio, per cui gli era facile di seguitarne coll'occhio il lento movimento, e di vederne la figura; ma io reputerei migliore quest'altro modo, e più convincente, e sarebbe quello di far cadere in un tempo freddissimo da un'alta torre delle gocce di sego, o cera appena fuse, quali naturalmente si staccano da un moccolo acceso tenuto inclinato, perchè al basso stando l'aria tranquilla si raccoglierebbero sopra una tela tesa mollemente già solidificate durante la caduta, e presentando quella figura schiacciata propria della grandine nelle stesse circostanze. L'altezza di una torre non sarebbe forse sufficiente per dar tempo ad una gocciola d'acqua di gelare, nei nostri freddi invernali durante la caduta: neppure si potrebbe osservare la cristallizzazione generata in aria di alcuni corpi per esempio dello zolfo, o di alcuni metalli fusi, perchè cadendo diventerebbero solidi alla superficie con troppa rapidità. Seguita poi il Venturi a dire: « partendo da questi principj, e da questi fenomeni è « gioco forza conchiudere, che anche le gocce d'acqua mentre cadono in pioggia « attraverso all'aria debbono esse pure schiacciarsi un tal poco all'alto ed al « basso, sopratutto nelle grosse gocce di pioggia temporalesca, mentre nella « minuta pioggia ordinaria le piccole stille conservano quasi per intero la forma « specifica nata dall'affinità d'aggregazione delle loro particole. Che le grosse « gocce di pioggia cadenti per l'aria vestano la suddetta forma schiacciata, oltre « le sovra esposte ragioni, lo dimostra eziandio ad occhio la figura dei globetti « di grandine. In questi si osservano bensì forme irregolari mostruose, sia per « cagione dell'aggruppamento fortuito di più ghiacciuoli fra loro, sia per l'agi- « tazione che il vento burrascoso eccita nelle bolle d'acqua al momento che sono « poi comprese dal gelo. Ma dove i globetti di una vistosa grandine rimangono « semplici e rotondi, si trovano bene spesso avere una figura compressa, simile

(1) Cartesio già da me citato nel suo Trattato sulle Meteore riguardo alla grandine avea già raccolti i fatti più importanti, molti de' quali furono dai moderni fisici trascurati, sebbene potessero servire alla spiegazione del fenomeno. Così per esempio al Capo VI, §. 8.° (Edizione degli Elzeviri) si legge: *Unde etiam fiat ut quædam grandinis pellucida grana sex exiguos quasi radios ex albissima nive compositos circa se habeant.* §. 9.° *Quare etiam interdum decidant lamellæ glaciei pellucidæ, quarum circumferentia est hexagona* ecc.

« appunto a quella che vestono le grosse bolle d'acqua cadenti per l'olio. New-
« ton attesta frequente essere questo schiacciamento nella gragnuola (*Opticæ*,
« L. I, part. 2.ª prop. 9). Cartesio paragonò tali globetti all'umor cristallino del-
« l'occhio (*Météor.*) e Adanson li rassomigliò ad altrettanti bottoni da veste
« (*Acad. des Sciences*, anno 1769). Il freddo agghiaccia le grosse gocce d'acqua,
« e le indura appunto in quella forma in cui le trova mentre stanno discendendo
« a terra. »

L'osservazione del Venturi era già stata fatta prima dal Padre Ximenes (*Storia Letteraria d'Italia*, 2.ª ediz. di Venezia 1750, vol. I, pag. 280), il quale nel dare la spiegazione di un alone solare opinava che un vento dall'alto al basso, o dal basso all'alto portando le goccioline d'acqua, potesse agevolmente schiacciarle. Nella surriferita Istoria dell'Accademia delle Scienze (Paris 1777, per l'anno 1769, pag. 34), la grandine osservata da Adanson in Parigi fu preceduta da grosse gocce di pioggia fra loro distanti: a queste successe la grandine figurata in piramidi, a sei faccie molto ottuse di sei linee di lunghezza sopra tre di larghezza che durò mezz'ora; e dopo fu susseguita da altra a guisa di bottoni d'abiti di 9 linee di diametro molto trasparente come una lente, che durò per circa un quarto d'ora sempre mista alla pioggia. Riguardo alla molta trasparenza osservata, io non mi crederei obbligato di complicarne la causa col dover supporre, che una minuta grandine formatasi prima a maggior altezza nell'atmosfera si fosse fusa attraversando uno strato meno freddo nell'atmosfera, per tornar quindi tosto a congelarsi; e per cui trovandosi quelle gocciole d'acqua private totalmente d'aria nell'atto della fusione, rimanessero in quello stato novamente congelate e perciò molto diafane. L'acqua privata d'aria artificialmente e posta a gelare nel vuoto non presenta mai un ghiaccio così trasparente come quello che deriva dalla congelazione dell'acqua comune ma gelata lentamente, e spogliatasi naturalmente della sua aria ospitante. Deve notarsi che generalmente in ogni temporale o almeno ad ogni scroscio la grandine che cade s'assomiglia tutta o quasi tutta nella figura, lo che è ben da considerarsi perchè dinota una causa unica e determinata in quelle circostanze, e non già combinazioni accidentali e variate, come i fautori della congelazione di soli vapori nella formazione della grandine hanno voluto supporre.

Potrà ben anco questo schiacciamento dei grani derivare qualche volta dalla fusione a preferenza incominciata verso quella parte che nella caduta percuoteva direttamente l'aria; ma la grandine di figura piramidale regolare mai si potrà spiegare coi soli vapori agglomerati.

Grandini di figura piramidale radiata dal vertice alla base alquanto curva, e che sembravano frammenti di sfera le aveva più volte osservato l'ingegnere Delcross, come lo riferisce anche Arago (*Annuaire des Longitudes*, 1828), ed il Giornale arcadico di Roma (gennajo 1829, pag. 51). Questa qualità di grandine io la suppongo diffatti spezzata in aria per lo sforzo dell'acqua interna nell'atto di congelarsi, ed in cui lo spezzamento sarà succeduto a preferenza secondo l'andamento della cristallizzazione, come Haüy ha insegnato a tagliare i cri-

stalli minerali. Delcross anzi sostiene (Bibl. Univ. T. XIII, anno 1820) che i grani più grossi sono sempre spaccati prima di cadere a terra, e gli sembrava evidentemente che non un urto ma un' esplosione dovea esser stata la forza che aveva prodotto lo spezzamento di quelle sfere gelate. Giova notare contro l' opinione un tempo prevalsa e che io ho combattuta con esperienze dirette, e mediante il mio *Ghiacciometro* descritto nel Giornale di Fisica di Pavia, che il ghiaccio già formato, coll' aumento di freddo non viene più ad aumentare di volume, ma seguita la stessa legge di tutti gli altri corpi solidi che diminuiscono di volume in proporzione: dico ciò perchè da alcuni non si creda derivare questo spezzamento dal freddo maggiore provato dal grano di grandine già formato.

Se la grandine fosse formata da un nucleo nevoso, ossia avesse origine da alcune molecole di vapore gelato, sopra le quali altre ed altre molecole vaporose si congelassero successivamente; per quanto s' ingrossasse il grano della grandine non potrebbe mai per questo motivo spezzarsi in aria prima della caduta. Nè allo spezzamento si richiede sempre un notabile volume nella grandine, ma vi può contribuire anche la rapidità nella congelazione della massa liquida per le ragioni già indicate più sopra. Queste grandini formate da segmenti di sfere non sono poi tanto rare avendole io osservate diverse volte, ed anche ultimamente il giorno 4 di luglio dell'anno 1833 la grandine caduta in Milano era tutta di quella figura, e tale l' osservò anche il chiariss. sig. prof. Belli sebbene molto distasse la sua abitazione dalla mia. Anzi il medesimo mi scriveva il 17 agosto 1832 da Calasca nella Valle Anzasca aver osservato in quel giorno cadere una grandine, la cui forma pareva provenire da gocciole d' acqua che nell' atto del totale agghiacciamento interno si fossero spaccate in diversi pezzi per l' aumento di volume che acquista l' acqua gelando.

Nella maggior parte dunque dei casi nei quali si parla di grandine cristallizzata a piramide, sembra più ragionevole di supporre, che sia quella la figura derivante da uno spezzamento in più parti per una forza che ha agito dall' indentro all'infuori, ossia partita dal centro della pallottola constituente la grandine; e tanto più sono indotto a così supporre, dal riflettere che le figure piramidali indicate da diversi autori, e quelle da me e da altri esaminate, finivano tutte in una base convessa, che sarebbe una sezione della periferia di una superficie globosa; e colla punta più o meno opaca indicante una frazione del nucleo nevoso.

Siccome però non mancano altri autori di riferire alcune grandini di figure così singolari, che non sarebbe possibile di far derivare da segmenti di sfere, così quando mai i casi narrati fossero veri, sarebbe pur forza ricorrere a particolari cristallizzazioni.

Negli *Annales de Chim. et Phys.* Tom. XXI, pag. 155, sulla forma cristallina del ghiaccio si termina col dire « non potersi sperare di trovar de' cristalli rego-
« lari di ghiaccio, che formati lentamente, e ad una temperatura poco sotto di
« quella della congelazione, per disporsi con ordine, ed offrire delle figure geome-

« triche regolari »: ciò a mio avviso particolarmente si deve intendere quando quell' acqua che gela si trova attaccata ad un altro corpo, o ad altro ghiaccio sopra cui è costretta a configurarsi e conformarsi, e per cui non è che nei vapori nuotanti nell' aria che si potrebbe trovare una regolarità di disposizioni ne' piccoli aghi o prismi, formanti stellette o piume, che di mano in mano si precipitano sugli altri corpi, e si riuniscono colle facce più attraenti fra loro. Diffatti se si alita sopra di un vetro, e venga a gelarvisi quel vapore, non presenterà mai le belle cristallizzazioni ed erborizzazioni, che ci presentano li stessi vapori naturalmente e lentamente precipitati sopra la stessa lamina di vetro. La neve nei paesi più settentrionali, ed anche fra noi specialmente sul principio di una nevicata si osserva cadere con figure molto regolari, e queste figure le acquista in aria nell'atto che si congela.

Non diversamente dovrebbe succedere, come già dissi, delle gocciole d'acqua, se la rapidità della congelazione in una massa di gran lunga più considerevole, ed i diversi movimenti e cambiamenti di figura che soffrono nell' atto di congelare, e la sovrapposizione di altre gocciole, non s'opponessero frequentemente alla loro regolare figura, oppure che le facce piane e gli spigoli regolari non venissero per i primi a fondersi ed a guastarne la disposizione simmetrica.

La grandine però stata osservata da Donato Rossetti fino dall' anno 1670, sarà stata piuttosto proveniente anch'essa da frammenti per esplosione di sfere, che non da forme regolari per effetto di cristallizzazione, le quali forme si sarà forse compiaciuta l'immaginazione del professore matematico di travedere più regolari di quello che fossero realmente. Leggesi dunque nelle *Lettere inedite di uomini illustri*, Tom. II, Firenze 1775, pag. 233. « Descrizione di una gra-
« gnuola caduta la sera del giorno 9 dicembre, di figura piramidale colla base
« quadrata, ma però convessa: esaminati tutti i grani raccolti a diverse riprese, e
« che erano qualche centinajo, si trovarono tutti della stessa figura, e prossima-
« mente della medesima grandezza (e poi soggiunge): Per quanto poi valsi a
« ritrarre da una cosa che manca fra mano, questa tal figura era similissima a
« quelle che noi faremmo col descrivere nella sfera il cubo, e dagli angoli dei
« quadrati tirare al centro i raggi, di maniera che si divida detta sfera in sei
« piramidi di quattro facce triangolari piane, e di base quadrata sferica. Questo
« mi ha messo in apprensione che colassù forse sempre per la gragnuola si
« facciano avanti queste piramidi, e che di poi si uniscano in globo nella guisa
« che è verisimile che prima si facciano i raggi, e poscia di questi le stelluzze
« della neve. » Pare però, a mio avviso, che invece succedesse l' opposto, cioè che prima si fosse formato il globo, e da questo spezzato ne siano derivati quei frantumi di forma piramidale.

Nei sopra citati *Annales*, Tom. XXI, si rimarca sulla forma cristallina del ghiaccio, che le molecole dell'acqua gelando si riuniscono sotto angoli di 60° e di 120°, e il dottor Clarke è stato indotto a credere che la forma primitiva del ghiaccio sia un romboide ad angolo di 120° e di 60°; e che i cristalli esaedri osservati da Hericart non erano che secondarj. Checchè però ne sia della varietà

di questi cristalli e delle realtà di alcune straordinarie grandini cristallizzate o a pezzi, alcune poche anomalie non si devono riguardare come sufficienti ad abbattere una teoria che spiegasse i fenomeni più costanti ed ordinarj della grandine per quanto finora si estendono le nostre cognizioni.

Il Volta non ha dirette le sue indagini che sul primo embrione ossia il supposto nucleo nevoso, poco curandosi dell' esterna figura. « Non sono poi mai « (dic' egli) i grani di grandine che si dicono sferici, di una sfericità perfetta, « dalla quale se non si allontanano molto nella maggior parte dei casi, compa- « rendo soltanto od un poco ovali, o sferoidali alquanto compressi; altre volte « ne si mostrano ora schiacciati sopra una faccia e quasi emisferici, ora aventi « più facce, or a forma di lenti ecc., per nulla dire di altre irregolarità più mo- « struose in certo modo, come quando si fan vedere angolosi, cornuti od irti « di più punte: i quali casi rarissimi concepir possiamo che nascano da fortuiti « accozzamenti, dall'aglomerarsi ed inestarsi più grani in uno ecc. siccome di « quelle altre irregolarità meno strane, di quelle compressioni, possono essere « stati causa, o il troppo impeto con cui furono ballottati e lanciati, o dei colpi « di vento, o qualche particolar fusione da essi sofferta sia colassù tra lo danzare « tumultuoso, sia vicino a terra nel cadere framescolati a pioggia, od altro qual- « siasi accidente..... Non facendo per tanto più alcun conto di siffatte varietà, « che nulla cangiano al fondo della cosa. » Questo è quanto restava a provarsi.

Quella specie di guscio o di crosta di ghiaccio accennata da Senebier, e da me più volte rimarcata che involgeva una goccia d' acqua, mi sembra il più manifesto indizio che il grano di grandine non comincia da un minimo embrione ossia fiocco nevoso a cui si sovrappongono successivamente altri strati; ma è formato da una goccia d'acqua che incomincia, come è ben naturale, a congelarsi dalla circonferenza al centro, e non dal centro alla circonferenza come comunemente si crede; è vero però che questo grano può quindi ingrossarsi con altri strati successivi, ed allora la congelazione prosegue dal centro alla circonferenza. Che se rari sono questi esempj di grani non ancora solidificati nel mezzo, si deve riflettere che il primo nucleo della grandine involto nel suo strato diafano essendo quasi sempre di piccola mole, e la causa frigorifica essendo per lo più potentissima, e di una sufficiente durata, deve generalmente compirsi la congelazione prima che cada a terra; quando poi questa causa efficiente è minore, quella superficiale congelazione viene con facilità nuovamente distrutta, e ridotta in acqua nella caduta attraverso agli strati dell' atmosfera sempre caldi nella stagione estiva dei temporali, o attraversando altre nubi inferiori e perciò più calde, che in quel medesimo tempo stanno sciogliendosi in pioggia; nella guisa che talvolta in tutto, od in parte anche la grandine già formata si suole fondere prima di giungere a terra; e come frequentemente si osserva nevicare sul monte, e piovere nella valle.

Sulle cause poi che influiscono nella formazione dei diversi strati sopra un medesimo nucleo di grandine, e sull' ingrossamento ed aglomerazione dei grani, se ne parlerà in seguito.

Gli antichi non avevano trascurato di esaminare la figura della grandine, per cui avevano anch' essi conchiuso che fosse formata da gocce d' acqua: fra questi tre soli ne citerò per terminare questo articolo:

1.° Aristotile distinguea già la diversa figura di congelazione che presenta il vapore o l'acqua. *Meteorologicorum* Lib. I, *Pruina quidem, quando vapor congelatur prius quam in aquam concretus fuerit iterum. Ros autem, cum concretus fuerit in aquam vapor..... Fiunt autem ambo serenitate, et tranquillitate.* (due essenziali condizioni che si ammettono anche dai moderni). Trattando della generazione della grandine, Cap. II. *Inconveniens autem est et congelari aquam in eo qui est sursum loco: neque enim congelatam esse possibile est, antequam facta sit aqua: neque aquam ullo tempore possibile est manere elevatam. At vero neque sicuti guttæ sursum quidem insident propter parvitatem, immorantes autem in aere (sicuti et in aqua terra et aurum propter parvitatem partium sæpe supernatant), sic in aere aqua: coeuntibus autem multis parvis, magnæ deorsum feruntur guttæ: hoc autem non contingit fieri in grandine; non enim coalescunt congelata, uti humida..... Accidit autem in valde altis minime fieri grandinem: quamvis opportebat, quemadmodum et nivem videmus, in altis maxime fieri. Adhuc autem sæpe visæ sunt nubes delatæ cum sono multo secus ipsam terram, ut terribile esset audientibus et videntibus.*

2.° *Renati Des Cartes: Principia philosophiæ. Meteororum* Cap. VI, §. 4.° *Hæc autem grando varia esse potest. Nam primo si ventus frigidus illam efficiens, guttas æque jam formatas deprehendat, globulos glaciei pellucidos, et rotundos efficit, nisi quod interdum ea parte qua illos impellit aliquanto planiores reddat.* §. 5.° *Unde fit ut cum exterior superficies cujuslibet grani, ex glacie continua et pellucida constare consueverit, in ejus tamen centro nonnihil nivis sæpe reperiatur, quod hæc grana frangentibus se se offert.* §. 6.° *Cur ejus grana interdum sint rotunda, et in superficie quam versus centrum duriora? Cur aliquando sint oblonga, et pyramidis habeant figuram?*

3.° *Dechales: Mundus mathematicus* anno 1690. *Tractatus de Meteoris. Dico ergo primo majoris grandinis et glacialis materiam proximam esse aquam. Ex vapore, ex nube, et ex nive non fit glacies, sed ex sola aqua..... Quare puto certissimum esse materiam immediatam grandinis illius glacialis esse aquam jam formatam, et ex grandioribus guttis constantem, si enim minutiores guttæ concrescerent in glaciem uniri amplius non possent (grésil). Tota difficultas in eo posita videtur, ut explicemus quomodo guttæ aquæ jam in aquam addensatæ, in aere detineri possint ut congelentur.*

Fino d' allora dunque si supponea che la grandine fosse formata da gocce d' acqua, e si riconosceva l' impossibilità, che prodotta fosse da soli vapori.

(*sarà continuato*)

PARTE SECONDA

Seguono due Capitoli che continuano la prima Sezione del TRATTATO SUL CALCOLO DEGLI INTEGRALI DEFINITI (*Vedi Fascicolo IV, pag.* 345)

CAPO XIV.

Sulle espressioni equivalenti alle somme delle serie infinite.

Sembrerà che in questo Capo io m'allontani alquanto dal mio assunto esponendo una teorica che sulle prime non vi appare intimamente connessa. Sappiasi invece che in essa si manifesta una delle sorgenti più copiose da cui si derivino valori d'integrali definiti, siccome mostrerò nel Capo seguente dopo che nel presente mi sarò preparato tutto il bisognevole.

124. Rappresentando per

$$\varphi(1)+\varphi(2)+\varphi(3)+\text{- - - -}+\varphi(i)+\text{ecc.}$$

una serie infinita della quale conoscasi il termine generale $\varphi(i)$, ne indicherò la somma colla espressione $\Sigma_1^\infty \Delta i\cdot\varphi(i)$ di cui spiego il significato. $\Sigma\Delta i\cdot\varphi(i)$ (secondo una notazione già usata al num. 60) vuol dire l'integrale finito (che mi giova anche denotare con $F(i)$) di $\varphi(i)$ preso per la variabile i supponendo l'aumento finito eguale all'unità; integrale cui non si aggiunge costante e che però si ritiene indefinito. È poi

$$(1)\qquad \Sigma_1^\infty \Delta i\cdot\varphi(i)=F(\infty)-F(1)$$

cioè la differenza dei valori estremi dell'integrale indefinito, come per gl'integrali definiti continui: anche la notazione in riguardo ai limiti è affatto simile. L'equazione

$$(2)\qquad \Sigma_1^\infty \Delta i\cdot\varphi(i)=\varphi(1)+\varphi(2)+\text{- - - -}+\varphi(i)+\text{ecc. all' inf.}$$

si riconosce vera dietro la generale equazione identica

$$(3)\quad \Sigma\Delta x\cdot\varphi(x+n\omega)=\varphi(x)+\varphi(x+\omega)+\text{- - - -}+\varphi\big(x+(n-1)\omega\big)+\Sigma\Delta x\cdot\varphi(x)$$

che discende dalle prime nozioni del calcolo delle differenze. Infatti se facciasi

$$\Sigma\Delta x\cdot\varphi(x)=F(x,\omega)$$

l'aumento finito essendo ω, è anche

$$\Sigma\Delta x\cdot\varphi(x+n\omega)=F(x+n\omega,\omega),$$

quindi dalla (3)

$$F(x+n\omega,\omega)-F(x,\omega)=\varphi(x)+\varphi(x+\omega)+\text{- - - -}+\varphi\big(x+(n-1)\omega\big).$$

Mettasi in questa $x=a$, e stante il principio adottato per la (1), avremo

$$\Sigma_a^{a+n\omega}\Delta x\cdot\varphi(x)=\varphi(a)+\varphi(a+\omega)+\text{- - - -}+\varphi\big(a+(n-1)\omega\big);$$

la quale, ove facciasi $\omega=1$, $a=1$, $n=\infty$, diventa la (2); l'esservi x piuttosto che i non fa differenza, giacchè anche qui come al num. 1 la lettera di cui si fa uso sotto il segno integrale è destinata a sparire.

125. *Scolio.* A me piace esprimere la somma della serie con $\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \varphi(i)$ piuttosto che con $S\varphi(i)$ come molti analisti, perchè la prima maniera non solo vale per una compendiosa significazione della serie, ma insegna altresì il mezzo con cui la somma di essa serie si ottiene usando il calcolo integrale alle differenze: non è una pura convenzione, è una realtà analitica.

L' equazione (2) è vera quand' anche la serie del secondo membro non appaja convergente, perchè nel primo vi è contemplato il resto posto dopo infinito numero di termini, ed equivale alla quantità $F(x) - R(\infty, x)$ del num. 42. Potrebbe quindi sembrare che una espressione finita risultante dall' operazione indicata con $\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \varphi(i)$ possa essere eguale alla somma di una serie infinita non convergente: conclusione in urto con quanto si è asserito ai num. 39, 40; ma si può osservare nei casi particolari che il valore di $\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \varphi(i)$ non riesce finito e determinato se non quando la serie è convergente: ce ne persuaderemo cogli esempj: e così le riflessioni poste ne' citati numeri ricevono una conferma.

126. Suppongasi che l' operazione indicata con $\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \varphi(i)$ si sappia eseguire passando per l' integrale finito indefinito: sarà questo il mezzo più ovvio a fine di trovare il valore dell' integrale finito definito, e insieme la somma della serie. Così ponendo

$$\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot a^i = a + a^2 + a^3 + \cdots + a^i + \text{ecc.}$$

e sapendosi essere $\Sigma \Delta i \cdot a^i = \dfrac{a^i}{a-1}$ avremo

$$(a) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot a^i = \frac{a^\infty - a}{a-1} = \frac{a}{1-a}$$

quando $a < 1$, e $\dfrac{a}{1-a}$ sarà la somma della serie, come è altronde notissimo. Ma spesso non si sa eseguire l'operazione espressa da $\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \varphi(i)$ perchè non vi è modo di effettuare l' integrazione indefinita: e nello stesso tempo la somma della serie infinita è nota dietro altri principj; allora riesce per questo mezzo noto il valore dell' integrale finito definito che non si sapeva assegnare direttamente. Così facendo

$$\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{a^i}{i} = a + \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} + \cdots + \frac{a^i}{i} + \text{ecc.}$$

non si sa assegnare l' integrale indefinito $\Sigma \Delta i \cdot \dfrac{a^i}{i}$, ma la somma della serie si conosce altrimenti ed è $-\log.(1-a)$; dunque

$$(b) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{a^i}{i} = -\log.(1-a).$$

Dalle formole (ι) del num. 44 si hanno subito le due

$$= \int_0^\infty \frac{\sin\alpha . \cos x + \cos\alpha . \sin x}{a+x} = \sin\alpha \int_0^\infty \frac{\sin x . \cos x}{a+x} + \cos\alpha \int_0^\infty \frac{\sin^2 x}{(a+x)}$$

$$\cos.qx \cdot \operatorname{sen} q = \frac{\operatorname{sen}(q+qx) + \operatorname{sen}(q-qx)}{2}$$

$$(c)\quad \begin{aligned} \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot p^i \cos. ix &= \frac{p(\cos. x - p)}{1 - 2p\cos. x + p^2} \\ \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot p^i \sin. ix &= \frac{p \sin. x}{1 - 2p\cos. x + p^2} \end{aligned}$$

nelle quali deve essere $p < 1$ astrazion fatta dal segno: esse potevano anche dedursi dalle integrali indefinite $\Sigma \Delta i \cdot p^i \cos. ix$, $\Sigma \Delta i \cdot p^i \sin. ix$ che si sanno assegnare (*).

Se nelle (c) si fa $p = e^{-a}$ dove a sia sempre quantità positiva, la condizione $p < 1$ è sempre adempita, e se ne cavano le due

$$(d)\quad \begin{aligned} \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot e^{-ia} \cos. ix &= \frac{\cos. x - e^{-a}}{e^{-a} - 2\cos. x + e^a} \\ \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot e^{-ia} \sin. ix &= \frac{\sin. x}{e^{-a} - 2\cos. x + e^a} \end{aligned}$$

127. Facendo nelle (c) $p = 1$ se ne vedono uscire le

$$(e)\quad \begin{aligned} \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \cos. ix &= -\frac{1}{2} \\ \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \sin. ix &= \frac{1}{2} \cot. \frac{x}{2} \end{aligned}$$

sulle quali abbisognano varie riflessioni. I primi membri di esse sono evidentemente serie infinite periodiche, serie cioè nelle quali dopo un certo numero di termini, questi ritornano cogli stessi valori. Il numero dei termini di cui è composto il periodo dipende dalla costante x: sia $x = \frac{m}{n} 2\pi$, essendo m, n numeri interi, il periodo sarà composto di n termini, perchè l'$(n+1)$esimo termine, cioè $\cos. (n+1) \frac{m}{n} 2\pi$, sarà eguale al primo $\cos. \frac{m}{n} 2\pi$, così l'$(n+2)$esimo sarà eguale al secondo, eccetera. Il vero valore delle somme di tali serie periodiche è secondo l'opinione di Eulero indeterminato: infatti è manifesta in esse la condizione che la somma di tutti i termini del periodo debba essere zero, altrimenti aggiungendosi questi periodi senza fine il valore della serie sarebbe sempre infinito. Ciò posto, il vero valore della serie non può essere che quello il quale risulta dalla somma di alcuni termini del periodo: ma come all'infinito non si vede ragione per cui tal somma debba essere piuttosto di due, che di tre o di tutti i termini del periodo, conchiudeva Eulero doversi il valor della serie intera ritenere indeterminato. Il sig. Poisson (**)

(*) Bordoni. *Lezioni di Calcolo Sublime.* Tom. II, pag. 330: ovvero Memorie della Società Italiana T. XX. pag. 637.

(**) *Journal Polyt.* Cah. XIX, pag. 407, 428.

venne alla stessa conclusione dietro altri ragionamenti. Quello che importa di ben osservare si è che il valore della serie infinita $\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot p^i \cos. ix$, il quale secondo i lodati geometri è indeterminato per $p = 1$, non è più tale quando p, non essendo assolutamente l'unità, ne differisce meno d'ogni quantità assegnabile. Il suo valore allora differisce meno d'ogni quantità assegnabile da $-\frac{1}{2}$ secondo membro della prima delle equazioni (e): quindi, conchiude il Poisson, le equazioni (e) sono vere considerandole come limiti a cui si accostano continuamente le (c) quando p si accosta continuamente all'unità. Tornerò più innanzi a parlare delle formole di limite, come promisi anche al num. 103; giacchè l'argomento è assai interessante, e merita di essere trattato appositamente. Intanto accennerò che più geometri hanno fatto vedere come il valore $-\frac{1}{2}$ è quello stesso che si sarebbe ottenuto prendendo per valore della serie infinita $\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \cos. i \frac{m}{n} 2\pi$ la media aritmetica di tutti gli n valori fra i quali, secondo feci vedere qui sopra, rimane indeterminata la scelta. Poisson chiama la coincidenza di tali risultati una singolarità curiosa: ma Daniele Bernoulli nella sua disputa con Eulero su questo soggetto vi vedea qualche cosa di più: essendo all'infinito, egli dicea, quegli n valori differenti tutti egualmente possibili, il vero valore, secondo principj ammessi in altro ramo di calcolo, sarà il medio di tutti. Una tal maniera di ragionare non piacque ai geometri: e il D'Alembert principalmente (*) la rigettò con asprezza. Si può nondimeno ancora domandare: fu poi del tutto giusto quel rimprovero? il discorso del Bernoulli non rinchiude veramente alcuna forza dimostrativa? non è egli facile trovare qualche luogo in cui Eulero, il suo oppositore, fa uso di ragionamento simile? non è egli noto che Lagrange se ne fece difensore? (**) Che che ne sia: siccome chi può battere una via sicura la preferisce di certo ad una sdrucciola, potendo avere la dimostrazione delle formole (e) considerandole come formole di limite, non mi curerò di provarle altrimenti.

Osserviamo che le (e) in cui facciasi $x = \frac{m}{n} 2\pi$ sono false pei due casi particolari $m = 0$, $n = 1$: la ragione si è che allora non sussiste più per la prima la condizione, che la somma di tutti i termini componenti il periodo eguaglii zero: la seconda è erronea manifestamente; singolarità analitica di cui vedremo una simile sul fine del seguente num. 132.

128. Le (e) ove pongasi $\pi + x$ per x diventano le due

$$(f) \qquad \begin{aligned} \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot (-1)^i \cos. ix &= -\frac{1}{2} \\ \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot (-1)^i \sin. ix &= -\frac{1}{2} \tan. \frac{x}{2} \end{aligned}$$

(*) *Opuscules Mathématiques* T. IV, pag. 157.
(**) Lacroix. *Traité du Calcul.* Tom. III, pag. 160. *Note.*

dove ho posto $(-1)^i$ in luogo di $\cos. i\pi$. Sottraendo questa alle stesse (e), si faccia avvertenza che nelle serie equivalenti ai primi membri restano eliminati i termini in cui entrano i multipli pari di x: e i risultati potranno scriversi

$$(g)\quad \begin{cases} \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \cos.(2i-1)x = 0 \\ \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \sin.(2i-1)x = \dfrac{1}{2\sin. x}. \end{cases}$$

E queste ponendo $x + \frac{\pi}{2}$ per x si trasformano nelle altre

$$(h)\quad \begin{cases} \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot (-1)^i \sin.(2i-1)x = 0 \\ \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot (-1)^i \cos.(2i-1)x = -\dfrac{1}{2\cos. x}. \end{cases}$$

129. Il principio della derivazione e integrazione per le costanti di cui vedemmo nel Capo X l'utilità quando gl'integrali definiti sono continui, serve agevolmente anche per gl'integrali definiti dei quali è qui discorso: rileggasi il principio di quel capitolo e si vedrà che i ragionamenti sono egualmente applicabili. Possono addursi varii esempj in conferma della enunciata proposizione. Così la formola precedente (b) potevasi facilmente dedurre dalla (a) dividendone i due membri per a e poi integrando (colla qual parola intendo qui l'integrazione continua) per la stessa a fra i due limiti *zero*, a.

Le precedenti formole (c) s'integrino per x fra i limiti *zero*, x: avendo per la seconda presente, onde determinar la costante, la formola (b): troveremo

$$(i)\quad \begin{cases} \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot p^i \dfrac{\sin. ix}{i} = \text{Arc. tang.}\left(\dfrac{p\sin. x}{1-p\cos. x}\right) \\ \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot p^i \dfrac{\cos. ix}{i} = -\dfrac{1}{2}\log.(1-2p\cos. x + p^2) \end{cases}$$

che possono anche verificarsi *a posteriori* colla derivazione in riguardo alla costante x. Il sig. Poisson (*) deduce da queste pel caso di $p=1$ altre formole che dovranno ritenersi quali formole di limite siccome le (e), e che sortono più facilmente da equazioni più generali, come qui dopo.

130. Il principio di derivazione per le costanti associato ad alcune delle più celebri espressioni per prodotti infiniti somministra notabili risultati del genere di quelli che presentemente consideriamo. È ben nota (e ne abbiamo fatto uso anche al num. 55) l'espressione

$$\sin. u = u\left(1-\frac{u^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1-\frac{u^2}{3^2\pi^2}\right)\cdots;$$

ponendo in essa $u = \pi x$ e prendendo i logaritmi si deduce

(*) *Journal Polyt.* Cah. XIX, pag. 410.

$$\log.\sin.\pi x = \log.x + \log.\pi + \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \log.\left(1 - \frac{x^2}{i^2}\right)$$

e derivando per x

$$(l) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{1}{i^2 - x^2} = \frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x} \cot.\pi x.$$

Dall' altra nota espressione (*)

$$e^u - e^{-u} = 2u\left(1 + \frac{u^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{u^2}{2^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{u^2}{3^2\pi^2}\right) - - -$$

mediante una operazione affatto simile si cava

$$(m) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{1}{i^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x} \cdot \frac{e^{\pi x} + e^{-\pi x}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} - \frac{1}{2x^2};$$

e potevasi prontamente dedurre dalla precedente (l) col porvi $x\sqrt{-1}$ in luogo di x.

Abbiamo altresì (**)

$$\cos.z = \left(1 - \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 - \frac{4z^2}{5^2\pi^2}\right) - - -$$

e facendo $z = \frac{\pi x}{2}$

$$\cos.\frac{\pi x}{2} = (1 - x^2)\left(1 - \frac{x^2}{3^2}\right)\left(1 - \frac{x^2}{5^2}\right) - - -;$$

quindi collo stesso metodo

$$(n) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{1}{(2i-1)^2 - x^2} = \frac{\pi}{4x} \cdot \tan.\frac{\pi x}{2}.$$

L' espressione poi (***)

$$e^z + e^{-z} = 2\left(1 + \frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4z^2}{3^2\pi^2}\right)\left(1 + \frac{4z^2}{5^2\pi^2}\right) - - -$$

dà similmente

$$(o) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{1}{(2i-1)^2 + x^2} = \frac{\pi}{4x} \cdot \frac{e^{\frac{\pi x}{2}} - e^{-\frac{\pi x}{2}}}{e^{\frac{\pi x}{2}} + e^{-\frac{\pi x}{2}}}$$

la quale potevasi aver subito dalla precedente (n) col porvi $x\sqrt{-1}$ in luogo di x.

Osservo che era facile dedurre la (n) dalla (l) col seguente artificio. Mettendo nella (l) $\frac{x}{2}$ per x se ne inferisce

$$(p) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{1}{4i^2 - x^2} = \frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{4x} \cdot \cot.\frac{\pi x}{2}.$$

(*) Eulero. *Int. in analysin inf.* T. I, num. 156.
(**) *Ibid.* num. 158.
(***) *Ibid.* num. 157.

Se ora sottraggasi questa alla (l) è manifesto che nella serie rappresentata dal primo membro della (l) vengono tolti tutti i termini nei quali entrano i quadrati dei numeri interi pari; la serie rimanente non contenendo che termini coi quadrati dei numeri dispari è rappresentabile dal primo membro della (n). La sottrazione poi dei secondi membri dà con qualche riduzione il secondo membro della stessa (n). Dicasi a un di presso dell' andamento col quale si può cavare la (o) dalla (m). Viceversa vi è il modo di cavare la (l) dalla (n): io non mi vi trattengo, potendo ciò sembrare un perditempo: ma il lettore farà bene a provarvi le sue forze, giacchè addestrandosi agli artificj di siffatte deduzioni non è tenue il profitto.

Eulero nella citata opera diede espressioni per prodotti infiniti assai più generali, sulle quali possono farsi simili operazioni: prendo la seguente (*)

$$\frac{e^x - 2\cos.g + e^{-x}}{2(1-\cos.g)} = \left(1+\frac{x^2}{g^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(2\pi-g)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(2\pi+g)^2}\right)\left(1+\frac{x^2}{(4\pi-g)^2}\right)\cdots$$

vi pongo $\pi - g$ per g, e passando ai logaritmi ottengo

$$(q) \qquad \log.\left(\frac{e^x + 2\cos.g + e^{-x}}{2(1+\cos.g)}\right)$$

$$= \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \log.\left(1+\frac{x^2}{[(2i-1)\pi - g]^2}\right) + \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \log.\left(1+\frac{x^2}{[(2i-1)\pi + g]^2}\right).$$

Questa formola, così com' è, non dà nota la somma di una serie, ma soltanto quella di due serie. L'ho registrata perchè essa servì di fondamento a varie dotte ricerche de' signori Poisson e Plana; noi però nel Capo seguente giungeremo in altra maniera ai risultati ottenuti per tal via da questi geometri.

131. Si può sugli integrali finiti definiti adoperare il principio di derivazione e integrazione per le costanti non solo in similitudine del Capo X a fine di dedurre nuove formole da altre conosciute; ma anche in similitudine del Capo XI per trovarne i valori incogniti mediante l' integrazione di equazioni differenziali. Eccone un esempio che ci sarà utile nel progresso.

Sia $$(4) \qquad y = \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos.i\theta}{i^2 - x^2};$$

si derivi due volte per la costante θ: avrassi

$$\left(\frac{d^2 y}{d\theta^2}\right) = -\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{i^2 \cos.i\theta}{i^2 - x^2};$$

e ponendo $i^2 - x^2 + x^2$ per i^2, e rammentandoci la prima delle equazioni (e) formeremo l' equazione differenziale

$$(5) \qquad \left(\frac{d^2 y}{d\theta^2}\right) + x^2 y = \frac{1}{2}.$$

(*) Eulero. *Int. in analysin inf.* T. I, num. 159.

L' integrale di questa per la (N) del num. 86 è

$$y = \frac{1}{2x} \sin. x\theta \int d\theta \cdot \cos. x\theta - \frac{1}{2x} \cos. x\theta \int d\theta \cdot \sin. x\theta .$$

Quindi eseguendo le integrazioni, e rimettendo per y il suo valore

$$(6) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos. i\theta}{i^2 - x^2} = A \sin. x\theta + B \cos. x\theta + \frac{1}{2x^2}$$

dove A, B sono due costanti indipendenti da θ che restano a determinarsi.

Prendiamo a questo oggetto i due casi $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ nei quali l' integrale ha uno stesso valore dato dalla formola (l) del numero precedente: avremo per determinare A, B le due equazioni

$$\frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x} \cdot \cot. \pi x = B + \frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x} \cdot \cot. \pi x = A \sin. 2\pi x + B \cos. 2\pi x + \frac{1}{2x^2} .$$

Queste danno

$$A = -\frac{\pi}{2x}, \quad B = -\frac{\pi}{2x} \cot. \pi x ;$$

e però dalla precedente (6)

$$(r) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos. i\theta}{i^2 - x^2} = \frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x} \cdot \frac{\cos. x(\pi - \theta)}{\sin. \pi x}$$

che derivata per θ ci dà l' altra formola egualmente importante

$$(s) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{i \sin. i\theta}{i^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin. x(\pi - \theta)}{\sin. \pi x} .$$

Mettendo poi $x\sqrt{-1}$ per x in tali ultime formole, se ne cavano le due

$$(t) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos. i\theta}{i^2 + x^2} = \frac{\pi}{2x} \cdot \frac{e^{x(\pi-\theta)} + e^{-x(\pi-\theta)}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} - \frac{1}{2x^2}$$

$$(u) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{i \sin. i\theta}{i^2 + x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{x(\pi-\theta)} - e^{-x(\pi-\theta)}}{e^{\pi x} - e^{-\pi x}} .$$

Se ad alcuno non piacesse la deduzione delle (t), (u) dalle (r), (s) coll' uso dell' immaginario, potrà trovare *a priori* la (t) con un metodo affatto simile a quello mediante il quale fu dimostrata la (r). L'equazione differenziale risultante riuscirà integrabile per la (H) del num. 85, e le costanti si determineranno nei due casi particolari di $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$ facendo servire la (m) del numero precedente. La (u) poi può dedursi dalla (t) derivando per la costante θ.

132. *Scolio.* Le formole (r), (s) contengono secondo l' asserzione del signor Poisson (*) i risultati più importanti che relativamente a serie di simil fatta

(*) *Journal Polyt.* Cah. XIX, pag. 419.

siano sinora stati dati dai geometri: è quindi necessario conoscere le restrizioni a cui vanno soggette. Nella (r) x è qualunque, ma θ deve avere un valore compreso fra *zero*, 2π: se ha un valore maggiore di 2π la formola dà un risultato falso. Quando infatti abbiamo determinato le costanti non ci siamo allargati al di là di questi limiti. Ma quella generalità che è tolta dalla precedente osservazione può restituirsi alla maniera che son per dire. Invece di determinare le costanti A, B nell' integrale (6) per mezzo dei valori particolari $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$, determiniamole coi valori $\theta = 2n\pi$, $\theta = 2(n+1)\pi$, essendo n un numero qualunque intero positivo o negativo. Le equazioni all' uopo risultanti dalla (l), e dall' integrale (6) saranno

$$\frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x} \cdot \cot.\pi x = A \sin.2n\pi x + B \cos.2n\pi x + \frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x} \cdot \cot.\pi x = A \sin.2(n+1)\pi x + B \cos.2(n+1)\pi x + \frac{1}{2x^2}.$$

La sottrazione d' una all' altra dà

$$A = B \frac{\cos.2n\pi x - \cos.2(n+1)\pi x}{\sin.2(n+1)\pi x - \sin.2n\pi x} = B \tan.(2n+1)\pi x$$

valore che sostituito nella prima fa subito conoscere B, quindi A: riescono

$$A = -\frac{\pi}{2x} \cdot \frac{\sin.(2n+1)\pi x}{\sin.\pi x}; \quad B = -\frac{\pi}{2x} \cdot \frac{\cos.(2n+1)\pi x}{\sin.\pi x}$$

per cui l' integrale (6) diventa

$$(v) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos.i\theta}{i^2 - x^2} = \frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x} \cdot \frac{\cos.x(2n\pi + \pi - \theta)}{\sin.\pi x}$$

la cui derivata per θ è

$$(w) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{i \sin.i\theta}{i^2 - x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{\sin.x(2n\pi + \pi - \theta)}{\sin.\pi x}.$$

Le precedenti (v), (w) contengono le (r), (s) come casi particolari quando $n=0$: in esse n deve prendersi quel tal numero intero per cui $2n\pi$, $2(n+1)\pi$ siano quantità la prima minore, e la seconda maggiore dell' attual valore attribuito a θ, il che è sempre possibile.

Ponendo nelle (v), (w) $x\sqrt{-1}$ per x si hanno le altre due formole generali che contengono le (t), (u) come casi particolari.

Fa il Poisson l' osservazione (*) che la (r) o la (t) ha luogo anche pei valori estremi $\theta = 0$, $\theta = 2\pi$: ma che la (s) o la (u) avendo luogo per tutti i valori intermedj anche prossimissimi a quegli estremi, è per essi falsa. Può dirsi lo stesso delle (v), (w) per riguardo ai valori estremi $\theta = 2n\pi$, $\theta = 2(n+1)\pi$.

(*) *Journal Polyt.* Cah. XIX, pag. 418.

La ragione di questa anomalia s' attiene ad una teorica delicatissima sulla discontinuità dei valori degli integrali definiti, teorica intorno alla quale arrischierò in seguito qualche tentativo.

133. Possiamo dalla (v) cavare il valore di $\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos. i\theta}{i^2}$ che il sig. Poisson trova altrimenti (*) siccome accennai sulla fine del num. 129. Messo il secondo membro della (v) sotto la forma

$$\frac{\sin. \pi x - \pi x \cos. x(2n\pi + \pi - \theta)}{2x^2 \sin. \pi x}$$

esso per $x = 0$ si riduce $\frac{0}{0}$ ma colla nota regola se ne ha il vero valore discendendo fino ai differenziali terzi. Chiamando per brevità N il numeratore di tal frazione, D il denominatore, abbiamo

$$\left(\frac{d^3N}{dx^3}\right) = -\pi^3 \cos. \pi x + 3\pi(2n\pi + \pi - \theta)^2 \cos. x(2n\pi + \pi - \theta)$$
$$-\pi x(2n\pi + \pi - \theta)^2 \sin. x(2n\pi + \pi - \theta)$$
$$\left(\frac{d^3D}{dx^3}\right) = -2x^2\pi^3 \cos. \pi x - 12x\pi^2 \sin. \pi x + 12\pi \cos. \pi x$$

e pertanto

$$(x) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos. i\theta}{i^2} = \frac{3(2n\pi + \pi - \theta)^2 - \pi^2}{12}$$

che nel caso particolare di $n = 0$ diventa

$$(y) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos. i\theta}{i^2} = \frac{\theta^2}{4} - \frac{\pi\theta}{2} + \frac{\pi^2}{6}$$

la quale è la formola del lodato geometra. Questa è vera quando θ è compresa fra *zero*, 2π, e la (x) è vera per θ compresa fra $2n\pi$, $2(n+1)\pi$. Per un esempio; sia θ negativa e compresa fra -2π, *zero*: la (x) in cui $n = -1$ ci darà

$$(z) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos. i\theta}{i^2} = \frac{\theta^2}{4} + \frac{\pi\theta}{2} + \frac{\pi^2}{6}$$

dove mettendo per θ il valor negativo il secondo termine riescirà negativo, mentre nella (y) sarebbe risultato positivo ed erroneo.

Le (y), (z) derivate per θ danno

$$(aa) \qquad \begin{aligned} &\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\sin. i\theta}{i} = \frac{1}{2}(\pi - \theta) && \text{se } \theta \text{ fra } zero,\ 2\pi \\ &\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\sin. i\theta}{i} = -\frac{1}{2}(\pi + \theta) && \text{se } \theta \text{ fra } -2\pi,\ zero \end{aligned}$$

(*) *Journal Polyt.* Cah. XIX, pag. 413.

formole dal sig. Poisson ottenute per altra via (*). Varie conseguenze di minor interesse trovate dal suddetto geometra nel luogo citato e altrove (**), possono vedersi utilmente dagli studiosi.

134. Con metodo affatto simile a quello del num. 131, e mediante il sussidio della formola (n) potremo trovare il valore dell'integrale $\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos.(2i-1)\theta}{(2i-1)^2-x^2}$; otterremo più presto l'intento usando l'artificio con cui sulla fine del n.° 130 mostrammo potersi la (n) dedurre dalla (l). Mettasi nella (r) $\frac{x}{2}$ per x e 2θ per θ, ne caveremo

$$(bb) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos. 2i\theta}{4i^2-x^2} = \frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{4x} \cdot \frac{\cos. x\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin. \frac{\pi x}{2}}$$

dove la nuova θ sarà obbligata ad avere un valore compreso fra *zero*, π. Sottraggasi questa (bb) alla (r): è manifesto che residuerà nel primo membro una serie infinita esprimibile per $\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos.(2i-1)\theta}{(2i-1)^2-x^2}$: quanto al secondo membro esso riesce

$$\frac{\pi}{4x}\left\{\frac{\cos. x\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\sin. \frac{\pi x}{2}} - \frac{2\cos. x(\pi-\theta)}{\sin. \pi x}\right\}$$

e può ridursi ponendo per $\cos. x(\pi-\theta)$, $\sin. \pi x$ le quantità rispettivamente equivalenti $\cos. \frac{\pi x}{2} \cos. x\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) - \sin. \frac{\pi x}{2} \sin. x\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$; $2\sin. \frac{\pi x}{2} \cos. \frac{\pi x}{2}$: viene così

$$(cc) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos.(2i-1)\theta}{(2i-1)^2-x^2} = \frac{\pi}{4x} \cdot \frac{\sin. x\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos. \frac{\pi x}{2}}$$

la cui derivata per θ

$$(dd) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{(2i-1)\sin.(2i-1)\theta}{(2i-1)^2-x^2} = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\cos. x\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}{\cos. \frac{\pi x}{2}}.$$

In queste (cc), (dd) θ deve avere un valore fra *zero*, π: altrimenti esse sono false.

Sarebbe stato agevole il formare collo stesso metodo due equazioni più generali che contenessero le (cc), (dd) come le (v), (w) contengono le (r), (s);

(*) *Journal Polyt.* Cah. XIX, pag. 411.
(**) *Ibid.* Cah. XVIII, pag. 311 et suiv.

e poi dalle (cc), (dd) e dalle due più generali di cui accennammo la formazione, dedurre altre quattro col porre $x\sqrt{-1}$ per x.

135. La circostanza di avere nelle nostre formole x qualunque, ci giova anche per dedurre prontamente dalle (r), (s), (cc), (dd) quattro insigni formole dovute due ad Eulero e due a Legendre, dalle quali quest' ultimo cavò, come vedremo nel Capo seguente, varii integrali definiti di grande importanza.
Si faccia nelle (r), (s) $\theta=\mu+\pi$; avremo

$$\cos.i\theta=\cos.i\mu\cos.i\pi=-(-1)^{i+1}\cos.i\mu$$

$$\sin.i\theta=\sin.i\mu\cos.i\pi=-(-1)^{i+1}\sin.i\mu$$

quindi, ponendo anche ξ per x, le due

$$(ee)\quad \begin{cases} \Sigma_1^\infty \Delta i.\dfrac{(-1)^{i+1}\cos.i\mu}{i^2-\xi^2}=\dfrac{\pi}{2\xi}\cdot\dfrac{\cos.\mu\xi}{\sin.\pi\xi}-\dfrac{1}{2\xi^2} \\ \Sigma_1^\infty \Delta i.\dfrac{(-1)^{i+1}i\sin.i\mu}{i^2-\xi^2}=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{\sin.\mu\xi}{\sin.\pi\xi} \end{cases}$$

le quali non sono vere che quando μ ha un valore fra $-\pi, \pi$.
Pongasi in esse $\xi=\dfrac{bx}{\pi}$, $\mu=\dfrac{a\pi}{b}$: ne vengono le due

$$(ff)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos.ax}{\sin.bx}=\dfrac{1}{bx}+2bx\Sigma_1^\infty \Delta i.\dfrac{(-1)^{i+1}\cos.i\dfrac{a\pi}{b}}{i^2\pi^2-b^2x^2} \\ \dfrac{\sin.ax}{\sin.bx}=2\pi\Sigma_1^\infty \Delta i.\dfrac{(-1)^{i+1}i\sin.i\dfrac{a\pi}{b}}{i^2\pi^2-b^2x^2} \end{cases}$$

trovate originariamente da Eulero (*): a, b, x sono quantità qualunque positive o negative, ma a motivo della condizione cui nelle (ee) è soggetta la μ deve essere $a<b$ astrazion fatta dal segno.

Facciasi similmente nelle (cc), (dd) $\theta=\mu+\dfrac{\pi}{2}$, indi si rifletta che per essere $\cos.(2i-1)\dfrac{\pi}{2}=0$; $\sin.(2i-1)\dfrac{\pi}{2}=(-1)^{i+1}$ si hanno

$$\cos.\left[(2i-1)\frac{\pi}{2}+(2i-1)\mu\right]=-(-1)^{i+1}\sin.(2i-1)\mu;$$

$$\sin.\left[(2i-1)\frac{\pi}{2}+(2i-1)\mu\right]=(-1)^{i+1}\cos.(2i-1)\mu;$$

e le formole (cc), (dd) diverranno, ponendo anche ξ per x,

(*) Legendre. *Exercices de Calcul Intégral.* P. IV.me pag. 169.

$$(gg)\quad \begin{cases} \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \dfrac{(-1)^{i+1}\sin.(2i-1)\mu}{(2i-1)^2-\xi^2} = \dfrac{\pi}{4\xi}\cdot\dfrac{\sin.\mu\xi}{\cos.\dfrac{\pi\xi}{2}} \\[2ex] \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \dfrac{(-1)^{i+1}(2i-1)\cos.(2i-1)\mu}{(2i-1)^2-\xi^2} = \dfrac{\pi}{4}\cdot\dfrac{\cos.\mu\xi}{\cos.\dfrac{\pi\xi}{2}} \end{cases}$$

le quali sono soltanto vere per valori di μ compresi fra $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$.

Ora nelle (gg) si metta $\xi = \frac{2bx}{\pi}$, $\mu = \frac{a\pi}{2b}$, e ne verranno le formole

$$(hh)\quad \begin{cases} \dfrac{\sin.ax}{\cos.bx} = 8bx\,\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \dfrac{(-1)^{i+1}\sin.(2i-1)\dfrac{a\pi}{2b}}{(2i-1)^2\pi^2-4b^2x^2} \\[2ex] \dfrac{\cos.ax}{\cos.bx} = 4\pi\,\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \dfrac{(-1)^{i+1}(2i-1)\cos.(2i-1)\dfrac{a\pi}{2b}}{(2i-1)^2\pi^2-4b^2x^2}; \end{cases}$$

nelle quali a, b hanno la stessa condizione come per le (ff) a motivo della restrizione cui è soggetta μ nelle (gg). Queste sono le altre due formole recate dal Legendre nel luogo ultimamente citato.

136. Se nelle (ff), (hh) si ponga $x\sqrt{-1}$ per x, ottengonsi

$$(ii)\quad \begin{cases} \dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{bx}-e^{-bx}} = \dfrac{1}{bx} - 2bx\,\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \dfrac{(-1)^{i+1}\cos.i\dfrac{a\pi}{b}}{i^2\pi^2+b^2x^2} \\[2ex] \dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{bx}-e^{-bx}} = 2\pi\,\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \dfrac{(-1)^{i+1}i\sin.i\dfrac{a\pi}{b}}{i^2\pi^2+b^2x^2} \\[2ex] \dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{bx}+e^{-bx}} = 8bx\,\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \dfrac{(-1)^{i+1}\sin.(2i-1)\dfrac{a\pi}{2b}}{(2i-1)^2\pi^2+4b^2x^2} \\[2ex] \dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{bx}+e^{-bx}} = 4\pi\,\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \dfrac{(-1)^{i+1}(2i-1)\cos.(2i-1)\dfrac{a\pi}{2b}}{(2i-1)^2\pi^2+4b^2x^2} \end{cases}$$

date ivi parimenti dal Legendre. Il lettore che ha ben compreso tutto l'andamento delle precedenti dimostrazioni capirà che mediante alcune modificazioni che non ne cambiano il fondo, si poteva per esse arrivare direttamente alle (ii) senza far uso dell'immaginario. Tale uso però è qui certamente legittimo, come abbiamo potuto assicurarcene anche più sopra con altri riscontri: ed è poi utilissimo per provvedere alla brevità. Termino questo capo avvertendo che le

teoriche in esso esposte giovano anche per alcune ricerche d'analisi che non entrano nel mio assunto e per le quali io rimando ad una memoria del signor Cisa de Gresy (*) ed agli Autori in essa citati.

CAPO XV.

Applicazione della teorica precedente alla ricerca dei valori di varii integrali definiti.

137. Verrò in questo Capo sponendo i diversi usi delle espressioni trovate nel precedente per l'oggetto che abbiamo sempre di mira.

E prima dirò come a una parte della funzione sottoposta a un segno d'integrale definito si può, quando si conosca, sostituire l'espressione equivalente data da una delle formole mentovate: si ha allora una specie d'integrale duplicato misto, e avviene spesso di poter eseguire l'una dopo l'altra le due integrazioni che sono fra di loro indipendenti, ottenendo così coll'uso intermedio delle suddette formole ciò che non poteasi avere direttamente. Tale in fondo è l'artificio già adoperato al num. 73, e in qualche maniera anche del num. 32. Ecco altri interessanti esempj presi dal Legendre (**).

Sia proposto l'integrale

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.ax}{\sin.bx} \cdot \frac{1}{1+x^2},$$

mettasi per $\frac{\sin.ax}{\sin.bx}$ l'espressione equivalente data dalla seconda delle formole (ff) del num. 135, e si vedrà ch'esso si cambia in un duplicato misto cui può darsi la forma

$$\frac{2\pi}{b^2} \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot (-1)^{i+1} i \sin.i\frac{a\pi}{b} \int_0^\infty dx \cdot \frac{1}{(1+x^2)\left(\frac{i^2\pi^2}{b^2} - x^2\right)}.$$

Qui all'integrale continuo può sostituirsi una espressione nota usando la formola (γ) del num. 111, coll'avvertenza che la notazione $\int$ si cambia nella S a motivo del passaggio per l'infinito della funzione sotto il segno. Così, trovandosi nel confronto $A=1$, $B=0$, $m=1$, $c=\frac{i\pi}{b}$, il proposto integrale avrà lo stesso valore della espressione

$$\pi^2 \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{(-1)^{i+1} i \sin.i\frac{a\pi}{b}}{i^2\pi^2 + b^2}$$

(*) Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino. T. XXXI, pag. 225.
(**) *Exercices de Calcul Intégral.* V.me P., pag. 174.

la quale riesce subito nota per la seconda delle formole (*ii*) del num. 136 ove facciasi $x=1$. Quindi si ottiene

$$(a) \qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.ax}{\sin.bx} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^a - e^{-a}}{e^b - e^{-b}}.$$

Giova osservare che la quantità sotto il segno diventa infinita non per un solo ma per infiniti valori di x che sono $\frac{\pi}{b}$, $\frac{2\pi}{b}$, $\frac{3\pi}{b}$, ecc., di modo che la precedente formola è come se fosse calcolata dal secondo membro dell' equazione (10) del num. 109 formato di un numero infinito di termini.

Coll'uso simile della prima delle formole (*ff*) e quindi della prima delle (*ii*), ovvero più prontamente derivando per a la precedente (a) si ha

$$(b) \qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.ax}{\sin.bx} \cdot \frac{x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^a + e^{-a}}{e^b - e^{-b}}.$$

Si poteva eseguire l'indicata derivazione, perchè non ha luogo il caso di eccezione avvertito al num. 117.

Alla stessa maniera per la prima delle formole (*hh*) del num. 135

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.ax}{\cos.bx} \cdot \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{2}{b}\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot (-1)^{i+1} \sin.(2i-1)\frac{a\pi}{2b} \int_0^\infty dx \cdot \frac{1}{(1+x^2)\left(\frac{(2i-1)^2\pi^2}{4b^2} - x^2\right)}$$

Anche qui usando la formola (γ) del num. 111 deduciamo

$$S_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.ax}{\cos.bx} \cdot \frac{1}{x(1+x^2)} = 4\pi b \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{(-1)^{i+1} \sin.(2i-1)\frac{a\pi}{2b}}{(2i-1)^2\pi^2 + 4b^2}$$

e per la terza delle (*ii*) ove facciasi $x=1$

$$(\gamma) \qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.ax}{\cos.bx} \cdot \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^a - e^{-a}}{e^b + e^{-b}}.$$

Per ultimo con un andamento simile, o derivando la precedente per a

$$(\delta) \qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.ax}{\cos.bx} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^a + e^{-a}}{e^b + e^{-b}}.$$

Circa le trovate quattro formole (a), (b), (γ), (δ) bisogna ritenere ch'esse sono vere colla condizione $a<b$: essendovi tal condizione nelle formole usate per rinvenirne i valori.

138. Ma si vorrebbero i valori dei precedenti integrali anche per quando $a>b$, circostanza che può esprimersi facendo

$$a = kb + c$$

dove k è un intero, e $c<b$. Per l'indicato intento mi conviene prepararmi

una formola. Pongasi

$$\frac{\sin.(kb+c)x}{\sin.bx}=y_k$$

e sarà quindi

$$y_{k+1}=\frac{\sin.(kb+c+b)x}{\sin.bx}=\frac{\sin.(kb+c)x\cos.bx+\cos.(kb+c)x\sin.bx}{\sin.bx};$$

siccome poi

$$\sin.(kb+c)x\cos.bx=\frac{1}{2}\sin.\big((k+1)b+c\big)x+\frac{1}{2}\sin.\big((k-1)b+c\big)x:$$

la precedente equazione riducesi

$$y_{k+1}=\cos.(kb+c)x+\frac{1}{2}y_{k+1}+\frac{1}{2}y_{k-1}$$

ossia

$$y_k=2\cos.\big((k-1)b+c\big)x+y_{k-2}$$

da cui per continua sostituzione

$$(A)\qquad y_k=2\cos.\big((k-1)b+c\big)x+2\cos.\big((k-3)b+c\big)x+\cdots$$
$$+2\cos.\big((k-2m+1)b+c\big)x+y_{k-2m}$$

dove m è un intero qualunque. Se facciasi $k=2h$, $m=h$ si ha dalla precedente e dall' equazione di posizione

$$(B)\qquad \frac{\sin.(2hb+c)x}{\sin.bx}=2\cos.\big((2h-1)b+c\big)x+2\cos.\big((2h-3)b+c\big)x+\cdots$$
$$+2\cos.(b+c)x+\frac{\sin.cx}{\sin.bx}.$$

Adunque per la (α) e per la (a) del num. 72

$$S_0^\infty dx\cdot\frac{\sin.(2hb+c)x}{\sin.bx}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^c-e^{-c}}{e^b-e^{-b}}+\pi\left\{e^{-(2h-1)b-c}+e^{-(2h-3)b-c}+\cdots+e^{-b-c}\right\};$$

la serie compresa fra le parentesi è geometrica, quindi sommabile ed equivalente all' espressione

$$\pi\,\frac{e^{-c}-e^{-2hb-c}}{e^b-e^{-b}}.$$

Risulta così la formola

$$(\varepsilon)\qquad S_0^\infty dx\cdot\frac{\sin.(2hb+c)x}{\sin.bx}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^c+e^{-c}-2e^{-2hb-c}}{e^b-e^{-b}}$$

che comprende la (α) pel caso particolare di $h=0$.

Ritenemmo nel calcolo precedente c positiva: se invece fosse stata negativa avremmo egualmente ottenuto

$$(\zeta)\qquad S_0^\infty dx\cdot\frac{\sin.(2hb-c)x}{\sin.bx}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e^c+e^{-c}-2e^{-2hb+c}}{e^b-e^{-b}}+$$

quale si ha dalla precedente ove pongasi $-c$ per c. Anche il caso di $c=0$ è compreso nella (ε), perchè ripetendo il calcolo si trova

$$(\eta) \qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{\sin. 2hbx}{\sin. bx} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \pi \cdot \frac{1-e^{-2hb}}{e^b - e^{-b}}.$$

Ma nella $a=kb+c$ poteva essere k numero intero dispari che rappresenteremo con $2h+1$: quindi altre formole, le quali si possono trovare con un andamento analitico simile al surriferito, ma che dedurremo più presto dalle già ottenute.

Pongasi nella (ε) $b-c$ in luogo di c: ciò può farsi, giacchè $b-c$ è una quantità minore di b come per ipotesi la stessa c: viene

$$(\vartheta) \qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.((2h+1)b-c)x}{\sin. bx} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{b-c}+e^{c-b}-2e^{-(2h+1)b+c}}{e^b - e^{-b}}.$$

Per conseguire l' analoga formola con c positiva, osservisi essere

$$(2h+1)b+c = 2(h+1)b-(b-c),$$

e però si può adoperare la (ζ) ove si metta $h+1$ per h e $b-c$ per c; se ne cava

$$(\iota) \qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.((2h+1)b+c)x}{\sin. bx} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{b-c}+e^{c-b}-2e^{-(2h+1)b-c}}{e^b - e^{-b}}.$$

Or ecco una osservazione importante. Le trovate (ϑ), (ι) non si possono dedurre l' una dall' altra cambiando il segno alla c come avveniva delle (ε), (ζ): ne è facile la ragione. Se pretendessimo di avere una formola giusta dalla (ϑ) mettendovi c in luogo di $-c$, avremmo in sostanza posto $b+c$ per c nella (ε), il che non può farsi essendo $b+c$ quantità maggiore di b contro la condizione che vincola c nella (ε). Il lettore capirà che urterebbe contro una supposizione affatto simile e necessaria per la sussistenza della (ζ) quando si avvisasse di sostituire $-c$ a c nella (ι).

Entrambe le (ϑ), (ι) danno per $c=0$ lo stesso risultato

$$(\varkappa) \qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.(2h+1)bx}{\sin. bx} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^b+e^{-b}-2e^{-(2h+1)b}}{e^b - e^{-b}}$$

il quale si può confermare mediante l' equazione identica

$$\frac{\sin.(2h+1)bx}{\sin. bx} = 2\cos. 2hbx + 2\cos. 2(h-1)bx + 2\cos. 2(h-2)bx + \cdots + 2\cos. 2bx + 1$$

che ricavasi dalla (A) ove si faccia $c=0$, $k=2h+1$, $m=2h$.
Conchiudasi che le (ε), (ζ), (η) sono in sostanza una formola sola: non così le (ϑ), (ι), $(\varkappa)$ di cui le prime due sono essenzialmente distinte.

139. Derivando per c le (ε), (ζ), (ϑ), (ι) otteniamo le quattro

$$(\lambda)\quad \begin{aligned}
&S_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.(2hb+c)x}{\sin.bx} \cdot \frac{x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^c - e^{-c} + 2e^{-2hb-c}}{e^b - e^{-b}}\\
&S_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.(2hb-c)x}{\sin.bx} \cdot \frac{x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-c} - e^c + 2e^{-2hb+c}}{e^b - e^{-b}}\\
&S_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.((2h+1)b-c)x}{\sin.bx} \cdot \frac{x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{b-c} - e^{c-b} + 2e^{-(2h+1)b+c}}{e^b - e^{-b}}\\
&S_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.((2h+1)b+c)x}{\sin.bx} \cdot \frac{x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{c-b} - e^{b-c} + 2e^{-(2h+1)b-c}}{e^b - e^{-b}}
\end{aligned}$$

delle quali pure si verifica che le prime due risultano l'una dall'altra cambiando il segno alla c, e non così le ultime due. Ma qui vi è di più.
Le prime due per $c=0$ danno un medesimo risultato

$$(\mu)\qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.2hbx}{\sin.bx} \cdot \frac{x}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-2hb}}{e^b - e^{-b}}$$

ilquale è giusto e si può verificare mediante l'equazione identica

$$\frac{\cos.2hbx}{\sin.bx} = \frac{1}{\sin.bx} - 2\sin.(2h-1)bx - 2\sin.(2h-3)bx - \text{----} - 2\sin.bx$$

che può dimostrarsi con una analisi affatto simile a quella usata sul principio del numero precedente, o anche derivando per c la (B) ivi trovata e facendo a operazione finita $c=0$. L'accennata verificazione esige il richiamo della formola (b) del num. 72, e della terza formola (o) del num. 76.
Invece le ultime due delle (λ), facendovi $c=0$ danno pel valore di

$$S_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.(2h+1)bx}{\sin.bx} \cdot \frac{x}{1+x^2}$$

risultati diversi, cioè rispettivamente

$$\frac{\pi e^{-(2h+1)b}}{e^b - e^{-b}} + \frac{\pi}{2}\ ; \qquad \frac{\pi e^{-(2h+1)b}}{e^b - e^{-b}} - \frac{\pi}{2}$$

nessuno dei quali è giusto. La ragione si è che nelle (ϑ), (ι) del numero precedente da cui derivano le due ultime (λ) non si può a rigore fare $c=0$ senza ledere la condizione $c<b$ nella (ε). Quelle formole danno per $c=0$ un risultato giusto per accidente (la formola $(\varkappa)$), e non avrei osato di asserirlo tale senza recarne come feci una conferma. Nessuna meraviglia adunque che le due ultime (λ) diano per $c=0$ un risultato falso. Del resto che la derivata possa avere qualche restrizione di più della primitiva è circostanza già marcata sul fine del num. 132. Il vero valore dell'integrale in questione si ha col mezzo dell'equazione identica

$$\frac{\cos.(2h+1)bx}{\sin.bx} = \frac{\cos.bx}{\sin.bx} - 2\sin.2hbx - 2\sin.2(h-1)bx - \text{----} - 2\sin.2bx$$

la quale si dimostra prontamente con una analisi simile alla già da due volte citata, o anche mettendo $b+c$ per c nella (B), derivando per c e facendo a operazione eseguita $c=0$. Si richiamino la prima formola (o) del num. 76 e la (b) del num. 72 e si otterrà facilmente

$$(\nu) \qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.(2h+1)bx}{\sin.bx} \cdot \frac{x}{1+x^2} = \frac{\pi e^{-(2h+1)b}}{e^b - e^{-b}}.$$

È curiosa l'osservazione che questo risultato vero è il giusto medio fra i due risultati erronei dedotti dalle due formole (λ).

Sono entrato in queste discussioni con qualche minutezza per far vedere quanto sia facile prendere sbaglio nell'attribuire i valori a certi integrali definiti, se non si pone tutta l'attenzione.

140. Facendo come sul principio del num. 138 a meno di leggieri modificazioni che subito si presentano, ottiensi la formola simile a quella (A)

$$(C) \qquad \frac{\sin.(kb+c)x}{\cos.bx} = 2\sin.\big((k-1)b+c\big)x - 2\sin.\big((k-3)b+c\big)x + \cdots$$
$$\mp 2\sin.\big((k-2m+1)b+c\big)x \pm y_{k-2m}$$

dove negli ultimi termini ha luogo il segno superiore per m pari, e l'inferiore per m dispari. Quando $k=2h$, $m=h$, la precedente diventa

$$(D) \qquad \frac{\sin.(2hb+c)x}{\cos.bx} = 2\sin.\big((2h-1)b+c\big)x - 2\sin.\big((2h-3)b+c\big)x + \cdots$$
$$\mp 2\sin.(b+c)x \pm \frac{\sin.cx}{\cos.bx}.$$

Con questa espressione, richiamando la precedente formola (γ) e la (α) del num. 81, riconosceremo essere

$$S_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.(2hb+c)x}{\cos.bx} \cdot \frac{1}{x(1+x^2)} = \pm\frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^c - e^{-c}}{e^b + e^{-b}} + \pi(1-1+1+\cdots\mp 1)$$
$$-\pi\left(e^{-(2h-1)b-c} - e^{-(2h-3)b-c} + \cdots \mp e^{-b-c}\right)$$

usando nei termini col doppio segno quello superiore per h pari, e l'inferiore per h dispari. Delle due serie componenti il secondo membro la prima ha per somma *zero*, o π secondo che h è pari o dispari: però il suo valore è generalmente rappresentabile per $\frac{\pi}{2}(1-\cos.h\pi)$. Quanto alla seconda serie essa può scriversi

$$-\pi e^{-(2h-1)b-c}\left(1 - e^{2b} + e^{4b} - \cdots \mp e^{2(h-1)b}\right)$$

la cui somma equivale a

$$-\pi e^{-(2h-1)b-c} \cdot \frac{1 \mp e^{2hb}}{1+e^{2b}} = -\pi \frac{e^{-2hb-c} - e^{-c}\cos.h\pi}{e^b + e^{-b}}.$$

Quindi è che mettendo nell'equazione anziscritta il fattore $\cos.h\pi$ anche al

primo termine del secondo membro in luogo del doppio segno, con facile riduzione si cava

$$(\xi)\quad S_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.(2hb+c)x}{\cos. bx} \cdot \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{\pi}{2}(1-\cos.h\pi) + \frac{\pi}{2}\cos.h\pi \frac{e^c+e^{-c}}{e^b+e^{-b}} - \frac{\pi e^{-2hb-c}}{e^b+e^{-b}}.$$

Da questa possono dedursi (come già le (ζ), (η) dalle (ε)) le due formole, una delle quali ha $-c$ in luogo di c, e l'altra $c=0$. Similmente ponendo prima $b-c$ per c, e poi $h+1$ per h e $c-b$ per c, se ne fanno discendere le due

$$(o)\quad \begin{aligned} S_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.((2h+1)b-c)x}{\cos. bx} \cdot \frac{1}{x(1+x^2)} &= \frac{\pi}{2}(1-\cos.h\pi) \\ &+ \frac{\pi}{2}\cos.h\pi \frac{e^{b-c}+e^{c-b}}{e^b+e^{-b}} - \frac{\pi e^{-(2h+1)b+c}}{e^b+e^{-b}} \\ S_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.((2h+1)b+c)x}{\cos. bx} \cdot \frac{1}{x(1+x^2)} &= \frac{\pi}{2}(1+\cos.h\pi) \\ &- \frac{\pi}{2}\cos.h\pi \frac{e^{b-c}+e^{c-b}}{e^b+e^{-b}} - \frac{\pi e^{-(2h+1)b-c}}{e^b+e^{-b}} \end{aligned}$$

sulle quali cade la stessa osservazione, come sulle precedenti (ϑ), (ι), che non si possono dedurre l'una dall'altra mutando il segno alla c. Queste danno entrambe per $c=0$

$$(\pi)\qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.(2h+1)bx}{\cos. bx} \cdot \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi e^{-(2h+1)b}}{e^b+e^{-b}};$$

risultato che si dimostra facilmente anche mediante l'equazione identica

$$(E)\qquad \frac{\sin.(2h+1)bx}{\cos. bx} = 2\sin.2hbx - 2\sin.2(h-1)bx + 2\sin.2(h-2)bx \cdots \mp 2\sin.2bx \pm \frac{\sin. bx}{\cos. bx}$$

che esce dalla precedente (C): e mediante la formola

$$(\rho)\qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{\tan. bx}{x(1+x^2)} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^b-e^{-b}}{e^b+e^{-b}}$$

la quale si ottiene osservando l'equazione identica

$$(F)\qquad \frac{1}{x(1+x^2)} = \frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2}$$

e richiamando la seconda formola (o) e la (p) del num. 76.

141. Derivando la (ξ) per c abbiamo

$$(\sigma)\qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.(2hb+c)x}{\cos. bx} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}\cos.h\pi \frac{e^c-e^{-c}}{e^b+e^{-b}} + \frac{\pi e^{-2hb-c}}{e^b+e^{-b}}$$

formola che dà risultati giusti anche quando si metta $-c$ per c, o si faccia $c=0$. Derivando similmente le (o) si ottengono

$$(\tau)\quad \begin{cases} S_0^\infty dx \cdot \dfrac{\cos.((2h+1)b-c)x}{\cos. bx} \cdot \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{2} \cos. h\pi \dfrac{e^{b-c}-e^{c-b}}{e^b+e^{-b}} + \dfrac{\pi e^{-(2h+1)b+c}}{e^b+e^{-b}} \\[2ex] S_0^\infty dx \cdot \dfrac{\cos.((2h+1)b+c)x}{\cos. bx} \cdot \dfrac{1}{1+x^2} = \dfrac{\pi}{2} \cos. h\pi \dfrac{e^{b-c}-e^{c-b}}{e^b+e^{-b}} + \dfrac{\pi e^{-(2h+1)b-c}}{e^b+e^{-b}} \end{cases}$$

formole che non possono dedursi l'una dall'altra cambiando il segno alla c. Esse per $c=0$ danno un medesimo risultato esatto

$$(v)\qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.(2h+1)bx}{\cos. bx} \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} \cos. h\pi \frac{e^b-e^{-b}}{e^b+e^{-b}} + \frac{\pi e^{-(2h+1)b}}{e^b+e^{-b}}.$$

La verificazione di questa (v) si appoggia all'equazione identica

$$\frac{\cos.(2h+1)bx}{\cos. bx} = 2\cos.2hbx - 2\cos.2(h-1)bx + 2\cos.2(h-2)bx \cdots \mp 2\cos.2bx \pm 1$$

che si trova collo stesso andamento analitico più volte riferito. Debbo supporre che il mio lettore sappia condursi da se in questa e in altre due verificazioni più sopra semplicemente accennate. Avverto però che quella della (σ) per $c=0$ suppone la cognizione della formola

$$(\varphi)\qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{1}{(1+x^2)\cos. bx} = S_0^\infty dx \cdot \frac{\sec. bx}{1+x^2} = \frac{\pi}{e^b+e^{-b}}$$

la quale è un caso particolare della (δ) per $a=0$ e può aggiungersi alle formole (o) del num. 76.

142. Si derivi la (σ) per c, indi l'equazione risultante si sommi colla precedente (ξ) ove per $\frac{1}{x(1+x^2)}$ siasi messa l'espressione equivalente data dalla equazione identica (F): sortirà

$$(\chi)\qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.(2hb+c)x}{x\cos. bx} = \frac{\pi}{2}(1-\cos. h\pi)$$

formola assai singolare perchè il secondo membro è indipendente dalle due costanti b, c: essa è vera anche mettendo $-c$ per c, e facendo $c=0$.

Derivando similmente le (τ) e aggiungendo le due equazioni risultanti alle precedenti (o) nelle quali per $\frac{1}{x(1+x^2)}$ siasi sostituita la quantità come sopra, avremo

$$(\psi)\quad \begin{cases} S_0^\infty dx \cdot \dfrac{\sin.((2h+1)b-c)x}{x\cos. bx} = \dfrac{\pi}{2}(1-\cos. h\pi) \\[2ex] S_0^\infty dx \cdot \dfrac{\sin.((2h+1)b+c)x}{x\cos. bx} = \dfrac{\pi}{2}(1+\cos. h\pi). \end{cases}$$

Queste per $c=0$ danno risultati diversi ed entrambi falsi; il vero è il loro medio

$$(\omega) \qquad S_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.(2h+1)bx}{x\cos.bx} = \frac{\pi}{2}$$

come si prova colla precedente equazione identica (E) e colle formole (λ) del num. 32 e (p) del num. 76.

Lo studioso troverà nei numeri antecedenti rifuso il §. III.° della V.ª Parte degli *Esercizj di Calcolo Integrale* del Legendre.

143. Passiamo a vedere quattro formole che nella forma generale sotto cui le esporrò non mi sembrano ancora state date, e che contengono a foggia di casi particolari gran parte di ciò che di più importante hanno insegnato i signori Poisson e Legendre nei luoghi analoghi delle loro opere (*).

Per la prima delle formole (ii) del num. 136 abbiamo

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{bx}-e^{-bx}} \sin.rx = \frac{1}{b}\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.rx}{x} - \frac{2}{b}\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot (-1)^{i+1} \cos.i\frac{a\pi}{b}\int_0^\infty dx \cdot \frac{x\sin.rx}{\frac{i^2\pi^2}{b^2}+x^2}.$$

Il secondo membro a motivo della (λ) del n.° 32 e della (b) del n.° 72 diventa

$$\frac{\pi}{2b} - \frac{\pi}{b}\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot (-1)^{i+1} \cos.i\frac{a\pi}{b} e^{-\frac{i\pi r}{b}}$$

dove l'integrale finito definito può scriversi

$$-\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \left(-e^{-\frac{\pi r}{b}}\right)^i \cos.i\frac{a\pi}{b}$$

e sotto questa forma si riconosce assegnabile per la prima delle (c) del n.° 126 facendo $p=-e^{-\frac{\pi r}{b}}$, $x=\frac{a\pi}{b}$. Così dopo alcune facili riduzioni si trova

$$(\alpha\alpha) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{bx}-e^{-bx}} \sin.rx = \frac{\pi}{2b} \cdot \frac{e^{\frac{\pi r}{b}} - e^{-\frac{\pi r}{b}}}{e^{\frac{\pi r}{b}} + 2\cos.\frac{a\pi}{b} + e^{-\frac{\pi r}{b}}}$$

in cui deve essere $a<b$. La formola di Poisson e di Legendre

$$(\beta\beta) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \sin.rx = \frac{1}{2} \cdot \frac{e^r - e^{-r}}{e^r + e^{-r} + 2\cos.a}.$$

dove $a<\pi$, è compresa nella precedente pel caso di $b=\pi$.

144. Similmente per la seconda delle citate (ii)

(*) *Journal Polyt.* Cah. XVIII, pag. 295 et suiv.
Exercices de Calcul Intégral. V.me P., §. IV, pag. 185.

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{bx}-e^{-bx}} \cos.rx = \frac{2\pi}{b^2} \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot (-1)^{i+1} i \sin.i\frac{a\pi}{b} \int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.rx}{\frac{i^2\pi^2}{b^2}+x^2}$$

$$= \frac{\pi}{b} \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot (-1)^{i+1} \sin.i\frac{a\pi}{b} e^{-\frac{i\pi r}{b}}$$

$$= -\frac{\pi}{b} \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \left(-e^{-\frac{\pi r}{b}}\right)^i \sin.i\frac{a\pi}{b}$$

avendo fatto uso della (a) del num. 72. Qui è applicabile la seconda (c) del num. 126 facendo p, x come sopra, e si ha

$$(\gamma\gamma) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{bx}-e^{-bx}} \cos.rx = \frac{\pi}{b} \cdot \frac{\sin.\frac{a\pi}{b}}{e^{\frac{\pi r}{b}}+2\cos.\frac{a\pi}{b}+e^{-\frac{\pi r}{b}}}$$

con $a<b$. Per $b=\pi$ ne discende

$$(\delta\delta) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{\pi x}-e^{-\pi x}} \cos.rx = \frac{\sin.a}{e^r+e^{-r}+2\cos.a}$$

con $a<\pi$, già data dai sullodati geometri.

145. Seguasi un andamento simile partendo dalle altre due formole (ii) del num. 136, ed avvertasi di sostituire all'esponenziale $e^{-\frac{(2i-1)\pi r}{2b}}$ la quantità equivalente $e^{-i\frac{\pi r}{b}} \cdot e^{\frac{\pi r}{2b}}$ di cui il secondo fattore sorte dal segno d'integrazione finita per i. Così pure si porranno per $\cos.(2i-1)\frac{a\pi}{2b}$, $\sin.(2i-1)\frac{a\pi}{2b}$ i noti sviluppi binomiali pei quali avremo altri fattori che escono dal segno d'integrazione per i. Vedrassi allora che converrà adoperare simultaneamente le due formole dedotte dalle (c) del num. 126, delle quali abbiamo fatto uso separatamente nei due numeri precedenti, e dopo facili riduzioni si otterranno

$$(\varepsilon\varepsilon) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{e^{bx}+e^{-bx}} \sin.rx = \frac{\pi}{b} \cdot \frac{\left(e^{\frac{\pi r}{2b}}-e^{-\frac{\pi r}{2b}}\right)\sin.\frac{a\pi}{2b}}{e^{\frac{\pi r}{b}}+2\cos.\frac{a\pi}{b}+e^{-\frac{\pi r}{b}}}$$

$$(\zeta\zeta) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{e^{bx}+e^{-bx}} \cos.rx = \frac{\pi}{b} \cdot \frac{\left(e^{\frac{\pi r}{2b}}+e^{-\frac{\pi r}{2b}}\right)\cos.\frac{a\pi}{2b}}{e^{\frac{\pi r}{b}}+2\cos.\frac{a\pi}{b}+e^{-\frac{\pi r}{b}}}$$

aventi la condizione $a<b$. Quando $b=\pi$ si hanno le altre due formole de' citati autori analoghe alle $(\beta\beta)$, $(\delta\delta)$. Debbo però per la verità far osservare che quantunque le $(\beta\beta)$, $(\delta\delta)$ e le due ultimamente indicate siano casi particolari delle $(\alpha\alpha)$, $(\gamma\gamma)$, $(\varepsilon\varepsilon)$, $(\zeta\zeta)$: possono queste più generali da quel-

le prontamente dedursi con facile trasformazione che lascio all' esercizio del lettore.

146. Pongo alcuni corollarj che stanno a riscontro di quelli recati dal Legendre, partendo dalle sue formole; il presentarsi spontaneo di queste deduzioni mi permette d'indicare a dirittura i risultati.

$$(\eta\eta)\quad \begin{aligned} \int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin. rx}{e^{bx} - e^{-bx}} &= \frac{\pi}{4b} \cdot \frac{e^{\frac{\pi r}{b}} - 1}{e^{\frac{\pi r}{b}} + 1} \\ \int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos. rx}{e^{bx} + e^{-bx}} &= \frac{\pi}{2b} \cdot \frac{1}{e^{\frac{\pi r}{2b}} + e^{-\frac{\pi r}{2b}}} \\ \int_0^\infty dx \cdot \frac{e^{ax} - e^{-ax}}{e^{bx} - e^{-bx}} &= \frac{\pi}{2b} \cdot \tan. \frac{a\pi}{2b} \\ \int_0^\infty dx \cdot \frac{e^{ax} + e^{-ax}}{e^{bx} + e^{-bx}} &= \frac{\pi}{2b} \cdot \frac{1}{\cos. \frac{a\pi}{2b}}. \end{aligned}$$

Osserverò poi col citato autore che da queste e dalle precedenti d'onde furono cavate, possono dedursi altre formole senza fine derivando o integrando per le costanti: e ciò tanto più in quanto che nelle nostre havvi una costante di più che in quelle del geometra francese. Lo studioso ha qui un largo campo in cui lascerò ch'egli si eserciti senza seguirlo, ricordandomi di aver dichiarato fin dal principio che non voleva esporre un soverchio lusso di formole.

Il sig. Poisson nella sua Memoria ultimamente citata dà altre sei formole che facilmente si deducono dalle surriferite $(\eta\eta)$. Trattasi primieramente dei tre integrali

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin. rx \sin. sx}{e^{bx} + e^{-bx}}\ ; \quad \int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin. rx \cos. sx}{e^{bx} - e^{-bx}}\ ; \quad \int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos. rx \cos. sx}{e^{bx} + e^{-bx}}\ ;$$

sostituendo ai prodotti formanti i numeratori le espressioni binomiali equivalenti per seni e coseni semplici, si trovano integrali determinabili colle prime due delle $(\eta\eta)$: le riduzioni sono facili: ecco i risultati

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin. rx \sin. sx}{e^{bx} + e^{-bx}} = \frac{\pi}{4b} \cdot \frac{\left(e^{\frac{\pi r}{2b}} - e^{-\frac{\pi r}{2b}}\right)\left(e^{\frac{\pi s}{2b}} - e^{-\frac{\pi s}{2b}}\right)}{e^{\frac{\pi r}{b}} + e^{-\frac{\pi r}{b}} + e^{\frac{\pi s}{b}} + e^{-\frac{\pi s}{b}}}.$$

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin. rx \cos. sx}{e^{bx} - e^{-bx}} = \frac{\pi}{4b} \cdot \frac{e^{\frac{\pi r}{b}} - e^{-\frac{\pi r}{b}}}{e^{\frac{\pi r}{b}} + e^{-\frac{\pi r}{b}} + e^{\frac{\pi s}{b}} + e^{-\frac{\pi s}{b}}}$$

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos. rx \cos. sx}{e^{bx} + e^{-bx}} = \frac{\pi}{4b} \cdot \frac{\left(e^{\frac{\pi r}{2b}} + e^{-\frac{\pi r}{2b}}\right)\left(e^{\frac{\pi s}{2b}} + e^{-\frac{\pi s}{2b}}\right)}{e^{\frac{\pi r}{b}} + e^{-\frac{\pi r}{b}} + e^{\frac{\pi s}{b}} + e^{-\frac{\pi s}{b}}}.$$

Trattasi poi di tre altri integrali nei quali in luogo di quei prodotti di seni e coseni stanno nei numeratori i prodotti

$$(e^{ax}-e^{-ax})(e^{cx}-e^{-cx});\ (e^{ax}-e^{-ax})(e^{cx}+e^{-cx});\ (e^{ax}+e^{-ax})(e^{cx}+e^{-cx}).$$

Eseguendo in tal caso le moltiplicazioni si troveranno determinabili mediante le ultime due equazioni $(\eta\eta)$: e saranno

$$\int_0^\infty dx\cdot\frac{(e^{ax}-e^{-ax})(e^{cx}-e^{-cx})}{e^{bx}+e^{-bx}}=\frac{\pi}{b}\cdot\frac{2\sin.\frac{a\pi}{2b}\sin.\frac{c\pi}{2b}}{\cos.\frac{a\pi}{b}+\cos.\frac{c\pi}{b}}$$

$$\int_0^\infty dx\cdot\frac{(e^{ax}-e^{-ax})(e^{cx}+e^{-cx})}{e^{bx}-e^{-bx}}=\frac{\pi}{b}\cdot\frac{\sin.\frac{a\pi}{b}}{\cos.\frac{a\pi}{b}+\cos.\frac{c\pi}{b}}$$

$$\int_0^\infty dx\cdot\frac{(e^{ax}+e^{-ax})(e^{cx}+e^{-cx})}{e^{bx}+e^{-bx}}=\frac{\pi}{b}\cdot\frac{2\cos.\frac{a\pi}{2b}\cos.\frac{c\pi}{2b}}{\cos.\frac{a\pi}{b}+\cos.\frac{c\pi}{b}}$$

Queste ultime tre porteranno seco una condizione dedotta da quella che nelle due ultime $(\eta\eta)$ obbligava ad essere $a<b$. La condizione sarà che tanto $a+c$ quanto $a-c$, astrazion fatta dal segno, debbono essere minori di b, ossia, ciò che torna lo stesso, che c abbia un valore compreso fra $-(b-a)$, $+(b-a)$. Notisi che in tutte le precedenti dimostrazioni si è sempre schivato il passaggio per l'immaginario.

147. Altro modo di far uso con successo delle espressioni trovate nel Capo precedente si è di operare sopra alcuna di esse nella stessa guisa che insegnammo al num. 77 appoggiandoci a formole d'integrali continui. Accade allora uno de' due casi: o si ottengono formole nuove interamente note; o almeno si cambia la difficoltà, cioè l'integrale finito è dato pel continuo, o viceversa: cambiamento che talvolta è utile, giacchè all'integrale finito si può sempre, quando non si sappia far di meglio, sostituire la serie da esso rappresentata. Ecco un primo esempio per ambi i casi.

Pongasi e^{-x} in luogo di a nella (a) del num. 126: avremo

$$\Sigma_1^\infty\Delta i\cdot e^{-ix}=\frac{1}{e^x-1}.$$

Questa si moltiplichi successivamente per $\sin.kx$, $\cos.kx$, indi si integri per x fra i limiti *zero*, ∞. Rammentate le (6) del num. 29, otterremo

$$(\mathfrak{SS})\qquad \begin{aligned}\Sigma_1^\infty\Delta i\cdot\frac{k}{i^2+k^2}&=\int_0^\infty dx\cdot\frac{\sin.kx}{e^x-1}\\ \Sigma_1^\infty\Delta i\cdot\frac{i}{i^2+k^2}&=\int_0^\infty dx\cdot\frac{\cos.kx}{e^x-1}.\end{aligned}$$

Il primo di tali integrali finiti è noto per la (m) del num. 130: quindi

$$(\iota\iota) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.kx}{e^x - 1} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{k\pi} + e^{-k\pi}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}} - \frac{1}{2k}.$$

Se trasformisi tal formola col porre $x = 2\pi y$, $k = \frac{h}{2\pi}$ si ha un risultato che Poisson e Legendre ottennero in tutt'altra maniera (*).

La seconda delle formole $(\mathfrak{SS})$ ci fa conoscere per mezzo di un integrale definito la somma della serie infinita

$$\frac{1}{1+k^2} + \frac{2}{4+k^2} + \frac{3}{9+k^2} + \frac{4}{16+k^2} + \text{ecc.}$$

148. Collo stesso andamento possiamo prontamente giungere ad una formola che il sig. Poisson chiama rimarcabile (**). La seconda (d) del num. 126, cambiate alcune lettere, è

$$(G) \qquad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot e^{-it} \sin.i\theta = \frac{\sin.\theta}{e^t - 2\cos.\theta + e^{-t}}:$$

si moltiplichi per $\cos.kt$ indi si integri per t fra *zero*, ∞: attesa la seconda (b) del num. 29, risulta

$$\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{i \sin.i\theta}{i^2 + k^2} = \sin.\theta \int_0^\infty dt \cdot \frac{\cos.kt}{e^t - 2\cos.\theta + e^{-t}}.$$

Qui il primo membro è noto per la (u) del num. 131: mettasi poi $\pi - \theta$ in luogo di θ, e caveremo dalla precedente

$$(\varkappa\varkappa) \qquad \int_0^\infty dt \cdot \frac{\cos.kt}{e^t + 2\cos.\theta + e^{-t}} = \frac{\pi}{2\sin.\theta} \cdot \frac{e^{k\theta} - e^{-k\theta}}{e^{k\pi} - e^{-k\pi}}$$

colla condizione per θ di avere un valore compreso fra $-\pi$, π, condizione che dipende da quella cui è soggetta la (u) or ora adoperata.

Il citato autore trasforma l'ottenuta formola ponendo $e^{-t} = x^n$, ossia $t = -n\log.x$. Ai valori *zero*, ∞ di t corrispondono i valori 1, *zero* di x: quindi fatta anche $m = kn$, essa diventa

$$(\lambda\lambda) \qquad \int_0^1 dx \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{\cos.(m\log.x)}{x^n + 2\cos.\theta + x^{-n}} = \frac{\pi}{2n\sin.\theta} \cdot \frac{e^{\frac{m\theta}{n}} - e^{-\frac{m\theta}{n}}}{e^{\frac{m\pi}{n}} - e^{-\frac{m\pi}{n}}}$$

dovuta originariamente ad Eulero.

Se invece di moltiplicare i due membri della (G) per $\cos.kt$, avessimo moltiplicato per $e^{kt} + e^{-kt}$ essendo k numero minore dell'unità: operando allo stesso modo, e per essere

$$\int_0^\infty dt \cdot \left\{ e^{-(i-k)t} + e^{-(i+k)t} \right\} = \frac{2i}{i^2 - k^2},$$

(*) *Exercices de Calcul Intégral.* V.me P., pag. 189; *Journal Polyt.* Cah. XVIII, pag. 302.
(**) *Journal Polyt.* Cah. XVIII, pag. 306.

avremmo, in virtù della (s) del num. 131, trovato

$$(\mu\mu) \qquad \int_0^\infty dt \cdot \frac{e^{kt} + e^{-kt}}{e^t + 2\cos.\theta + e^{-t}} = \frac{\pi \sin.k\theta}{\sin.\theta \sin.k\pi}$$

quale risulta ponendo $k\sqrt{-1}$ per k nella $(\varkappa\varkappa)$: ma è meglio, ove si può, evitare l'immaginario.

Trasformando la $(\mu\mu)$ come facemmo della $(\varkappa\varkappa)$ troveremo

$$(\nu\nu) \qquad \int_0^1 dx \cdot \frac{1}{x} \cdot \frac{x^m + x^{-m}}{x^n + 2\cos.\theta + x^{-n}} = \frac{\pi \sin.\frac{m\theta}{n}}{n \sin.\theta \sin.\frac{m\pi}{n}}$$

altra formola di Eulero: in essa m, n sono quantità reali positive qualunque: ma deve essere $m < n$, giacchè si è posto per condizione che sia $k < 1$.

149. Ora dimostrerò con diverso metodo una formola dovuta al chiar. geometra sig. Plana (*). Colla (G) del n.° precedente si riconosce vera l'equazione

$$\int_0^\infty dt \cdot \frac{(e^t - e^{-t}) \sin.ht}{e^t - 2\cos.\theta + e^{-t}} = \frac{1}{\sin.\theta} \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \sin.i\theta \int_0^\infty dt \cdot (e^{-(i-1)t} - e^{-(i+1)t}) \sin.ht.$$

Il secondo membro, per una formola di cui facemmo uso replicatamente più sopra, diventa

$$\frac{h}{\sin.\theta} \left\{ \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\sin.i\theta}{(i-1)^2 + h^2} - \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\sin.i\theta}{(i+1)^2 + h^2} \right\};$$

siccome poi

$$\sin.i\theta = \sin.(i-1)\theta \cos.\theta + \cos.(i-1)\theta \sin.\theta;$$

$$\sin.i\theta = \sin.(i+1)\theta \cos.\theta - \cos.(i+1)\theta \sin.\theta$$

abbiamo

$$(H) \quad \begin{aligned} \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\sin.i\theta}{(i-1)^2 + h^2} &= \cos.\theta \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\sin.(i-1)\theta}{(i-1)^2 + h^2} + \sin.\theta \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos.(i-1)\theta}{(i-1)^2 + h^2} \\ \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\sin.i\theta}{(i+1)^2 + h^2} &= \cos.\theta \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\sin.(i+1)\theta}{(i+1)^2 + h^2} - \sin.\theta \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos.(i+1)\theta}{(i+1)^2 + h^2}. \end{aligned}$$

Ma un'occhiata alle serie equivalenti ci persuade subito le equazioni

$$\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\sin.(i-1)\theta}{(i-1)^2 + h^2} = \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\sin.i\theta}{i^2 + h^2}$$

$$\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\sin.(i+1)\theta}{(i+1)^2 + h^2} = \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\sin.i\theta}{i^2 + h^2} - \frac{\sin.\theta}{1 + h^2}$$

$$\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos.(i-1)\theta}{(i-1)^2 + h^2} = \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos.i\theta}{i^2 + h^2} + \frac{1}{h^2}$$

$$\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos.(i+1)\theta}{(i+1)^2 + h^2} = \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos.i\theta}{i^2 + h^2} - \frac{\cos.\theta}{1 + h^2}.$$

(*) *Memoire sur les Intégrales définies.* Turin, 1816, pag. 42.

Questi valori sostituiti nelle (H) danno

$$\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\sin. i\theta}{(i-1)^2+h^2} - \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\sin. i\theta}{(i+1)^2+h^2} = 2\sin.\theta \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos. i\theta}{i^2+h^2} + \frac{\sin.\theta}{h^2}.$$

Quindi richiamata la (t) del num. 131, e posta da ultimo $\pi-\theta$ per θ, si conchiude

$$(\xi\xi) \qquad \int_0^\infty dt \cdot \frac{(e^t-e^{-t})\sin. ht}{e^t+2\cos.\theta+e^{-t}} = \pi \cdot \frac{e^{h\theta}+e^{-h\theta}}{e^{h\pi}-e^{-h\pi}}$$

dove θ a motivo della formola adoperata deve avere un valore fra $-\pi$, π.

150. Invece di appoggiarci ad una formola d'integrale finito ed eseguire una integrazione continua, si può partire da una formola d'integrale continuo ed eseguire una integrazione finita: i due casi di cui parlammo sul principio del num. 147 si presentano egualmente.

Partasi dalla prima (b) del num. 29 ponendovi $(2i-1)b-a$ per b e k per a. Abbiamo

$$\int_0^\infty dt \cdot e^{-(2i-1)bt} \cdot e^{at} \sin. kt = \frac{k}{[(2i-1)b-a]^2+k^2}.$$

Integriamo per i nel sistema delle differenze finite, e potremo scrivere

$$\int_0^\infty dt \cdot e^{(a+b)t} \sin. kt \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot e^{-2ibt} = \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{k}{[(2i-1)b-a]^2+k^2}.$$

Ora per la (a) del num. 126 ove facciasi $a=e^{-2bt}$

$$\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot e^{-2ibt} = \frac{e^{-bt}}{e^{bt}-e^{-bt}};$$

laonde la precedente diventa

$$(oo) \qquad \int_0^\infty dt \cdot \frac{e^{at} \sin. kt}{e^{bt}-e^{-bt}} = \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{k}{[(2i-1)b-a]^2+k^2}$$

colla condizione $a<b$: perchè se così non fosse non sarebbe sempre negativo per tutti i valori di i l'esponente nella richiamata formola del num. 29.

Se nella precedente (oo) facciasi $a=0$, a motivo della (o) del num. 130 vedesi ritornare la prima $(\eta\eta)$ del num. 146.

(sarà continuato)

PARTE PRIMA

Continuazione della memoria SULLA MECCANICA CELESTE E SOPRA UN NUOVO CALCOLO CHIAMATO CALCOLO DEI LIMITI *di* *AGOSTINO LUIGI CAUCHY* (*Vedi Fascicolo I.° del Tomo II.° pag.* 1)

PARTE SECONDA

APPLICAZIONE ALLA MECCANICA CELESTE

§. 1.°

Variazione delle costanti arbitrarie

Siano date, fra la variabile t, fra n funzioni di t indicate da x, y, z - - - ed altre n funzioni di t indicate da u, v, w - - -, $2n$ equazioni differenziali di primo ordine e della forma

$$(1)\qquad \begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=\frac{d\Phi}{du};\ \frac{dy}{dt}=\frac{d\Phi}{dv};\ \frac{dz}{dt}=\frac{d\Phi}{dw};\ ---\\ &\frac{du}{dt}=-\frac{d\Phi}{dx};\ \frac{dv}{dt}=-\frac{d\Phi}{dy};\ \frac{dw}{dt}=-\frac{d\Phi}{dz};\ ---\end{aligned}$$

essendo Φ una funzione di x, y, z - - - u, v, w, - - -, t.
Le incognite x, y, z, - - - u, v, w, - - - si potranno supporre espresse in funzione di t e di $2n$ costanti arbitrarie a, b, c, - - -, e si avrà in tale supposizione

$$\frac{d\Phi}{da}=\frac{d\Phi}{dx}\cdot\frac{dx}{da}+\frac{d\Phi}{dy}\cdot\frac{dy}{da}+ - - - +\frac{d\Phi}{du}\cdot\frac{du}{da}+\frac{d\Phi}{dv}\cdot\frac{dv}{da}+ - - -;$$

per conseguenza

$$(2)\qquad \frac{d\Phi}{da}=-\frac{du}{dt}\cdot\frac{dx}{da}-\frac{dv}{dt}\cdot\frac{dy}{da}- - - +\frac{dx}{dt}\cdot\frac{du}{da}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dv}{da}- - -$$

e similmente

$$(2)\qquad \frac{d\Phi}{db}=-\frac{du}{dt}\cdot\frac{dx}{db}-\frac{dv}{dt}\cdot\frac{dy}{db}- - - +\frac{dx}{dt}\cdot\frac{du}{db}+\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dv}{db}- - -.$$

Se dalla seconda delle precedenti (2) differenziata relativamente alla quantità a si sottragga la prima differenziata per rapporto a b, si otterrà la seguente

$$(3)\qquad \frac{d[a, b]}{dt}=0;$$

il valore di $[a, b]$ essendo

$$(4)\qquad [a,b]=\frac{dx}{da}\cdot\frac{du}{db}-\frac{dx}{db}\cdot\frac{du}{da}+\frac{dy}{da}\cdot\frac{dv}{db}-\frac{dy}{db}\cdot\frac{dv}{da}+ - - -;$$

quindi integrando l'equazione (3) si troverà

$$(5)\qquad [a, b]=\text{costante}.$$

Dunque le quantità rappresentate coi simboli

$$[a, b];\ [a, c];\ ---\ [b, c];\ ---$$

saranno indipendenti da t. Inoltre conviene osservare che in virtù della formola (4) si ha generalmente

$$[a, a]=0;\ \text{e}\ [a, b]=-[b, a].$$

Siano ora

$$(6)\qquad A=a;\ B=b;\ C=c;\ ----$$

gli integrali generali delle equazioni (1); dove A, B, C--- indichino funzioni determinate delle sole variabili x, y, z, --- u, v, w, ---t. Facciamo di più

$$(7)\qquad (A,B)=\frac{dA}{dx}\cdot\frac{dB}{du}-\frac{dA}{du}\cdot\frac{dB}{dx}+\frac{dA}{dy}\cdot\frac{dB}{dv}-\frac{dA}{dv}\cdot\frac{dB}{dy}+-----.$$

Si avranno ancora

$$(A, A)=0;\ (A, B)=-(B, A).$$

D'altronde se nell'equazione che determina x in funzione di a, b, c, --- t, si sostituiscano A, B, C --- in luogo di a, b, c ---, si otterrà una formola identica, che differenziata successivamente per rapporto ad x, y, z, ---u, v, --- darà

$$(8)\qquad 1=\frac{dx}{da}\cdot\frac{dA}{dx}+\frac{dx}{db}\cdot\frac{dB}{dx}+---;\ 0=\frac{dx}{da}\cdot\frac{dA}{dy}+\frac{dx}{db}\cdot\frac{dB}{dy}+---;\ 0=\text{ecc.};\ \text{ecc.}$$

E se si sommino fra loro i valori di (A, A), (A, B), (A, C)--- moltiplicati rispettivamente per $\frac{dx}{da}$, $\frac{dx}{db}$, $\frac{dx}{dc}$, ecc. si troverà, avendo riguardo alle formole (8),

$$(9)\qquad (A, A)\frac{dx}{da}+(A, B)\frac{dx}{db}+(A, C)\frac{dx}{dc}+---=-\frac{dA}{du};$$

e si troveranno similmente

$$(9)\qquad (A, A)\frac{dy}{da}+(A, B)\frac{dy}{db}+(A, C)\frac{dy}{dc}+---=-\frac{dA}{dv}$$

ecc. ecc.

Parimenti se si sommino fra loro i valori di (A, A), (A, B), (A, C) --- moltiplicati rispettivamente per $\frac{du}{da}$, $\frac{du}{db}$, $\frac{du}{dc}$---, si troverà

$$(10)\qquad (A, A)\frac{du}{da}+(A, B)\frac{du}{db}+(A, C)\frac{du}{dc}+---=\frac{dA}{dx}$$

e si troveranno similmente

$$(10)\qquad (A, A)\frac{dv}{da}+(A, B)\frac{dv}{db}+(A, C)\frac{dv}{dc}+---=\frac{dA}{dy}$$

ecc. ecc.

D'altra parte se si differenzia successivamente la prima delle formole (6) per rapporto a ciascuna delle quantità a, b, c --- considerando x, y, z ---u, v, w ---

come funzioni di a, b, c - - - t, se ne dedurranno le

$$
(11)\qquad
\begin{aligned}
1 &= \frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{da}+\frac{dA}{dy}\cdot\frac{dy}{da}+\cdots+\frac{dA}{du}\cdot\frac{du}{da}+\cdots\\
0 &= \frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{db}+\frac{dA}{dy}\cdot\frac{dy}{db}+\cdots+\frac{dA}{du}\cdot\frac{du}{db}+\cdots\\
0 &= \frac{dA}{dx}\cdot\frac{dx}{dc}+\frac{dA}{dy}\cdot\frac{dy}{dc}+\cdots+\frac{dA}{du}\cdot\frac{du}{dc}+\cdots\\
&\text{ecc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ecc.}
\end{aligned}
$$

Ciò posto, si combinino per via di addizione le formole (9), (10), dopo aver moltiplicate rispettivamente le formole (9) per $-\frac{du}{da}, -\frac{dv}{da}, -\frac{dw}{da}$, - - - e le formole (10) per $\frac{dx}{da}, \frac{dy}{da}, \frac{dz}{da}$, - - -, si troverà, avuto riguardo alla prima delle equazioni (11),

$$(12)\qquad (A,A)[a,a]+(A,B)[a,b]+(A,C)[a,c]+\cdots=1.$$

Si avranno similmente

$$
(12)\qquad
\begin{aligned}
&(A,A)[b,a]+(A,B)[b,b]+(A,C)[b,c]+\cdots=0\\
&(A,A)[c,a]+(A,B)[c,b]+(A,C)[c,c]+\cdots=0\\
&\text{ecc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ecc.}
\end{aligned}
$$

Le equazioni (12) bastano per determinare i valori delle (A, B), (A, C), ecc. quando si conoscono quelli delle quantità costanti $[a, b]$, $[a, c]$, - - - $[b, c]$, - - -. Equazioni simili determineranno i valori di (B, A), (B, C), ecc. Dunque le quantità (A, B), (A, C), - - - (B, C), - - - sono esse stesse costanti e non dipendono dalla variabile t.

Conviene osservare che se nelle equazioni (6) differenziate per rapporto a t si sostituiscono i valori di $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$, - - - $\frac{du}{dt}$, - - - cavati dalle equazioni (1), le formole così ottenute, cioè

$$
(13)\qquad
\begin{aligned}
0 &= \frac{dA}{dx}\cdot\frac{d\Phi}{du}+\frac{dA}{dy}\cdot\frac{d\Phi}{dv}+\cdots-\frac{dA}{du}\cdot\frac{d\Phi}{dx}-\cdots\\
0 &= \frac{dB}{dx}\cdot\frac{d\Phi}{du}+\frac{dB}{dy}\cdot\frac{d\Phi}{dv}+\cdots-\frac{dB}{du}\cdot\frac{d\Phi}{dx}-\cdots\\
&\text{ecc.} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{ecc.}
\end{aligned}
$$

avranno per secondi membri funzioni di x, y, z - - - u, v, w - - - t identicamente nulle, poichè se ciò non fosse, fra i valori generali di x, y, z - - - u, v, w - - - t, e per conseguenza anche fra i valori iniziali di x, y, z - - - u, v, w - - - t corrispondenti a $t=0$, esisterebbero equazioni le quali non conterrebbero alcuna costante arbitraria, ciò che è assurdo, potendo questi valori iniziali essere scelti arbitrariamente.

Supponiamo ora che si tratti d'integrare non più le equazioni (1), ma le seguenti

$$(14)\quad \begin{aligned} &\frac{dx}{dt}=\frac{d\Phi}{du}+\frac{dR}{du}; \quad \frac{dy}{dt}=\frac{d\Phi}{dv}+\frac{dR}{dv}; \quad \frac{dz}{dt}=\frac{d\Phi}{dw}+\frac{dR}{dw}; \text{ ecc.}\\ &\frac{du}{dt}=-\frac{d\Phi}{dx}-\frac{dR}{dx}; \quad \frac{dv}{dt}=-\frac{d\Phi}{dy}-\frac{dR}{dy}; \quad \frac{dw}{dt}=-\frac{d\Phi}{dz}-\frac{dR}{dz}; \text{ ecc.}\end{aligned}$$

I valori di x, y, z --- u, v, w --- si potranno ancora supporre determinati dalle equazioni (6) purchè si riguardino le a, b, c --- come quantità divenute funzioni di t. Allora se nella prima delle equazioni (6) differenziata per rapporto a t si sostituiscano i valori di $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$, --- dedotti dalle (14), e inoltre si abbia riguardo alla prima delle (13), la quale sussiste qualunque siano i valori di x, y, z --- u, v, w --- t, si troverà

$$(15)\quad \frac{da}{dt}=\frac{dA}{dx}\cdot\frac{dR}{du}+\frac{dA}{dy}\cdot\frac{dR}{dv}+\text{---}-\frac{dA}{du}\cdot\frac{dR}{dx}-\text{---}.$$

Finalmente se dopo avere espressa R in funzione di a, b, c, --- t, vi si sostituiscano in luogo delle a, b, c --- le funzioni di x, y, z, --- u, v, w, --- t rappresentate dalle A, B, C ---, si troverà identicamente il primo valore di R, e si avranno in conseguenza

$$(16)\quad \begin{aligned} &\frac{dR}{dx}=\frac{dR}{da}\cdot\frac{dA}{dx}+\frac{dR}{db}\cdot\frac{dB}{dx}+\text{---}\\ &\frac{dR}{dy}=\frac{dR}{da}\cdot\frac{dA}{dy}+\frac{dR}{db}\cdot\frac{dB}{dy}+\text{---}\\ &\text{----------}\\ &\frac{dR}{du}=\frac{dR}{da}\cdot\frac{dA}{du}+\frac{dR}{db}\cdot\frac{dB}{du}+\text{---}\\ &\qquad\text{ecc.}\qquad\qquad\text{ecc.}\qquad\qquad\text{ecc.}\end{aligned}$$

Ciò posto, la formola (15) darà

$$(17)\quad \frac{da}{dt}=(A, B)\frac{dR}{db}+(A, C)\frac{dR}{dc}+\text{---}$$

e si troveranno egualmente

$$(17)\quad \frac{db}{dt}=(B, A)\frac{dR}{da}+(B, C)\frac{dR}{dc}+\text{---}$$

ecc. ecc. ecc.

Tali sono le equazioni differenziali che dovranno servire a determinare a, b, c --- in funzione di t. I coefficienti di $\frac{dR}{da}, \frac{dR}{db}$, ecc. in queste equazioni, giusta le osservazioni fatte più sopra, saranno funzioni delle sole quantità a, b, c --- e la variabile t non vi entrerà in una maniera esplicita.

§. 2.°

Equazioni differenziali del moto de' pianeti.

Sia M la massa del sole, e siano m, m', m'' - - - le masse dei pianeti. Prendiamo per l'origine delle coordinate il centro del sole, e x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''; - - - esprimano le coordinate dei pianeti nei loro moti relativi intorno a quest'astro. Scegliendo convenientemente l'unità di massa, indicando per u, v, w le velocità di m misurate parallelamente agli assi delle x, y, z, e facendo per brevità

$$(1) \qquad M = \mathrm{M} + m$$

$$(2) \qquad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}, \quad r' = (x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ ecc.}$$

$$(3) \qquad \xi' = \{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2\}^{\frac{1}{2}}, \text{ ecc.}$$

$$(4) \qquad R = \frac{m'(xx' + yy' + zz')}{r'^3} + - - - - \frac{m'}{\xi'} - - - \text{ ecc.}$$

Si troveranno, per le equazioni differenziali del moto di m, le seguenti

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\frac{dx}{dt} = u \quad ; \quad \frac{dy}{dt} = v \quad ; \quad \frac{dz}{dt} = w \\ &\frac{du}{dt} = -\frac{Mx}{r^3} - \frac{dR}{dx}; \quad \frac{dv}{dt} = -\frac{My}{r^3} - \frac{dR}{dy}; \quad \frac{dw}{dt} = -\frac{Mz}{r^3} - \frac{dR}{dz}. \end{aligned}$$

Per dedurre quest'ultime dalle formole (14) del §. 1.° basterà prendere

$$(6) \qquad \Phi = \frac{u^2 + v^2 + w^2}{2} - - - - \frac{M}{r} - - -$$

e ammettere che R è solamente funzione di x, y, z - - - . Se nelle formole (5) e nelle altre della stessa specie si pone zero in luogo di R, esse diverranno integrabili e l'orbita di m diverrà un'elisse di cui un fuoco sarà il centro del sole. Siano, τ l'inclinazione del piano di questa elisse sopra il piano delle x, y: φ l'angolo formato dalla linea dei nodi, cioè a dire dalla traccia del piano dell'orbita sopra il piano delle x, y, con l'asse delle x; p l'angolo formato dal raggio vettore r con questa linea o la longitudine del pianeta; ϖ la longitudine del perielio; $2a$ il grand'asse dell'elisse; $2a\varepsilon$ la distanza dei fuochi: finalmente poniamo

$$(*) \qquad \alpha = \left(\frac{M}{a^3}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ed indichiamo per

$$-\frac{c}{\alpha}$$

il valore del tempo t all'istante in cui il pianeta passava per il perielio. Si avranno le equazioni

$$(7)\qquad \begin{aligned} x&=r(\cos.\varphi\cos.p-\sin.\varphi\sin.p\cos.\tau)\\ y&=r(\sin.\varphi\cos.p+\cos.\varphi\sin.p\cos.\tau)\\ z&=r\sin.p\sin.\tau \end{aligned}$$

$$(8)\qquad r=a(1-\varepsilon\cos.\psi);\quad 1+\varepsilon\cos.(p-\varpi)=\frac{1-\varepsilon^2}{1-\varepsilon\cos.\psi};$$

essendo il valore di ψ determinato in funzione di t per mezzo della equazione

$$(9)\qquad \psi=\alpha t+c+\varepsilon\sin.\psi.$$

Se ora si ritorna al caso in cui R cessa di essere nulla, si potranno sempre supporre x, y, z determinate in funzione di t e di $\varphi, \tau, a, c, \varepsilon, \varpi$ col mezzo delle formole (7), (8), (9). Soltanto le $\varphi, \tau, a, c, \varepsilon, \varpi$ diverranno funzioni di t, le cui derivate dedotte dalle formole (17) del §. 1.° od anche calcolate direttamente saranno

$$(10)\qquad \begin{aligned} &\frac{da}{dt}=-\frac{2}{a\alpha}\frac{dR}{dc};\quad \frac{d\varepsilon}{dt}=-\frac{1-\varepsilon^2}{a^2\alpha\varepsilon}\frac{dR}{dc}+\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{a^2\alpha\varepsilon}\frac{dR}{d\varpi};\\ &\frac{dc}{dt}=\frac{2}{a\alpha}\frac{dR}{da}+\frac{1-\varepsilon^2}{a^2\alpha\varepsilon}\frac{dR}{d\varepsilon};\quad \frac{d\varpi}{dt}=-\frac{\sqrt{1-\varepsilon^2}}{a^2\alpha\varepsilon}\frac{dR}{d\varepsilon}+\frac{\cot.\tau}{\alpha a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{dR}{d\tau};\\ &\frac{d\varphi}{dt}=-\frac{\operatorname{cosec.}\tau}{\alpha a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{dR}{d\tau};\quad \frac{d\tau}{dt}=\frac{\operatorname{cosec.}\tau}{\alpha a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{dR}{d\varphi}-\frac{\cot.\tau}{\alpha a^2\sqrt{1-\varepsilon^2}}\frac{dR}{d\varpi}; \end{aligned}$$

il valore di R essendo espresso in funzione di $t, \varphi, \tau, a, c, \varepsilon, \varpi$ col mezzo della formola

$$(11)\qquad R=\frac{m'r\cos.\delta}{r'^2}+\cdots-\frac{m'}{\sqrt{(r^2-2rr'\cos.\delta+r'^2)}}-\text{ecc.}$$

nella quale r e p sono determinati dal sistema delle equazioni (8), (9), e l'angolo δ, compreso fra i raggi vettori r, r', dall'equazione

$$\cos.\delta=\frac{xx'+yy'+zz'}{rr'},$$

che si può ridurre a

$$(12)\qquad \begin{aligned} \cos.\delta=&\cos.(p-p'+\varphi-\varphi')\\ &+2\sin.p\sin.p'\left\{\sin.\tau\sin.\tau'\sin.^2\frac{\varphi-\varphi'}{2}-\sin.^2\frac{\tau'-\tau}{2}\cos.(\varphi-\varphi')\right\}\\ &-2\sin.(\varphi'-\varphi)\left\{\sin.^2\frac{\tau}{2}\sin.p\cos.p'-\sin.^2\frac{\tau'}{2}\sin.p'\cos.p\right\}. \end{aligned}$$

Aggiungiamo che se si impiega invece della formola (9) la seguente

$$(13)\qquad \psi=\int_0^t\alpha\,dt+c+\varepsilon\sin.\psi,$$

si dovrà nella terza delle equazioni (10) sostituire il valore di

$$\frac{dR}{da}$$

calcolato come se α non fosse funzione di a.

§. 3.° (*)

Integrazione delle formole che determinano i differenziali degli elementi elittici.

La determinazione dei moti relativi dei pianeti intorno al sole si trova evidentemente ridotta, dietro ciò che è stato detto superiormente, all'integrazione delle equazioni (10) del §. 2.° che forniscono i valori dei differenziali di

$$\varphi, \tau, a, c, \varepsilon, \varpi,$$

cioè a dire dei differenziali degli elementi elittici dell'orbita del pianeta m, e all'integrazione delle formole dello stesso genere che darebbero i differenziali degli elementi elittici degli altri pianeti m', m'' - - -. Se si pone per abbreviazione

$$(1) \qquad (m^2 + m'^2 + m''^2 + - - -)^{\frac{1}{2}} = \mu \quad \text{e}$$

$$(2) \qquad m = \Theta\mu, \; m' = \Theta'\mu, \; m'' = \Theta''\mu, \text{ ecc.}$$

Le quantità $\Theta, \Theta', \Theta''$ - - - verificheranno l'equazione

$$(3) \qquad \Theta^2 + \Theta'^2 + \Theta''^2 + - - - = 1$$

ed R sarà il prodotto di μ per una certa funzione delle sole quantità

$$\varphi, \tau, a, c, \varepsilon, \varpi; \; \varphi', \tau', a', c', \varepsilon', \varpi'; - - - t, \Theta, \Theta', - - -.$$

Conseguentemente le equazioni (10) del §. 1.° si ridurranno a

$$(4) \qquad \frac{da}{dt} = \mu\mathfrak{A}, \quad \frac{dc}{dt} = \mu\mathfrak{C}, \text{ ecc. - - -;}$$

e si avranno parimenti

$$(5) \qquad \frac{da'}{dt} = \mu\mathfrak{A}', \quad \frac{dc'}{dt} = \mu\mathfrak{C}', \text{ ecc.}$$

indicando $\mathfrak{A}, \mathfrak{C}$ - - - $\mathfrak{A}', \mathfrak{C}'$ - - - funzioni delle sole quantità

$$\varphi, \tau, a, c, \varepsilon, \varpi; \; \varphi', \tau', a', c', \varepsilon', \varpi'; - - - t, \Theta, \Theta', - - -.$$

Siano d'altronde

$$\varphi_0, \tau_0, a_0, c_0, \varepsilon_0, \varpi_0; \; \varphi'_0, \tau'_0, a'_0, c'_0, \varepsilon'_0 - - -$$

i valori di

$$\varphi, \tau, a, c, \varepsilon, \varpi; \; \varphi', \tau', a', c', \varepsilon', - - -$$

(*) Questo paragrafo quasi per intero è letteralmente estratto dalla Memoria presentata all'Accademia di Torino l'11 ottobre 1831.

corrispondenti a $t=0$. Sarà μ una quantità assai piccola rispetto ad M: e se a può essere sviluppata in serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di μ, si avrà

$$(6) \qquad a=a_0+\mu a_1+\frac{\mu^2}{1\cdot 2}a_2+\text{ecc.},$$

essendo a_1, a_2 - - - i valori di $\frac{da}{d\mu}$, $\frac{d^2a}{d\mu^2}$, ecc. corrispondenti a $\mu=0$. Di più differenziando rapporto a μ le formole (4), (5) ecc. - - - e supponendo in seguito $\mu=0$, si otterranno le seguenti

$$\frac{da}{d\mu}=\int_0^t \mathfrak{A}\,dt;\quad \frac{dc}{d\mu}=\int_0^t \mathfrak{C}\,dt \text{ ecc.}$$

$$\frac{d^2a}{d\mu^2}=2\int_0^t\left\{\frac{d\mathfrak{A}}{da}\int_0^t \mathfrak{A}\,dt+\frac{d\mathfrak{A}}{dc}\int_0^t \mathfrak{C}\,dt+\text{- - - -}+\frac{d\mathfrak{A}}{da'}\int_0^t \mathfrak{A}'dt+\text{- - -}\right\}\text{ecc.}$$

nei secondi membri delle quali si dovranno in luogo di $\varphi, \tau, a, c, \varepsilon, \varpi; \varphi', \tau'$, - - - porre $\varphi_0, \tau_0, a_0, c_0, \varepsilon_0, \varpi_0; \varphi'_0, \tau'_0$ - - - . Si avrà dunque

$$(7) \qquad a=a_0+\mu\int_0^t \mathfrak{A}\,dt+$$
$$\mu^2\int_0^t\left\{\frac{d\mathfrak{A}}{da}\int_0^t \mathfrak{A}dt+\frac{d\mathfrak{A}}{dc}\int_0^t \mathfrak{C}\,dt+\text{- - - -}+\frac{d\mathfrak{A}}{da'}\int_0^t \mathfrak{A}'dt+\text{- - -}\right\}dt+\text{ecc.}$$

purchè negli integrali che moltiplicano le diverse potenze della quantità μ si ponga a_0 per a, c_0 per c - - - . Si troverà sotto le stesse condizioni

$$(8) \qquad c=c_0+\mu\int_0^t \mathfrak{C}\,dt+$$
$$\mu^2\int_0^t\left\{\frac{d\mathfrak{C}}{da}\int_0^t \mathfrak{A}\,dt+\frac{d\mathfrak{C}}{dc}\int_0^t \mathfrak{C}\,dt+\text{- - - -}+\frac{d\mathfrak{C}}{da'}\int_0^t \mathfrak{C}'dt+\text{- - -}\right\}dt+\text{ecc.}$$

Le formole (7), (8), ecc. saranno gli integrali per serie delle equazioni (4), (5), ecc. - - - . Esse sussistono, e le serie che esse contengono, rimangono convergenti, almeno fintanto che il valore di μ non oltrepassa certi limiti. Mostreremo in una seconda Memoria come si possano determinare questi limiti ed anche quelli degli errori commessi allorchè nelle serie in quistione si trascurano tutti i termini nei quali l'esponente di μ sorpassa un numero dato n: attualmente mostreremo come si possano calcolare i valori approssimati degli integrali semplici o multipli che compongono i coefficienti delle diverse potenze di μ nei differenti termini di queste serie; come pure il grado d'approssimazione di questi stessi valori.

Primieramente risulta dalle equazioni (10) del §. 2.° che nei secondi membri delle formole (7), (8) - - - i coefficienti di μ si ridurranno a polinomj di cui si otterranno i differenti termini moltiplicando alcune funzioni determinate di a, c, ε - - - od a', c', ε' - - - per gli integrali semplici

$$(9) \qquad \int_0^t \frac{dR}{da} dt; \quad \int_0^t \frac{dR}{dc} dt; \quad --- \int_0^t \frac{dR}{da'} dt ---.$$

Quanto ai coefficienti del quadrato di μ essi potranno essere considerati come polinomj di cui si otterranno i diversi termini moltiplicando alcune funzioni determinate di a, c, ε--- a', c', ε'--- per gli integrali doppj

$$(10) \qquad \int_0^t \left\{ \frac{d^2R}{da\,d\varpi} \int_0^t \frac{dR}{d\varepsilon} dt - \frac{d^2R}{da\,d\varepsilon} \int_0^t \frac{dR}{d\varpi} dt \right\} dt \quad \text{ovvero}$$

$$(11) \qquad \int_0^t \left\{ \frac{d^2R}{da\,dc'} \int_0^t \frac{dR'}{d\varepsilon'} dt - \frac{d^2R}{da\,d\varepsilon'} \int_1^t \frac{dR'}{dc'} dt \right\} dt$$

e per quelli che se ne deducono, sia cambiando fra loro le quantità a, c, ε--- ovvero a', c', ε'---, sia anche sostituendo per esempio ϖ ad a senza sostituire nello stesso tempo a a ϖ. Si dovrà d'altronde, come abbiamo già detto, ridurre nelle funzioni e negli integrali di cui si tratta le quantità

$$a, c, \varepsilon --- ; \; a', c', \varepsilon' --- \text{ecc.}$$

alle costanti

$$a_0, c_0, \varepsilon_0 --- ; \; a'_0, c'_0, \varepsilon'_0 --- \text{ecc.}$$

di modo che le funzioni di a, c, ε---; a', c'--- per le quali gli integrali sono moltiplicati, potranno essere immediatamente ridotte in numeri. Conseguentemente per ottenere i valori generali degli elementi elittici basterà valutare gli integrali (9) se si conservano soltanto i termini che contengono la prima potenza di μ, cioè a dire se si limita l'approssimazione ai termini dell'ordine delle masse perturbatrici; gli integrali (10), (11) ecc. se si vogliono conservare i termini dell'ordine del quadrato delle masse; ecc.

Osserviamo ancora che se nel computo degli integrali semplici o multipli della forma

$$(12) \qquad \int_0^t S dt, \int_0^t \left\{ T \int_0^t S dt \right\} dt --- \text{ecc.}$$

si sostituiscono alle funzioni di t rappresentate da S, T, --- valori approssimati di queste funzioni rappresentati per $\mathcal{S}, \mathcal{T}$, ---, sarà facile fissare i limiti degli errori commessi nella sostituzione degli integrali

$$(13) \qquad \int_0^t \mathcal{S} dt, \int_0^t \left\{ \mathcal{T} \int_0^t \mathcal{S} dt \right\} dt --- \text{ecc.}$$

agli integrali (12) purchè si conoscano limiti superiori ai valori numerici delle differenze

$$S - \mathcal{S}, \quad T - \mathcal{T}, \text{ ecc.}$$

Difatto supponiamo che pei valori di t che permettono alle formole (7), (8), ecc. di sussistere, rimanga S compresa fra i limiti $\mathcal{S} \pm i$ e T fra i limiti $\mathcal{T} \pm j$: essendo i, j numeri assai piccoli. Siccome si avrà

$$\int_0^t S dt - \int_0^t \mathcal{S} dt = \int_0^t (S - \mathcal{S}) dt$$

$$\int_0^t \left(T \int_0^t S dt\right) dt - \int_0^t \left(\mathcal{T} \int_0^t \mathcal{S} dt\right) dt = \int_0^t \left\{(T - \mathcal{T}) \int_0^t S dt\right\} dt + \int_0^t \left\{\mathcal{T} \int_0^t (S - \mathcal{S}) dt\right\} dt$$

ecc.

è chiaro che l'errore commesso nel computo dell'integrale

$$\int_0^t S dt$$

sarà inferiore a

$$(14) \qquad \int_0^t i dt = it$$

e l'errore commesso nel computo dell'integrale

$$\int_0^t \left(T \int_0^t S dt\right) dt$$

a ciò che diventa l'espressione

$$(15) \qquad (iT + jS) \int_0^t \int_0^t dt^2 = (iT + jS) \frac{t^2}{2}$$

quando si pongano in luogo delle funzioni S, T i più grandi valori ch'esse possano acquistare avuto riguardo ai valori che può ricevere la variabile t. Ciò posto, per valutare approssimativamente gli integrali (9), (10), (11), ecc. e fissare nello stesso tempo i limiti degli errori commessi, basterà porre per R uno sviluppo in serie convergente preparato di tal modo che divenga facile effettuare una o più integrazioni relative a t dopo una o più differenziazioni relative alle quantità

$$a, c, \varepsilon, - - -; a', c', \varepsilon' - - -,$$

e nello stesso tempo assegnare limiti superiori al resto della serie ed alle derivate di questo resto prese per rapporto ad $a, c, \varepsilon - - - a', c' - - -$. Tale è l'oggetto di cui noi attualmente ci occuperemo.

Consideriamo primieramente il primo dei termini di cui si compone il polinomio R. Indicando questo termine per P avremo

$$(16) \qquad P = \frac{m' r \cos.\delta}{r'^2}.$$

Il valore di $\cos.\delta$ dato dall'equazione (12) del §. 2.° potrà essere presentato sotto la forma

$$(17) \qquad \begin{aligned} \cos.\delta = {} & H \cos.(p - \varpi) \cos.(p' - \varpi') + J \cos.(p - \varpi) \sin.(p' - \varpi') \\ & + I \sin.(p - \varpi) \cos.(p' - \varpi') + K \sin.(p - \varpi) \sin.(p' - \varpi'), \end{aligned}$$

i valori di H, I, J, K essendo

$$H = \cos.(\varphi - \varphi' + \varpi - \varpi') + 2\sin.\varpi\sin.\varpi'\left\{\sin.\tau\sin.\tau'\sin.^2\frac{\varphi'-\varphi}{2} - \sin.^2\frac{\tau'-\tau}{2}\cos.(\varphi'-\varphi)\right\}$$
$$-2\sin.(\varphi'-\varphi)\left\{\sin.^2\frac{\tau}{2}\sin.\varpi\cos.\varpi' - \sin.^2\frac{\tau'}{2}\sin.\varpi'\cos.\varpi\right\}$$

$$J = \sin.(\varphi-\varphi'+\varpi-\varpi') + 2\sin.\varpi\cos.\varpi'\left\{\sin.\tau\sin.\tau'\sin.^2\frac{\varphi'-\varphi}{2} - \sin.^2\frac{\tau'-\tau}{2}\cos.(\varphi'-\varphi)\right\}$$
$$-2\sin.(\varphi'-\varphi)\left\{-\sin.^2\frac{\tau}{2}\sin.\varpi\sin.\varpi' - \sin.^2\frac{\tau'}{2}\cos.\varpi'\cos.\varpi\right\}$$

$$I = -\sin.(\varphi-\varphi'+\varpi-\varpi') + 2\cos.\varpi\sin.\varpi'\left\{\sin.\tau\sin.\tau'\sin.^2\frac{\varphi'-\varphi}{2} - \sin.^2\frac{\tau'-\tau}{2}\cos.(\varphi'-\varphi)\right\}$$
$$-2\sin.(\varphi'-\varphi)\left\{\sin.^2\frac{\tau}{2}\cos.\varpi\cos.\varpi' + \sin.^2\frac{\tau'}{2}\sin.\varpi'\sin.\varpi\right\}$$

$$K = \cos.(\varphi-\varphi'+\varpi-\varpi') + 2\cos.\varpi\cos.\varpi'\left\{\sin.\tau\sin.\tau'\sin.^2\frac{\varphi'-\varphi}{2} - \sin.^2\frac{\tau'-\tau}{2}\cos.(\varphi'-\varphi)\right\}$$
$$-2\sin.(\varphi'-\varphi)\left\{-\sin.^2\frac{\tau}{2}\cos.\varpi\sin.\varpi' + \sin.^2\frac{\tau'}{2}\cos.\varpi'\sin.\varpi\right\}.$$

Di più in virtù delle formole (8) del §. 2.° e facendo per abbreviazione

$$(19) \qquad \eta = (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}$$

si avrà

$$(20) \qquad r = a(1-\varepsilon\cos.\psi) \quad \text{e}$$

$$(21) \qquad \cos.(p-\varpi) = \frac{\cos.\psi-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos.\psi}, \quad \sin.(p-\varpi) = \frac{\eta\sin.\psi}{1-\varepsilon\cos.\psi},$$

la ψ essendo determinata in funzione di t dall'equazione

$$(22) \qquad \psi = \alpha t + c + \varepsilon\sin.\psi.$$

Parimenti ponendo

$$(23) \qquad \eta' = (1-\varepsilon'^2)^{\frac{1}{2}}$$

si troverà

$$(24) \qquad r' = a'(1-\varepsilon'\cos.\psi') \quad \text{e}$$

$$(25) \qquad \cos.(p'-\varpi') = \frac{\cos.\psi'-\varepsilon'}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}, \quad \sin.(p'-\varpi') = \frac{\eta'\sin.\psi'}{1-\varepsilon'\cos.\psi'},$$

la ψ' essendo determinata in funzione di t per mezzo dell'equazione

$$(26) \qquad \psi' = \alpha' t + c' + \varepsilon'\sin.\psi'.$$

Ciò posto le formole (16) e (17) daranno

$$(27) \qquad P = \frac{m'a}{a'^2(1-\varepsilon'\cos.\psi')^3}\left\{\begin{array}{l} H(\cos.\psi-\varepsilon)(\cos.\psi'-\varepsilon') + K\eta\eta'\sin.\psi\sin.\psi' \\ + I\eta\sin.\psi(\cos.\psi'-\varepsilon') + J\eta'\sin.\psi'(\cos.\psi-\varepsilon) \end{array}\right\}.$$

Sia ora $\mathcal{P}$ ciò che diventa il valor precedente di P quando si ponga $\alpha t + \varepsilon$ in

luogo di ψ, $a't+c'$ in luogo di ψ' e facciamo inoltre

$$(28)\qquad T=at+c,\quad T'=a't+c'$$

in modo che si abbia

$$(29)\qquad \mathcal{P}=\frac{m'a}{a'^2(1-\varepsilon'\cos.T')^3}\left\{\begin{array}{l} H(\cos.T-\varepsilon)(\cos.T'-\varepsilon')+K\eta\eta'\sin.T\sin.T' \\ +I\eta\sin.T(\cos.T'-\varepsilon')+J\eta'\sin.T'(\cos.T-\varepsilon)\end{array}\right\}.$$

Poichè le eccentricità delle orbite planetarie, e per conseguenza i coefficienti ε, ε' di $\sin.\psi$, $\sin.\psi'$ nelle formole (22), (26) sono generalmente inferiori a 0,662742 - - -, si potrà in virtù della formola di Lagrange estesa al caso di due variabili sviluppare in serie convergente la funzione P e le sue derivate prese per rapporto agli elementi a, c, ε, - - -; a', c', ε' - - -; ed anche calcolare i limiti degli errori commessi allorchè in queste serie si trascureranno tutti i termini nei quali le potenze di ε, ε' introdotte dalle equazioni (22), (26) offriranno esponenti superiori ad un numero dato, od anche esponenti la cui somma sorpasserà un numero dato. Si troverà così

$$(30)\qquad \begin{array}{l} P=\mathcal{P}+\Sigma\dfrac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\cdots n}\dfrac{d^{n-1}\left(\dfrac{d\mathcal{P}}{dc}\sin.^n T\right)}{dc^{n-1}}+\Sigma\dfrac{\varepsilon'^{n'}}{1\cdot 2\cdots n'}\dfrac{d^{n'-1}\left(\dfrac{d\mathcal{P}}{dc'}\sin.^{n'} T'\right)}{dc'^{n'-1}} \\ \qquad +\Sigma\dfrac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\dfrac{\varepsilon'^{n'}}{1\cdot 2\cdots n'}\dfrac{d^{n+n'-2}\left(\dfrac{d^2\mathcal{P}}{dcdc'}\sin.^n T\sin.^{n'} T'\right)}{dc^{n-1}\cdot dc'^{n'-1}}. \end{array}$$

Dunque il calcolo dell'integrale $\int Pdt$ sarà ridotto a quello degli integrali

$$(31)\qquad \int\mathcal{P}dt,\ \int\frac{d\mathcal{P}}{dc}\sin.^n Tdt,\ \int\frac{d\mathcal{P}}{dc'}\sin.^{n'} T'dt,\ \int\frac{d^2\mathcal{P}}{dcdc'}\sin.^n T\sin.^{n'} T'dt.$$

Ora la valutazione di questi ultimi esige che si sviluppi secondo le potenze ascendenti di $\varepsilon'\cos.T'$ la funzione

$$(32)\qquad \frac{1}{(1-\varepsilon'\cos.T')^3}$$

che entra nel valore di $\mathcal{P}$, allora gli sviluppi degli integrali (31) non comprenderanno che integrali della forma

$$(33)\qquad \int\cos.^g T\cos.^{g'} T'\sin.^h T\sin.^{h'} T'dt$$

moltiplicati per quantità costanti, e nei quali

$$g,\ g',\ h,\ h'$$

saranno numeri interi. D'altronde si può facilmente trasformare il prodotto

$$\cos.^g T\cos.^{g'} T'\sin.^h T\sin.^{h'} T'$$

in un polinomio composto di termini della forma

$$A\cos.(nT+n'T')\quad\text{ovvero}\quad B\sin.(nT+n'T')$$

essendo A e B quantità costanti ed n, n' quantità intere positive o negative. Dunque si potrà definitivamente ricondurre la determinazione dell' integrale $\int Pdt$ a quella di integrali della forma

$$(34)\qquad \begin{aligned} &\int_0^t \cos.(nT+n'T')dt=\int_1^t \cos.\{(na+n'a')t+nc+n'c'\}dt \\ &\int_0^t \sin.(nT+n'T')dt=\int_0^t \sin.\{(na+n'a')t+nc+n'c'\}dt. \end{aligned}$$

Ora i valori di quest'ultimi saranno rispettivamente

$$(35)\qquad \begin{aligned} &\frac{\sin.\{(na+n'a')t+nc+n'c'\}-\sin.(nc+n'c')}{na+n'a'} \\ &\frac{\cos.(nc+n'c')-\cos.\{(na+n'a')t+nc+n'c'\}}{na+n'a'} \end{aligned}$$

e si ridurranno, se $na+n'a'$ svanisce, a

$$(36)\qquad t\cos.(nc+n'c);\quad t\sin.(nc+n'c).$$

Dunque nello sviluppo dell'integrale $\int Pdt$ i termini che varieranno col tempo saranno di una delle forme

$$(37)\qquad \begin{aligned} &A\cos.\{(na+n'a')t+nc+n'c'\} \\ &A\sin.\{(na+n'a')t+nc+n'c'\} \\ &At \end{aligned}$$

e simili termini si troveranno negli sviluppi degli elementi elittici a, c, ε - - -. I termini delle due prime forme, riprendendo periodicamente gli stessi valori quando si fa crescere t di

$$(38)\qquad \frac{2\pi}{na+n'a'}$$

costituiscono le così dette ineguaglianze periodiche dei movimenti planetarj. I termini della forma At costituiscono le ineguaglianze secolari.

È utile osservare che nel valore di $\int Pdt$ le espressioni della forma

$$\cos.\{(na+n'a')t+nc+n'c'\}$$

$$\sin.\{(na+n'a')t+nc+n'c'\}$$

avranno per divisore

$$na+n'a';$$

epperò i termini che rinchiuderanno queste espressioni potranno acquistare valori considerabili, se $na+n'a'$ differisca poco da zero. Egli è d'altronde evidente che per le ineguaglianze corrispondenti a piccoli valori di $na+n'a'$ il tempo del periodo cioè

$$\frac{2\pi}{na+n'a'}$$

acquista un valore assai grande.

Osserviamo ancora che se nello sviluppo del fattore

$$\frac{1}{(1-\varepsilon'\cos.T')^3}$$

e delle sue derivate prese rapporto ad ε' od a c', si trascurano i termini nei quali l'esponente di ε' diventa superiore ad un numero dato, sarà facile, dietro ciò che è stato detto nella prima parte, trovare i limiti degli errori commessi. Si può d'altronde giungere a questo scopo in mille differenti maniere. Così per esempio siccome si ha generalmente

$$(39) \qquad (1-x)^{-3}=\frac{1}{2}\left\{1\cdot 2+2\cdot 3x+3\cdot 4x^2+\cdots+(n+1)(n+2)x^n+\cdots\right\},$$

è chiaro che nello sviluppo dell'espressione (32) la somma dei termini proporzionali alla n^{esima} potenza di ε' o a potenze superiori sarà

$$\frac{1}{2}\left\{(n+1)(n+2)\varepsilon'^n\cos.^nT'+(n+2)(n+3)\varepsilon'^{n+1}\cos.^{n+1}T'+\cdots\right\},$$

e che questa somma offrirà un valore numerico inferiore a

$$\frac{1}{2}\left\{(n+1)(n+2)\varepsilon'^n+(n+2)(n+3)\varepsilon'^{n+1}+\cdots\right\}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}\varepsilon'^n\left\{1+\frac{n+2}{n+1}\,\frac{n+3}{n+2}\varepsilon'+\cdots\right\}$$

per conseguenza a

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}\varepsilon'^n\left\{1+\frac{2}{1}\,\frac{3}{2}\varepsilon'+\frac{3}{1}\,\frac{4}{2}\varepsilon'^2+\cdots\right\}$$

o, ciò che torna lo stesso, a

$$(40) \qquad \frac{(n+1)(n+2)}{2(1-\varepsilon')^3}\varepsilon'^n.$$

Al contrario la derivata di questa somma relativa ad ε' od a c' offrirà un valore numerico inferiore a

$$\frac{1}{2}\left\{n(n+1)(n+2)\varepsilon'^{n-1}+(n+1)(n+2)(n+3)\varepsilon'^n+\cdots\right\}$$

e per conseguenza a

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{2}\varepsilon'^{n-1}\left\{1+\frac{2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 3}\varepsilon'+\frac{3\cdot 4\cdot 5}{1\cdot 2\cdot 3}\varepsilon'^2+\cdots\right\}=\frac{n(n+1)(n+2)\varepsilon'^{n-1}}{2(1-\varepsilon')^4}$$

ecc.

In luogo di sviluppare nella $\mathcal{P}$ il fattore (32) secondo le potenze ascendenti di ε', si potrebbe sviluppare secondo le stesse potenze il fattore corrispondente di P cioè

$$\frac{1}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^3}$$

e si avrebbe allora

$$(41) \qquad \frac{1}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^3}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{n=\infty}(n+1)(n+2)\varepsilon'^n\cos.^n\psi',$$

il segno Σ estendendosi a tutti i valori interi e positivi di n. In seguito lo svi-

luppo di P si comporrebbe di termini proporzionali a prodotti della forma

$$\cos.^g\psi \cos.^{g'}\psi' \sin.^h\psi \sin.^{h'}\psi'$$

ciascuno degli esponenti g, h, h' non potendo essere che l'uno dei numeri *zero* od 1. Si avrebbe d'altronde in virtù della formola di Lagrange

$$(42)\quad \cos.^g\psi \sin.^h\psi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\cdots n}\left\{\frac{d^n(\cos.^g T \sin.^{h+n} T)}{dT^n} - n\frac{d^{n-1}(\cos.^{g+1} T \sin.^{h+n-1} T)}{dT^{n-1}}\right\}$$

dovendo il prodotto $1\cdot 2\cdots n$ cedere il luogo all'unità nel primo termine relativo al valor zero di n. Aggiungiamo che la formola (42) può anche scriversi come siegue

$$(43)\quad \cos.^g\psi \sin.^h\psi = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\cdots n}\left\{h\frac{d^{n-1}(\cos.^{g+1} T \sin.^{h+n-1} T)}{dT^{n-1}} - g\frac{d^{n-1}(\cos.^{g-1} T \sin.^{h+n+1} T)}{dT^{n-1}}\right\}$$

dovendosi in luogo della derivata dell'ordine -1 porre un integrale relativo a t; e che i valori di η, η' possono essi stessi essere sviluppati in serie convergenti ordinate secondo le potenze ascendenti di $\varepsilon, \varepsilon'$, poichè si ha generalmente

$$(44)\qquad \eta = (1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{1\cdot 2\cdots n}(-1)^n \varepsilon^{2n}.$$

Col mezzo delle equazioni (27), (41), (42), (43), (44) e delle due formole

$$(45)\qquad \cos. T = \frac{e^{T\sqrt{-1}} + e^{-T\sqrt{-1}}}{2}\,;\quad \sin. T = \frac{e^{T\sqrt{-1}} - e^{-T\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

si può sviluppare il valore di P in una serie ordinata secondo le potenze ascendenti di $\varepsilon, \varepsilon'$, ed anche determinare immediatamente il coefficiente d'un prodotto della forma

$$\frac{m'a}{a'^2}\,\varepsilon^n \varepsilon'^{n'} \cos.(NT + N'T'),\quad \text{ovvero}\quad \frac{m'a}{a'^2}\,\varepsilon^n \varepsilon'^{n'} \sin.(NT + N'T')$$

moltiplicato per l'una delle quantità H, I, J, K.

Per semplificare il calcolo noi rappresenteremo coi simboli

$$(k)_l \quad [k]_l$$

i coefficienti di x^l nello sviluppo di

$$(1+x)^k,\quad (1+x)^{-k}$$

di modo che si avrà per $l > 0$

$$(46)\qquad \begin{aligned} (k)_l &= \frac{k(k-1)\cdots(k-l+1)}{1\cdot 2\cdots l} = (k)_{k-l} \\ [k]_l &= \frac{k(k+1)\cdots(k+l-1)}{1\cdot 2\cdots l} = [l+1]_{k-1} = (k+l-1)_l = (k+l-1)_{k-1}; \end{aligned}$$

per $l=0$ anche quando k divenisse nullo

$$(47) \qquad (k)_0=[k]_0=1;$$

finalmente per $l<0$

$$(k)_l=[k]_l=0.$$

Ciò posto, si troveranno

$$\cos.^g T=\Sigma\frac{(g)_\rho}{2^g}e^{(g-2\rho)T\sqrt{-1}}; \quad \sin.^h T=\Sigma(-1)^\varsigma\frac{(h)_\varsigma}{(2\sqrt{-1})^h}e^{(h-2\varsigma)T\sqrt{-1}};$$

$$\cos.^g T\sin.^h T=\Sigma(-1)^\varsigma\frac{(g)_\rho(h)_\varsigma}{2^{g+h}(\sqrt{-1})^h}e^{(g+h-2\rho-2\varsigma)T\sqrt{-1}};$$

potendo il segno Σ essere esteso senza inconvenienti a tutti i valori interi di ρ e di ς, poichè $(g)_\rho$ ed $(h)_\varsigma$ svaniscono quando ρ diventa superiore a g ed ς superiore ad h. Le formole (42) e (43) daranno

$$(49) \qquad \cos.^g\psi\sin.^h\psi= \Sigma\frac{N^{n-1}}{2^{g+h+n}}\left\{(-1)^\varsigma N(g)_\rho(h+n)_\varsigma-(-1)^\varsigma n(g+1)_\rho(h+n-1)_\varsigma\right\}\frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\cdots n}\frac{e^{NT\sqrt{-1}}}{(\sqrt{-1})^h}$$

$$(50) \qquad \cos.^g\psi\sin.^h\psi= \Sigma\frac{N^{n-1}}{2^{g+h+n}}\left\{(-1)^\varsigma h(g+1)_\rho(h+n-1)_\varsigma+(-1)^\varsigma g(g-1)_\rho(h+n+1)_\varsigma\right\}\frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\cdots n}\frac{e^{NT\sqrt{-1}}}{(\sqrt{-1})^h}$$

il valore di N essendo

$$(51) \qquad N=g+h+n-2(\rho+\varsigma),$$

ed il segno Σ potendo essere esteso a tutti i valori nulli o positivi di n, ρ, ς. Si potrebbe d'altronde nel secondo membro delle formole (49), (50) ridurre l'espressione

$$\frac{e^{NT\sqrt{-1}}}{(\sqrt{-1})^h}$$

alla sua parte reale, cioè a dire a

$$(-1)^{\frac{h}{2}}\cos.NT$$

se h è pari, ed a

$$(-1)^{\frac{h-1}{2}}\sin.NT$$

nel caso contrario.

Si troverà in particolare ponendo $g=1$, $h=0$ nella formola (50)

$$(52) \qquad \cos.\psi=\Sigma\frac{(-1)^\varsigma}{2^{n+1}}(0)_\rho(n+1)_\varsigma\frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\cdots n}N^{n-1}e^{NT\sqrt{-1}}; \quad N=n+1-2(\rho+\varsigma),$$

o, ciò che torna lo stesso, poichè l'espressione $(0)_\rho$ non cesserà di essere nulla per ridursi all'unità che nel caso in cui si avrà $\rho=0$,

$$(53) \qquad \cos.\psi=\Sigma\frac{(-1)^\varsigma}{2^{n+1}}(n+1)_\varsigma\frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2\cdots n}N^{n-1}e^{NT\sqrt{-1}}; \quad N=n+1-2\varsigma;$$

e ponendo $g=0$, $h=1$

$$(54)\qquad \sin.\psi = \Sigma \frac{(-1)^{\varsigma}}{2^{n+1}} (1)_{\rho} (n)_{\varsigma} \frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2 \cdots n} N^{n-1} \frac{e^{NT\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}; \qquad N = n+1-2(\rho+\varsigma).$$

Se si combina la prima delle formole precedenti coll'equazione identica

$$(55)\qquad \varepsilon = \Sigma (0)_{n-1} (0)_{\varsigma-1} \varepsilon^n e^{NT\sqrt{-1}},$$

il valore di N essendo sempre

$$N = n+1-2\varsigma,$$

se ne conchiuderà

$$(56)\qquad \cos.\psi - \varepsilon = \Sigma \left\{ \frac{(-1)^{\varsigma}}{2^{n+1}} (n+1)_{\varsigma} \frac{N^{n-1}}{1\cdot 2 \cdots n} - (0)_{n-1} (0)_{\varsigma-1} \right\} \varepsilon^n e^{NT\sqrt{-1}}.$$

Si avrà d'altronde

$$(57)\qquad \begin{aligned} \frac{\sin.\psi'}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^3} &= \sum_{l=0}^{l=\infty} [3]_l \, \varepsilon'^l \cos.^l\psi' \sin.\psi' = \sum_{l=0}^{l=\infty} [l+1]_2 \, \varepsilon'^l \cos.^l\psi' \sin.\psi' \\ \frac{\cos.\psi' - \varepsilon'}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^3} &= \sum_{l=0}^{l=\infty} \left\{ [l+1]_2 \cos.^{l+1}\psi' - [l]_2 \cos.^{l-1}\psi' \right\} \varepsilon'^l; \end{aligned}$$

e da quest'ultime equazioni combinate colla formola (50) si dedurrà, scrivendo $n'-l$ in luogo di n,

$$(58)\qquad \begin{aligned} &\frac{\sin.\psi'}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^3} = \\ &\Sigma \frac{[l+1]_2}{2^{n'+1}} \left\{ (-1)^{\varsigma} (l+1)_{\rho} (n'-l)_{\varsigma} + (-1)^{\varsigma} l (l-1)_{\rho} (n'-l+2)_{\varsigma} \right\} \frac{N'^{n'-l-1} \varepsilon'^{n'}}{1\cdot 2 \cdots (n'-l)} \frac{e^{N'T'\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

il valore di N' essendo

$$(59)\qquad N' = n'+1-2(\rho+\varsigma);$$

e

$$(60)\qquad \begin{aligned} \frac{\cos.\psi' - \varepsilon'}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^3} &= \Sigma \frac{[l+1]_2}{2^{n'+1}} (-1)^{\varsigma} (l+1)(l)_{\rho} (n'-l+1)_{\varsigma} \frac{N'^{n'-l-1} \varepsilon'^{n'}}{1\cdot 2 \cdots (n'-l)} e^{N'T'\sqrt{-1}} \\ &- \Sigma \frac{[l]_2}{2^{n'-1}} (-1)^{\varsigma} (l-1)(l-2)_{\rho} (n'-l+1)_{\varsigma} \frac{N'^{n'-l-1} \varepsilon'^{n'}}{1\cdot 2 \cdots (n'-l)} e^{N'T'\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

il valore di N' essendo determinato nel primo dei due termini formanti il secondo membro dell'equazione (60) per la formola (59) e nel secondo termine per la seguente

$$(61)\qquad N' = n'-1-2(\rho+\varsigma).$$

Se si volesse che il valore di N' fosse determinato nell'uno e nell'altro termine per mezzo della formola (59) basterebbe evidentemente porre nel secondo termine $\rho-1$ in luogo di ρ.

Se ora si unisce la formola (27) alle formole (54), (56), (58), (60) se ne dedurrà

$$\begin{aligned} P = &\frac{m'a}{a'^2} \Sigma (HAA' - K\eta\eta' BB') \frac{\varepsilon^n \varepsilon'^{n'}}{2^{n+n'+2}} \cos.(NT+N'T') \\ &+ \frac{m'a}{a'^2} \Sigma (I\eta A'B + J\eta' AB') \frac{\varepsilon^n \varepsilon'^{n'}}{2^{n+n'+2}} \sin.(NT+N'T'); \end{aligned}$$

i valori di A, B, A', B' essendo determinati per mezzo delle formole

$$(63)\qquad A=\Sigma\left\{(-1)^{\varsigma}(n+1)_{\varsigma}\frac{N^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n}-2^{n+1}(0)_{n-1}(0)_{\varsigma-1}\right\};\quad N=n+1-2\varsigma$$

$$(64)\qquad B=\Sigma(-1)^{\varsigma}(1)_{\rho}(n)_{\varsigma}\frac{N^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n};\quad N=n+1-2(\rho+\varsigma)$$

$$(65)\qquad \begin{aligned} A'=&\Sigma(-1)^{\varsigma}[l+1]_2(l+1)(l)_{\rho}(n'-l+1)_{\varsigma}\frac{N'^{n'-l-1}}{1\cdot 2\cdots(n'-l)}\\ &-4\Sigma(-1)^{\varsigma}[l]_2(l-1)(l-2)_{\rho-1}(n'-l+1)_{\varsigma}\frac{N'^{n'-l-1}}{1\cdot 2\cdots(n'-l)}\end{aligned};\quad N'=n'+1-2(\rho+\varsigma)$$

$$(66)\qquad B'=\Sigma[l+1]_2\left\{(-1)^{\varsigma}(l+1)_{\rho}(n'-l)_{\varsigma}+(-1)^{\varsigma}l(l-1)_{\rho}(n'-l+2)_{\varsigma}\right\}\frac{N'^{n'-l-1}}{1\cdot 2\cdots(n'-l)}.$$

Presentemente è facile vedere quali sono le formole che si dovranno sostituire alle equazioni (64), (66) per comprendere nei coefficienti B e B' quelli che corrispondono agli sviluppi di η e di η'. Difatti siccome si avrà in virtù della formola (44)

$$\eta=\Sigma(-1)^{\upsilon}\left(\frac{1}{2}\right)_{\upsilon}\varepsilon^{2\upsilon},$$

e conseguentemente

$$\eta\,\varepsilon^{n}=\Sigma(-1)^{\upsilon}\left(\frac{1}{2}\right)_{\upsilon}\varepsilon^{n+2\upsilon};$$

è chiaro che se si pone

$$(67)\qquad \begin{aligned}\mathcal{P}=&\frac{m'a}{a'^2}\Sigma\left\{HAA'-KBB'\right\}\frac{\varepsilon^{n}\,\varepsilon'^{n'}}{2^{n+n'+2}}\cos.(NT+N'T')\\ &+\frac{m'a}{a'^2}\Sigma\left\{IA'B+JAB'\right\}\frac{\varepsilon^{n}\,\varepsilon'^{n'}}{2^{n+n'+2}}\sin.(NT+N'T'),\end{aligned}$$

si dovrà, conservando gli stessi valori dei coefficienti A, A', sostituire a B, B' valori determinati colle formole

$$(68)\qquad B=\Sigma(-1)^{\varsigma+\upsilon}\left(\frac{1}{2}\right)_{\upsilon}(1)_{\rho}(n-2v)_{\varsigma}\frac{2^{\upsilon}N^{n-2\upsilon-1}}{1\cdot 2\cdots(n-2v)},\quad N=n+1-2v-2(\rho+\varsigma)$$

$$(69)\qquad \begin{aligned}B'=&\Sigma(-1)^{\upsilon}\left(\frac{1}{2}\right)_{\upsilon}[l+1]_2\left\{(-1)^{\varsigma}(l+1)_{\rho}(n'-l-2v)_{\varsigma}\right.\\ &\left.+(-1)^{\varsigma}l(l-1)_{\rho}(n'-l+2-2v)_{\varsigma}\right\}\frac{2^{2\upsilon}N'^{n'-l-2\upsilon-1}}{1\cdot 2\cdots(n'-l-2v)}\\ &N'=n'+1-2v-2(\rho+\varsigma).\end{aligned}$$

In ciascuna delle equazioni (63), (65), (67), (68), (69) il segno Σ potrebbe essere esteso a tutti i valori interi reali o positivi dei numeri n, n', l, ρ, ς, v che non rendano negative le quantità rinchiuse fra parentesi nelle espressioni della forma

$$(k)_{l},$$

per esempio la quantità $n-2v$ rinchiusa nel simbolo

$$(n-2v)_\varsigma .$$

Ma egli è chiaro che se si cercano i valori di A, A', B, B' corrispondenti a valori dati di n, n', N, N', si dovranno scegliere

$$l, \rho, \varsigma, v$$

in modo da verificare le equazioni

$$N=n+1-2\varsigma, \quad N=n+1-2(\rho+\varsigma), \quad \text{ecc.}$$

e che si potrà inoltre far astrazione dai valori di

$$l, \ \rho, \ \varsigma, \ v$$

pei quali i termini di cui il segno Σ rappresenta la somma si ridurrebbero a zero. Per conseguenza si avrà

$$(70) \qquad A=0,$$

se $N-n$ è pari;

$$(71) \qquad A=-6$$

se si suppone $n=1$, $N=0$; e

$$(72) \qquad A=(-1)^{\frac{n+1-N}{2}}(n+1)_{\frac{n+1-N}{2}} \frac{N^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$$

se N ed $n-1$ essendo differenti da zero, $N-n$ è un numero impari.
Di più si potrà supporre in A'

$$l= \text{ovvero} < n'+1, \quad \rho= \text{ovvero} < l, \quad \varsigma= \text{ovvero} < n'-l+1;$$

in B

$$v= \text{ovvero} < \frac{n}{2}, \qquad \rho= \text{ovvero} < 1, \quad \varsigma= \text{ovvero} < n-2v;$$

finalmente in B'

$$\rho= \text{ovvero} < l+1, \quad \varsigma= \text{ovvero} < n'-l-2v.$$

Dunque $\rho+\varsigma$ non potrà sorpassare il numero $n'+1$ in A', il numero $n+1-2v$ in B, il numero $n'+1-2v$ in B': e per conseguenza le due quantità N, N' si troveranno sempre rinchiuse la prima fra i limiti

$$-(n+1), \quad +(n+1);$$

la seconda fra i limiti

$$-(n'+1), \quad +(n'+1).$$

Osserviamo ancora che dovendo i coefficienti di $\sqrt{-1}$ essere nulli nei secondi membri delle formole (54), (56), (58) e (60), si può all'equazione (67) sostituire la seguente

$$(73) \qquad P=\frac{m'a}{a'^2}\Sigma\left\{\begin{matrix} HAA'\cos.NT\cos.N'T'+KBB'\sin.NT\sin.N'T' \\ +IA'B\sin.NT\cos.N'T'+JAB'\cos.NT\sin.N'T' \end{matrix}\right\}\frac{\varepsilon^n\varepsilon'^{n'}}{2^{n+n'+2}}.$$

Per mostrare una applicazione delle formole che precedono, cerchiamo i valori di A, A', B, B' corrispondenti al caso in cui si suppongano le quantità N, N' equivalenti ai loro limiti superiori, cioè a dire

$$(74) \qquad N = n+1, \quad N' = n'+1.$$

In questa ipotesi la formola (72) darà

$$(75) \qquad A = \frac{(n+1)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdots n}.$$

Si avrà di più nella formola (68)

$$\rho + \varsigma + v = 0$$

e per conseguenza $\rho = 0$, $\varsigma = 0$, $v = 0$. Dunque

$$(76) \qquad B = \frac{(n+1)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdots n} = A.$$

Finalmente nelle formole (65) e (69) si avrà

$$\rho + \varsigma = 0 \quad \text{ovvero} \quad \rho + \varsigma + v = 0$$

e per conseguenza $\rho = 0$, $\varsigma = 0$, $v = 0$,

$$(77) \qquad A' = \Sigma\,[l+1]_2\,(l+1)\,\frac{(n'+1)^{n'-l-1}}{1 \cdot 2 \cdots (n'-l)} = B'$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(78) \qquad A' = \frac{(n'+1)^{n'+1}}{1 \cdot 2 \cdots n'} = B'.$$

Così nello sviluppo di P un termine corrispondente a valori di n, n', N, N' che verificano le condizioni (74), è della forma

$$(79) \qquad \frac{m'a}{a'^2} AA' \left\{ \begin{array}{l} H\cos.(n+1)T\cos.(n'+1)T' + K\sin.(n+1)T\sin.(n'+1)T' \\ + I\sin.(n+1)T\cos.(n'+1)T' + J\cos.(n+1)T\sin.(n'+1)T' \end{array} \right\} \frac{\varepsilon^n\,\varepsilon'^{n'}}{2^{n+n'+2}}$$

essendo questi valori di A, A' dati dalle equazioni (75), (78). Un secondo termine eguale a questo corrisponderebbe ai valori di N, N' dati dalle equazioni

$$(80) \qquad N = -(n+1), \quad N' = -(n'+1);$$

e se si fa per abbreviazione

$$(81) \qquad \begin{array}{l} \cos.\Delta = H\cos.(n+1)T\cos.(n'+1)T' + K\sin.(n+1)T\sin.(n'+1)T' \\ \quad + I\sin.(n+1)T\cos.(n'+1)T' + J\cos.(n+1)T\sin.(n'+1)T' \end{array}$$

la somma dei termini riuniti o il doppio del primo sarà

$$(82) \qquad \frac{m'a}{a'^2} \; \frac{(n+1)^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} \; \frac{(n'+1)^{n'+1}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n'} \; \frac{\varepsilon^n\,\varepsilon'^{n'}}{2^{n+n'+1}} \cos.\Delta.$$

Aggiungiamo che si otterranno ancora termini equivalenti ponendo

$$N = -(n+1), \quad N' = n'+1$$

$$\text{e} \quad N = n+1, \quad N' = -(n'+1).$$

Dunque la somma dei quattro termini relativi a valori di N, N', n, n' talmente scelti che si abbiano

$$N = \pm(n+1), \quad N' = \pm(n'+1)$$

sarà

$$(83) \qquad \frac{m'a}{a'^2} \; \frac{(n+1)^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n} \; \frac{(n'+1)^{n'+1}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n'} \; \frac{\varepsilon^n \varepsilon'^{n'}}{2^{n+n'}} \cos.\Delta .$$

È bene osservare che per ottenere $\cos.\Delta$ basta porre nel valor generale di $\cos.\delta$

$$p = \varpi + (n+1)T, \quad p' = \varpi' + (n'+1)T'$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(84) \qquad p = \varpi + T\sqrt{N^2}; \quad p' = \varpi' + T'\sqrt{N'^2}.$$

Del resto non bisogna già credere che i valori numerici di A e di B siano generalmente eguali fra loro. Poichè se si suppone

$$N = n - 1$$

si dedurrà dalla formola (72)

$$(85) \qquad A = -(n+1)\frac{(n-1)^{n-1}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n}$$

e dalla formola (68)

$$(86) \qquad B = -(n^2+1)\frac{(n-1)^{n-2}}{1\cdot 2\cdot 3 \cdots n}.$$

Ritorniamo alla formola (73). Siccome si hanno identicamente

$$A = \frac{A+B}{2} + \frac{A-B}{2}; \quad B = \frac{A+B}{2} - \frac{A-B}{2}$$

$$A' = \frac{A'+B'}{2} + \frac{A'-B'}{2}; \quad B' = \frac{A'+B'}{2} - \frac{A'-B'}{2},$$

se ne conchiuderà

$$\begin{aligned}
& HAA' \cos.NT \cos.N'T' + KBB' \sin.NT \sin.N'T' \\
& + IA'B \sin.NT \cos.N'T' + JAB' \cos.NT \sin.N'T' \\
= & \frac{A+B}{2}\cdot\frac{A'+B'}{2}\left\{\begin{matrix} H\cos.NT\cos.N'T' + I\sin.NT\cos.N'T' \\ + J\cos.NT\sin.N'T' + K\sin.NT\sin.N'T' \end{matrix}\right\} \\
+ & \frac{A+B}{2}\cdot\frac{A'-B'}{2}\left\{\begin{matrix} H\cos.NT\cos.N'T' + I\sin.NT\cos.N'T' \\ - J\cos.NT\sin.N'T' - K\sin.NT\sin.N'T' \end{matrix}\right\} \\
+ & \frac{A-B}{2}\cdot\frac{A'+B'}{2}\left\{\begin{matrix} H\cos.NT\cos.N'T' - I\sin.NT\cos.N'T' \\ + J\cos.NT\sin.N'T' - K\sin.NT\sin.N'T' \end{matrix}\right\} \\
+ & \frac{A-B}{2}\cdot\frac{A'-B'}{2}\left\{\begin{matrix} H\cos.NT\cos.N'T' - I\sin.NT\cos.N'T' \\ - J\cos.NT\sin.N'T' + K\sin.NT\sin.N'T' \end{matrix}\right\}.
\end{aligned}$$

Dunque se si indica per

$$\cos.\Delta_{NT,\,N'T'}$$

ciò che diventa $\cos.\delta$ quando si pone

$$(87) \qquad p = \varpi + NT, \quad p' = \varpi' + N'T',$$

in modo che si abbia

$$(88)\qquad \cos.\Delta_{NT,\,N'T'}$$
$$=H\cos.NT\cos.N'T'+I\sin.NT\cos.N'T'+J\cos.NT\sin.N'T'+K\sin.NT\sin.N'T',$$

si troverà generalmente

$$(89)\quad P=\frac{m'a}{a'^2}\Sigma\left\{\begin{array}{l}\frac{A+B}{2}\,\frac{A'+B'}{2}\cos.\Delta_{NT,\,N'T'}+\frac{A+B}{2}\,\frac{A'-B'}{2}\cos.\Delta_{NT,\,-N'T'}\\ +\frac{A-B}{2}\,\frac{A'+B'}{2}\cos.\Delta_{-NT,\,N'T'}+\frac{A-B}{2}\,\frac{A'-B'}{2}\cos.\Delta_{-NT,\,-N'T'}\end{array}\right\}\frac{\varepsilon^n\,\varepsilon'^{n'}}{2^{n+n'+2}}.$$

D'altra parte è facile assicurarsi che i prodotti

$$A\cos.NT,\quad B\sin.NT$$

non variano quando si cambi N in $-N$, cioè a dire che allora B si cambia in $-B$, A rimanendo lo stesso. Parimenti quando si cambia N' in $-N'$, B' si cambia in $-B'$ rimanendo A' lo stesso. Per conseguenza si avranno

$$\Sigma\frac{A+B}{2}\,\frac{A'+B'}{2}\,\varepsilon^n\,\varepsilon'^{n'}\cos.\Delta_{NT,\,N'T'}=\Sigma\frac{A+B}{2}\,\frac{A'-B'}{2}\,\varepsilon^n\,\varepsilon'^{n'}\cos.\Delta_{NT,\,-N'T'}$$
$$=\Sigma\frac{A-B}{2}\,\frac{A'+B'}{2}\,\varepsilon^n\,\varepsilon'^{n'}\cos.\Delta_{-NT,\,N'T'}=\Sigma\frac{A-B}{2}\,\frac{A'-B'}{2}\,\varepsilon^n\,\varepsilon'^{n'}\cos.\Delta_{-NT,\,-N'T'},$$

e la formola (89) darà

$$(90)\qquad P=\frac{m'a}{a'^2}\,\Sigma\,(A+B)(A'+B')\frac{\varepsilon^n\,\varepsilon'^{n'}}{2^{n+n'+2}}\cos.\Delta_{NT,\,N'T'}$$

estendendosi il segno Σ a tutti i valori positivi di n, n' ed a tutti i valori positivi o negativi di N, N'.

I valori di A, A', B, B' dati dalle equazioni (63), (65), (68), (69) furono dedotti dalla formola (50). Se a questa formola si sostituisse la formola (49) si troverebbero

$$A=\Sigma\left\{(-1)^\varsigma N(1)_\rho(n)_\varsigma-(-1)^\varsigma n(2)_\rho(n-1)_\varsigma\right\}\frac{N^{n-1}}{1\cdot2\cdots n};\quad N=n+1-2(\rho+\varsigma)$$
$$-\Sigma\,2^n(0)_{n-1}(0)_{\varsigma+\rho-1}$$

$$B=\Sigma\left\{\begin{array}{l}(-1)^\varsigma N(0)_\rho(n+1-2v)_\varsigma\\ -(-1)^\varsigma(n-2v)(1)_\rho(n-2v)_\varsigma\end{array}\right\}(-1)^v\frac{2^{2v}N^{n-2v-1}}{1\cdot2\cdots(n-2v)};$$
$$N=n+1-2v-2(\rho+\varsigma)$$

$$(91)\quad A'=\Sigma[l+1]_2\left\{\begin{array}{l}(-1)^\varsigma N'(l+1)_\rho(n'-l)_\varsigma\\ -(-1)^\varsigma(n'-l)(l+2)_\rho(n'-l-1)_\varsigma\end{array}\right\}\frac{N'^{n'-l-1}}{1\cdot2\cdots(n'-l)}$$
$$-4\Sigma[l]_2\left\{\begin{array}{l}(-1)^\varsigma N'(l-1)_{\rho-1}(n'-l)_\varsigma\\ -(-1)^\varsigma(n'-l)(l)_{\rho-1}(n'-l-1)_\varsigma\end{array}\right\}\frac{N'^{n'-l-1}}{1\cdot2\cdots(n'-l)};$$
$$N'=n'+1-2(\rho+\varsigma)$$

$$B'=\Sigma(-1)^v\left(\frac{1}{2}\right)_v[l+1]_2\left\{\begin{array}{l}(-1)^\varsigma N'(l)_\rho(n'+1-l-2v)_\varsigma\\ -(-1)^\varsigma(n'-l-2v)(l+1)_\rho(n'-l-2v)_\varsigma\end{array}\right\}\frac{2^{2v}N'^{n'-2v-l-1}}{1\cdot2\cdots(n'-2v-l)}$$

Le formole (91) offrono il vantaggio ch'esse forniscono i valori di A, A', B, B' anche nel caso in cui si suppone $N=0$ ovvero $N'=0$. Così, per esempio, la prima darà per $N=0$

$$A=0$$

se n differisce dall'unità e

$$A=-6$$

se $n=1$. Parimenti ponendo nella terza $N=0$ se ne dedurrà

$$(92)\qquad A'=\left\{[n'+1]_2-[n']_2\right\}(n'+1)_{\frac{n'+1}{2}}-4\left\{[n']_2-[n'-1]_2\right\}(n'-1)_{\frac{n'-1}{2}}$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(93)\qquad A'=0.$$

È bene osservare che se in A, A', B, B' si considerano N ed N' come costanti, le somme

$$(94)\qquad \begin{array}{ll} \Sigma A\,\dfrac{\varepsilon^n}{2^{n+1}}, & \Sigma B\,\dfrac{\varepsilon^n}{2^{n+1}} \\ \Sigma A'\,\dfrac{\varepsilon'^{n'}}{2^{n'+1}}, & \Sigma B'\,\dfrac{\varepsilon'^{n'}}{2^{n'+1}} \end{array}$$

non saranno altro che i coefficienti di

$$\cos.(\pm NT),\quad \sin.(\pm NT),\quad \cos.(\pm N'T'),\quad \sin.(\pm N'T')$$

negli sviluppi delle espressioni

$$(95)\qquad \cos.\psi-\varepsilon,\quad \eta\sin.\psi,\quad \frac{\cos.\psi'-\varepsilon'}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^3},\quad \frac{\eta'\sin.\psi'}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^3}$$

in serie della forma

$$(96)\qquad \begin{array}{l} \sum\limits_{-\infty}^{\infty} A_N\cos.NT=A_0+2\sum\limits_{0}^{\infty} A_N\cos.NT \\ \sum\limits_{-\infty}^{\infty} B_N\sin.NT=2\sum\limits_{0}^{\infty} B_N\sin.NT \\ \sum\limits_{-\infty}^{\infty} A'_{N'}\cos.N'T'=A'_0+2\sum\limits_{0}^{\infty} A'_{N'}\cos.N'T' \\ \sum\limits_{-\infty}^{\infty} B'_{N'}\sin.N'T'=2\sum\limits_{0}^{\infty} B'_{N'}\sin.N'T' \end{array}$$

nelle quali si avrà

$$A_{-N}=A_N,\quad B_{-N}=-B_N,\quad A'_{-N'}=A'_{N'},\quad B'_{-N'}=-B'_{N'}.$$

D'altronde ponendo

$$\cos.\psi-\varepsilon=\sum_{-\infty}^{\infty} A_N\cos.NT$$

se ne conchiuderà

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos.NT(\cos.\psi-\varepsilon)\,dT=2\pi\,\frac{A_N+A_{-N}}{2}=2\pi A_N$$

e quest'ultima formola sussisterà evidentemente anche nel caso in cui si supponesse $N=0$. Si avrà dunque

$$(97) \qquad \cos.\psi - \varepsilon = \sum_{-\infty}^{\infty} A_N \cos.NT,$$

il valore di A_N essendo

$$(98) \qquad A_N = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos.NT(\cos.\psi - \varepsilon)\, dT.$$

D'altra parte le formole (22), (28) daranno

$$(99) \qquad T = \psi - \varepsilon \sin.\psi$$

ed è chiaro che per $T = \pm\pi$ si avrà $\psi = \pm\pi$. Ciò posto, si dedurrà dalla formola (98) integrando per parti

$$A_N = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} \sin.NT \sin.\psi\, d\psi$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(100) \qquad A_N = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} \sin.\psi \sin.N(\psi - \varepsilon \sin.\psi)\, d\psi.$$

Si troverà parimenti

$$(101) \qquad \eta \sin.\psi = \sum_{-\infty}^{\infty} B_N \sin.NT,$$

il valore di B_N essendo

$$B_N = \frac{1}{2\pi} \eta \int_{-\pi}^{\pi} \sin.NT \sin.\psi\, dT = \frac{\eta}{2\pi N} \int_{-\pi}^{\pi} \cos.NT \cos.\psi\, d\psi$$

ovvero

$$(102) \qquad B_N = \frac{1}{2\pi N} \eta \int_{-\pi}^{\pi} \cos.\psi \cos.N(\psi - \varepsilon \sin.\psi)\, d\psi.$$

Finalmente si avrà

$$(103) \qquad \frac{\cos.\psi' - \varepsilon'}{(1 - \varepsilon' \cos.\psi')^3} = \sum_{-\infty}^{\infty} A'_{N'} \cos.N'T'$$

e

$$(104) \qquad \frac{\eta' \sin.\psi'}{(1 - \varepsilon' \cos.\psi')^3} = \sum_{-\infty}^{\infty} B'_{N'} \sin.N'T',$$

i valori di $A'_{N'}$ e di $B'_{N'}$ essendo

$$(105) \qquad \begin{aligned} A'_{N'} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos.\psi' - \varepsilon'}{(1 - \varepsilon' \cos.\psi')^3} \cos.N'T'\, dT' \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos.\psi' - \varepsilon'}{(1 - \varepsilon' \cos.\psi')^2} \cos.N'(\psi' - \varepsilon' \sin.\psi')\, d\psi' \end{aligned}$$

e

$$(106) \qquad B'_{N'} = \frac{1}{2\pi} \eta' \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin.\psi'}{(1 - \varepsilon' \cos.\psi')^2} \sin.N'(\psi' - \varepsilon' \sin.\psi')\, d\psi'.$$

Osserviamo ancora che col mezzo di una integrazione per parti si riduce il

valore di $B'_{N'}$ a

$$(107)\qquad B'_{N'}=\frac{1}{2\pi}\,\frac{N'\eta'}{\varepsilon'}\int_{-\pi}^{\pi}\cos.N'(\psi'-\varepsilon'\sin.\psi')d\psi',$$

si troverà d'altronde

$$\cos.N'(\psi'-\varepsilon'\sin.\psi')=\frac{1}{2}\left\{e^{-N'\psi'\sqrt{-1}}\,e^{N'\varepsilon'\sin.\psi'\sqrt{-1}}+e^{N'\psi'\sqrt{-1}}\,e^{-N'\varepsilon'\sin.\psi'\sqrt{-1}}\right\}$$

$$=\frac{1}{2}\Sigma\,\frac{\varepsilon'^{n'+1}N'^{n'+1}}{1\cdot2\cdot3\cdots(n'+1)}(\sqrt{-1}\sin.\psi')^{n'+1}\left\{e^{-N'\psi'\sqrt{-1}}+(-1)^{n'+1}e^{N'\psi'\sqrt{-1}}\right\}$$

$$=\Sigma\,\frac{1}{2^{n'+2}}\,\frac{\varepsilon'^{n'+1}N'^{n'+1}}{1\cdot2\cdots(n'+1)}(e^{\psi'\sqrt{-1}}-e^{-\psi'\sqrt{-1}})^{n'+1}\left\{e^{-N'\psi'\sqrt{-1}}+(-1)^{n'+1}e^{N'\psi'\sqrt{-1}}\right\}$$

$$=\Sigma\,\frac{1}{2^{n'+2}}\,\frac{\varepsilon'^{n'+1}N'^{n'+1}}{1\cdot2\cdots(n'+1)}(-1)^{\varsigma}(n'+1)_{\varsigma}\,e^{(n'+1-2\varsigma)\psi'\sqrt{-1}}\left\{e^{-N'\psi'\sqrt{-1}}+(-1)^{n'+1}e^{N'\psi'\sqrt{-1}}\right\}.$$

Moltiplicando per $d\psi'$ i due membri di quest'ultima formola, ed integrando fra i limiti $\psi'=-\pi$, $\psi'=\pi$, se ne conchiuderà

$$(108)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos.N'(\psi'-\varepsilon'\sin.\psi')\,d\psi'$$

$$=2\pi\Sigma\,\frac{1}{2^{n'+2}}\,\frac{\varepsilon'^{n'+1}N'^{n'+1}}{1\cdot2\cdots(n'+1)}\left\{(-1)^{\frac{n'+1-N'}{2}}(n'+1)_{\frac{n'+1-N'}{2}}+(-1)^{n'+1+\frac{n'+1+N'}{2}}(n'+1)_{\frac{n'+1+N'}{2}}\right\}.$$

D'altra parte

$$(-1)^{n'+1+\frac{n'+1+N'}{2}}=(-1)^{2(n'+1)-\frac{n'+1-N'}{2}}=(-1)^{\frac{n'+1-N'}{2}}$$

e

$$(n'+1)_{\frac{n'+1-N'}{2}}=(n'+1)_{\frac{n'+1+N'}{2}}$$

dunque

$$(109)\qquad \int_{-\pi}^{\pi}\cos.N'(\psi'-\varepsilon'\sin.\psi')d\psi'=2\pi\Sigma\,\frac{(-1)^{\varsigma}}{2^{n'+1}}\,\frac{\varepsilon'^{n'+1}N'^{n'+1}}{1\cdot2\cdots(n'+1)}(n'+1)_{\varsigma},$$

il valore di ς essendo

$$(110)\qquad \varsigma=\frac{n'+1-N'}{2};$$

e la formola (107) darà

$$(111)\qquad B'_{N'}=\eta'\Sigma\,\frac{(-1)^{\frac{n'+1-N'}{2}}}{2^{n'+1}}\,\frac{\varepsilon'^{n'}N'^{n'+2}}{1\cdot2\cdots(n'+1)}(n'+1)_{\frac{n'+1-N'}{2}}$$

$$=(1-\varepsilon'^2)^{\frac{1}{2}}\,\Sigma\,\frac{(-1)^{\frac{n'+1-N'}{2}}}{2^{n'+1}}\,\frac{\varepsilon'^{n'}N'^{n'+2}}{1\cdot2\cdots(n'+1)}(n'+1)_{\frac{n'+1-N'}{2}}.$$

Sviluppando il secondo membro della formola (111) secondo le potenze ascendenti di ε', si riconosce immediatamente; 1.° che N' essendo positivo, tutti gli

esponenti di ε' nello sviluppo sono eguali o superiori a $N'-1$ poichè

$$(n'+1)_{\frac{n'+1-N'}{2}}$$

svanisce allorchè $n'+1$ è inferiore ad N'; 2.° che il coefficiente di

$$\frac{\varepsilon'^{n'}}{2^{n'+1}}$$

per $n'=N'-1$ è

$$(112) \qquad \frac{(n'+1)^{n'+1}}{1\cdot 2 \cdots n'}$$

ciò che si trova d'accordo colla formola (78).

I valori di A_N, B_N, $A'_{N'}$, $B'_{N'}$ essendo determinati colle formole (100), (102), (105) e (107), si avranno evidentemente

$$(113) \qquad \begin{aligned} A_N &= \Sigma \frac{A\varepsilon^n}{2^{n+1}}\,; \quad B_N = \Sigma \frac{B\varepsilon^n}{2^{n+1}} \\ A'_{N'} &= \Sigma \frac{A'\varepsilon'^{n'}}{2^{n'+1}}\,; \quad B'_{N'} = \Sigma \frac{B'\varepsilon'^{n'}}{2^{n'+1}}\,. \end{aligned}$$

Per conseguenza la formola (90) potrà scriversi come segue

$$(114) \qquad P = \frac{m'a}{a'^2} \sum_{-\infty}^{\infty} (A_N + B_N)(A'_{N'} + B'_{N'}) \cos.\Delta_{NT,\,N'T'}.$$

Rimarchiamo ancora che dietro le ammesse notazioni si avrà

$$(115) \qquad \cos.\Delta_{p,\,p'} = H\cos.p\cos.p' + I\sin.p\cos.p' + J\cos.p\sin.p' + K\sin.p\sin.p'$$

da cui

$$(116) \qquad H = \cos.\Delta_{0,\,0}\,; \quad I = \cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\,0}\,; \quad J = \cos.\Delta_{0,\,\frac{\pi}{2}}\,; \quad K = \cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}}\,.$$

Dunque

$$\begin{aligned} \cos.\Delta_{NT,\,N'T'} = {} & \cos.\Delta_{0,\,0}\cos.NT\cos.N'T' + \cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}}\sin.NT\sin.N'T' \\ & + \cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\,0}\sin.NT\cos.N'T' + \cos.\Delta_{0,\,\frac{\pi}{2}}\cos.NT\sin.N'T' \end{aligned}$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$\begin{aligned} \cos.\Delta_{NT,\,N'T'} = {} & \frac{1}{2}\left(\cos.\Delta_{0,\,0} - \cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}}\right)\cos.(NT+N'T') \\ & + \frac{1}{2}\left(\cos.\Delta_{0,\,0} + \cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}}\right)\cos.(NT-N'T') \\ & + \frac{1}{2}\left(\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\,0} + \cos.\Delta_{0,\,\frac{\pi}{2}}\right)\sin.(NT+N'T') \\ & + \frac{1}{2}\left(\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\,0} - \cos.\Delta_{0,\,\frac{\pi}{2}}\right)\sin.(NT-N'T'). \end{aligned}$$

Sotto quest' ultima forma diventa assai facile integrare rapporto a t l'espres-

sione differenziale

$$\cos.\Delta_{NT,\,N'T'}$$

moltiplicata per dt. Si può del resto giungervi altresì nel modo seguente.

Dall'equazione (115) si deducono le seguenti

$$\cos.\Delta_{NT,\,N'T'}+\cos.\Delta_{NT+\frac{\pi}{2},\,N'T'+\frac{\pi}{2}}=(H+K)\cos.(NT-N'T')+(I-J)\sin.(NT-N'T')$$

$$\cos.\Delta_{NT,\,N'T'}-\cos.\Delta_{NT+\frac{\pi}{2},\,N'T'+\frac{\pi}{2}}=(H-K)\cos.(NT+N'T')+(I+J)\sin.(NT+N'T')$$

$$\cos.\Delta_{NT,\,N'T'+\frac{\pi}{2}}+\cos.\Delta_{NT+\frac{\pi}{2},\,N'T'}=(K-H)\sin.(NT+N'T')+(I+J)\cos.(NT+N'T')$$

$$\cos.\Delta_{NT,\,N'T'+\frac{\pi}{2}}-\cos.\Delta_{NT+\frac{\pi}{2},\,N'T'}=(H+K)\sin.(NT-N'T')-(I-J)\cos.(NT-N'T')$$

pertanto

$$\int\cos.\Delta_{NT,\,N'T'}\,dt+\int\cos.\Delta_{NT+\frac{\pi}{2},\,N'T'+\frac{\pi}{2}}\,dt=\frac{\cos.\Delta_{NT,\,N'T'+\frac{\pi}{2}}-\cos.\Delta_{NT+\frac{\pi}{2},\,N'T'}}{N\alpha-N'\alpha'}+\text{cost.}$$

$$\int\cos.\Delta_{NT,\,N'T'}\,dt-\int\cos.\Delta_{NT+\frac{\pi}{2},\,N'T'+\frac{\pi}{2}}\,dt=-\frac{\cos.\Delta_{NT,\,N'T'+\frac{\pi}{2}}+\cos.\Delta_{NT+\frac{\pi}{2},\,N'T'}}{N\alpha+N'\alpha'}+\text{cost.}$$

e

$$\int\cos.\Delta_{NT,\,N'T'}\,dt=\left(\frac{1}{N\alpha-N'\alpha'}-\frac{1}{N\alpha+N'\alpha'}\right)\frac{1}{2}\cos.\Delta_{NT,\,N'T'+\frac{\pi}{2}}$$
$$-\left(\frac{1}{N\alpha-N'\alpha'}+\frac{1}{N\alpha+N'\alpha'}\right)\frac{1}{2}\cos.\Delta_{NT+\frac{\pi}{2},\,N'T'}+\text{cost.}$$

Dunque finalmente

$$\int_0^t\cos.\Delta_{NT,\,N'T'}\,dt=\left(\frac{1}{N\alpha-N'\alpha'}-\frac{1}{N\alpha+N'\alpha'}\right)\frac{\cos.\Delta_{NT,\,N'T'+\frac{\pi}{2}}-\cos.\Delta_{Nc,\,N'c'+\frac{\pi}{2}}}{2}$$
$$(118)\qquad -\left(\frac{1}{N\alpha-N'\alpha'}+\frac{1}{N\alpha+N'\alpha'}\right)\frac{\cos.\Delta_{NT+\frac{\pi}{2},\,N'T'}-\cos.\Delta_{Nc+\frac{\pi}{2},\,N'c'}}{2}$$

Del resto è facile verificare direttamente la formola (118).

Si potrebbe dalla formola (27) congiunta alle equazioni (97), (101), (103) e (104) dedurre immediatamente l'equazione (114). Di fatti si troverebbe

$$P=\frac{m'a}{a'^2}\Sigma\left\{\begin{array}{l}HA_N A'_{N'}\cos.NT\cos.N'T'+KB_N B'_{N'}\sin.NT\sin.N'T'\\+I A'_{N'}B_N\sin.NT\cos.N'T'+JA_N B'_{N'}\cos.NT\sin.N'T'\end{array}\right\}$$

$$=\frac{m'a}{a'^2}\Sigma\left\{\begin{array}{l}\frac{A_N+B_N}{2}\cdot\frac{A'_{N'}+B'_{N'}}{2}\cos.\Delta_{NT,\,N'T'}+\frac{A_N+B_N}{2}\cdot\frac{A'_{N'}-B'_{N'}}{2}\cos.\Delta_{NT,\,-N'T'}\\+\frac{A_N-B_N}{2}\cdot\frac{A'_{N'}+B'_{N'}}{2}\cos.\Delta_{-NT,\,N'T'}+\frac{A_N-B_N}{2}\cdot\frac{A'_{N'}-B'_{N'}}{2}\cos.\Delta_{-NT,\,-N'T'}\end{array}\right\}$$

$$=\frac{m'a}{a'^2}\Sigma\left(A_N+B_N\right)\left(A'_{N'}+B'_{N'}\right)\cos.\Delta_{NT,\,N'T'}$$

il segno Σ estendendosi a tutti i valori interi positivi nulli o negativi di N e di N'.

Pigliamo ora per P non più il primo termine del polinomio R ma il secondo dei due termini che sono proporzionali ad m', con un segno contrario, di modo che si abbia

$$(119) \qquad P = \frac{m'}{\sqrt{\{r^2 - 2rr'\cos.\delta + r'^2\}}}$$

il valore di $\cos.\delta$ essendo sempre determinato dall' equazione (17). Se si suppone primieramente essere

$$\varepsilon = 0\,, \qquad \varepsilon' = 0$$

si avrà semplicemente

$$(120) \qquad P = \frac{m'}{\sqrt{(a^2 - 2aa'\cos.\delta + a'^2)}}\,;$$

poscia supponendo $a < a'$ e ponendo $a = \theta a'$ si troverà

$$(121) \qquad P = \frac{m'}{a'}\left\{1 - 2\theta\cos.\delta + \theta^2\right\}^{-\frac{1}{2}}.$$

Si può facilmente sviluppare l'espressione precedente in una serie ordinata secondo i coseni degli archi multipli di δ. Per giungervi basta osservare che

$$(122) \qquad 1 - 2\theta\cos.\delta + \theta^2 = \left(1 - \theta e^{\delta\sqrt{-1}}\right)\left(1 - \theta e^{-\delta\sqrt{-1}}\right);$$

d'altra parte

$$(123) \qquad \begin{aligned} \left(1-\theta e^{\delta\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}\theta e^{\delta\sqrt{-1}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\theta^2 e^{2\delta\sqrt{-1}} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\theta^n e^{n\delta\sqrt{-1}} + \cdots \\ \left(1-\theta e^{-\delta\sqrt{-1}}\right)^{-\frac{1}{2}} &= 1 + \frac{1}{2}\theta e^{-\delta\sqrt{-1}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\theta^2 e^{-2\delta\sqrt{-1}} + \cdots + \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots 2n}\theta^n e^{-n\delta\sqrt{-1}} + \cdots \end{aligned}$$

dunque

$$(124) \qquad (1 - \theta\cos.\delta + \theta^2)^{-\frac{1}{2}} = \Theta_0 + \Theta_1\cos.\delta + \Theta_2\cos.2\delta + \cdots + \Theta_n\cos.n\delta + \text{ecc.}$$

il valore di Θ_n essendo dato dall' equazione

$$(125) \quad \Theta_n = 2\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\theta^n\left(1 + \frac{1}{2}\,\frac{2n+1}{2n+2}\theta + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)}\theta^2 + \cdots\right)$$

di cui il secondo membro deve essere ridotto alla metà allorchè si suppone $n = 0$.

D'altronde per grandissimi valori di n si ha

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx = n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}\sqrt{2\pi}\,(1 + \upsilon)$$

essendo υ un numero assai piccolo, e conseguentemente

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\left(n - \frac{1}{2}\right)}{1\cdot 2\cdots n} = \frac{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

sarà della forma

$$\left(\frac{1}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}}(1\pm y).$$

D'altra parte si avrà

$$1+\frac{1}{2}\,\frac{2n+1}{2n+2}\theta+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{(2n+1)(2n+3)}{(2n+2)(2n+4)}\theta^2+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}\,\frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{2}{2n}}\theta+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{1+\frac{1}{2n}}{1+\frac{2}{2n}}\cdot\frac{1+\frac{3}{2n}}{1+\frac{4}{2n}}\theta^2+\cdots$$

$$=\left(1+\frac{1}{2}\theta+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\theta^2+\cdots\right)(1\pm y')=(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}(1\pm y')$$

essendo y' assai piccolo insieme con $\frac{1}{n}$, dunque per valori grandissimi di n $\Theta_n\theta^n$ sarà il prodotto di

$$(126)\qquad 2\left(\frac{1}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\theta^n(1-\theta)^{-\frac{1}{2}}=2\left(\frac{1}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\theta^n}{\sqrt{1-\theta}}$$

per un fattore poco differente dall' unità. Siccome la radice n^{esima} dell' espressione (126) ha θ per limite, egli è chiaro che la serie compresa nel secondo membro della formola (124) sarà convergente se si ha

$$\theta<1.$$

Allora parimenti essendo per supposizione n assai grande, il resto della serie sarà sensibilmente eguale a

$$2\left(\frac{1}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\theta^n}{\sqrt{1-\theta}}(1+\theta+\theta^2+\cdots)=2\left(\frac{1}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\theta^n}{(1-\theta)^{\frac{3}{2}}}$$

per $\delta=0$; e per un valore qualunque di δ a

$$2\left(\frac{1}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\theta^n}{\sqrt{1-\theta}}\,\frac{\cos.n\delta-\theta\cos.(n-1)\delta}{1-2\theta\cos.\delta+\theta^2}.$$

Si avrà d'altronde

$$(127)\qquad \left(r^2-2rr'\cos.\delta+r'^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{r'}\left(1-2\frac{r}{r'}\cos.\delta+\frac{r^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

e si dedurrà dalle formole (20), (24)

$$(128)\qquad \frac{r}{r'}=\theta\,\frac{1-\varepsilon\cos.\psi}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}=\theta+\theta\,\frac{\varepsilon'\cos.\psi'-\varepsilon\cos.\psi}{1-\varepsilon\cos.\psi'}.$$

Dunque

$$\left(1-2\frac{r}{r'}\cos.\delta+\frac{r^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

sarà ciò che diventa l'espressione (124) quando si fa crescere θ di

$$\theta\,\frac{\varepsilon'\cos.\psi'-\varepsilon\cos.\psi}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}.$$

Ciò posto, si troverà

$$(129)\qquad \left(1-2\frac{r}{r'}\cos.\delta+\frac{r^2}{r'^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$=\Theta_0+\theta\frac{d\Theta_0}{d\theta}\frac{\varepsilon'\cos.\psi'-\varepsilon\cos.\psi}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}+\frac{\theta^2}{1\cdot 2}\frac{d^2\Theta_0}{d\theta^2}\left(\frac{\varepsilon'\cos.\psi'-\varepsilon\cos.\psi}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}\right)^2+\cdots$$

$$+\cos.\ \delta\left\{\Theta_1+\theta\frac{d\Theta_1}{d\theta}\frac{\varepsilon'\cos.\psi'-\varepsilon\cos.\psi}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}+\frac{\theta^2}{1\cdot 2}\frac{d^2\Theta_1}{d\theta^2}\left(\frac{\varepsilon'\cos\psi'-\varepsilon\cos.\psi}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$+\cos.2\delta\left\{\Theta_2+\theta\frac{d\Theta_2}{d\theta}\frac{\varepsilon'\cos.\psi'-\varepsilon\cos.\psi}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}+\frac{\theta^2}{1\cdot 2}\frac{d^2\Theta_2}{d\theta^2}\left(\frac{\varepsilon'\cos.\psi'-\varepsilon\cos.\psi}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$+\text{ecc.}\cdots$$

$$=\Sigma\frac{\theta^l}{1\cdot 2\cdots l}\frac{d^l\Theta_k}{d\theta^l}\left(\frac{\varepsilon'\cos.\psi'-\varepsilon\cos.\psi}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}\right)^l\cos.k\delta$$

e

$$(130)\qquad \left(r^2-2rr'\cos.\delta+r'^2\right)^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{a'}\Sigma\frac{\theta^l}{1\cdot 2\cdots l}\frac{(\varepsilon'\cos.\psi'-\varepsilon\cos.\psi)^l}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^{l+1}}\cdot\frac{d^l\Theta_k}{d\theta^l}\cos.k\delta$$

il segno Σ estendendosi a tutti i valori interi nulli o positivi di l e di k: indi se ne conchiuderà

$$(131)\qquad P=\frac{m'}{a'}\Sigma\frac{\theta^l}{1\cdot 2\cdots l}\frac{(\varepsilon'\cos.\psi'-\varepsilon\cos.\psi)^l}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^{l+1}}\frac{d^l\Theta_k}{d\theta^l}\cos.k\delta.$$

D'altra parte, essendo k positiva, si troverà per valori pari di k

$$(132)\qquad (-1)^{\frac{k}{2}}\cos.k\delta=1-\frac{k\cdot k}{1\cdot 2}\cos.^2\delta+\frac{(k+2)k\cdot k(k-2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}\cos.^4\delta-\text{ecc.};$$

per valori dispari di k

$$(133)\qquad (-1)^{\frac{k-1}{2}}\cos.k\delta$$

$$=\frac{k}{1}\cos.\delta-\frac{(k+1)k(k-1)}{1\cdot 2\cdot 3}\cos.^3\delta+\frac{(k+3)(k+1)k(k-1)(k-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}\cos.^5\delta-\text{ecc.};$$

e generalmente per valori pari o dispari di k

$$(134)\qquad \cos.k\delta=K_0\cos.^k\delta+K_2\cos.^{k-2}\delta+K_4\cos.^{k-4}\delta+\cdots=\Sigma K_{k-h}\cos.^h\delta,$$

la K_{k-h} essendo nulla per valori impari di $k-h$ e per valori pari di $k-h$ determinata dall'equazione

$$(135)\qquad K_{k-h}=(-1)^{\frac{k-h}{2}}\frac{(k+h-2)(k+h-4)\cdots(k-h+2)}{2\cdot 3\cdots h}k,$$

che si può rappresentare anche sotto la forma

$$(136)\qquad K_{k-h}=(-1)^{\frac{k-h}{2}}2^h\frac{k}{k+h}\left(\frac{k+h}{2}\right)_h$$

e che sussiste allora anche nel caso in cui si riduca h a *zero* essendo k pari, o all'unità essendo k dispari. Dunque la formola (131) darà

$$(137)\qquad P=\frac{m'}{a'}\Sigma K_{k-h}\frac{\theta^l}{1\cdot 2\cdots l}\frac{(\varepsilon'\cos.\psi'-\varepsilon\cos.\psi)^l}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^{l+1}}\frac{d^l\Theta_k}{d\theta^l}\cos.^l\delta.$$

Si avrà d'altronde

$$(138)\qquad (\varepsilon'\cos.\psi'-\varepsilon\cos.\psi)^l=\Sigma(-1)^i(l)_i\,\varepsilon^i\,\varepsilon'^{l-i}\cos.^i\psi\cos.^{l-i}\psi',$$

$$(139)\qquad \begin{aligned}\cos.\delta=&\cos.\Delta_{0,0}\cos.(p-\varpi)\cos.(p'-\varpi')+\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\cos.(p-\varpi)\sin.(p'-\varpi')\\&+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\sin.(p-\varpi)\cos.(p'-\varpi')+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\sin.(p-\varpi)\sin.(p'-\varpi'),\end{aligned}$$

$$(140)\qquad \begin{aligned}&\cos.^h\delta=\Sigma(h)_g\cos.^g(p-\varpi)\sin.^{h-g}(p-\varpi)\times\\&\left[\cos.\Delta_{0,0}\cos.(p'-\varpi')+\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\sin.(p'-\varpi')\right]^g\times\\&\left[\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\cos.(p'-\varpi')+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\sin.(p'-\varpi')\right]^{h-g},\\&\left[\cos.\Delta_{0,0}\cos.(p'-\varpi')+\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\sin.(p'-\varpi')\right]^g=\\&\Sigma(g)_j\cos.^j\Delta_{0,0}\cos.^{g-j}\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\cos.^j(p'-\varpi')\sin.^{g-j}(p'-\varpi'),\\&\left[\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\cos.(p'-\varpi')+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\sin.(p'-\varpi')\right]^{h-g}=\\&\Sigma(h-g)_{g'-j}\cos.^{g'-j}\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\cos.^{h-g-g'+j}\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\cos.^{g'-j}(p'-\varpi')\sin.^{h-g-g'+j}(p'-\varpi')\end{aligned}$$

e per conseguenza

$$(141)\qquad \cos.^h\delta=\Sigma\left\{\begin{matrix}(h)_g(g)_j(h-g)_{g'-j}\cos.^j\Delta_{0,0}\cos.^{g-j}\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\cos.^{g'-j}\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\cos.^{h-g-g'+j}\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\times\\ \cos.^g(p-\varpi)\sin.^{h-g}(p-\varpi)\cos.^{g'}(p'-\varpi')\sin.^{h-g'}(p'-\varpi')\end{matrix}\right\}$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(142)\qquad \cos.^h\delta=\Sigma\left\{\begin{matrix}(h)_g(g)_j(h-g)_{g'-j}\eta^{h-g}\eta'^{h-g'}\cos.^j\Delta_{0,0}\cos.^{g-j}\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\cos.^{g'-j}\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\times\\ \cos.^{h-g+g'+j}\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\dfrac{(\cos.\psi-\varepsilon)^g(\cos.\psi'-\varepsilon')^{g'}\sin.^{h-g}\psi\sin.^{h-g'}\psi'}{(1-\varepsilon\cos.\psi)^h(1-\varepsilon'\cos.\psi')^h}\end{matrix}\right\}$$

Giova osservare che nella formola (142) si ha

$$(h)_g(g)_j(h-g)_{g'-j}=\frac{h(h-1)\cdots(h-g-g'+j+1)}{(1\cdot 2\cdots j)(1\cdot 2\cdots(g-j))(1\cdot 2\cdots(g'-j))};$$

dunque se si pone per brevità

$$\frac{h(h-1)\cdots(h-k-k'-k''+1)}{(1\cdot 2\cdots k)(1\cdot 2\cdots k')(1\cdot 2\cdots k'')}=(h)_{k,k',k''}$$

si troverà

$$(143)\qquad \cos.^h\delta=\Sigma(h)_{j,g-j,g'-j}\eta^{h-g}\eta'^{h-g'}\frac{(\cos.\psi-\varepsilon)^g(\cos.\psi'-\varepsilon')^{g'}\sin.^{h-g}\psi\sin.^{h-g'}\psi'}{(1-\varepsilon\cos.\psi)^h(1-\varepsilon'\cos.\psi')^h}\mathcal{D}$$

il valore di $\mathcal{D}$ essendo

$$(144)\qquad \mathcal{D}=\cos.^j\Delta_{0,0}\cos.^{g-j}\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\cos.^{g'-j}\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\cos.^{h-g-g'+j}\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}.$$

Se ne conchiuderà

$$(145)\qquad P=\frac{m'}{a'}\Sigma(-1)^iK_{k-h}(l)_i(h)_{j,g-j,g'-j}\mathcal{D}\varepsilon^i\,\varepsilon'^{l-i}\,\eta^{h-g}\,\eta'^{h-g'}\frac{\theta^l}{1\cdot 2\cdots l}\frac{d^l\Theta_k}{d\theta^l}\Psi\Psi'$$

i valori di Ψ, Ψ' essendo

$$(146)\qquad \Psi=\frac{\cos.^i\psi(\cos.\psi-\varepsilon)^g\sin.^{h-g}\psi}{(1-\varepsilon\cos.\psi)^h}$$

$$(147)\qquad \Psi'=\frac{\cos.^{l-i}\psi'(\cos.\psi'-\varepsilon')^{g'}\sin.^{h-g'}\psi'}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^{h+l+1}}.$$

Ora osserviamo che si hanno

$$(\cos.\psi-\varepsilon)^g=\Sigma(-1)^\lambda(g)_\lambda\,\varepsilon^\lambda\cos.^{g-\lambda}\psi\,,$$

$$(1-\varepsilon\cos.\psi)^{-h}=\Sigma[h]_\mu\,\varepsilon^\mu\cos.^\mu\psi.$$

Dunque

$$(148)\qquad \Psi=\Sigma(-1)^\lambda(g)_\lambda[h]_\mu\,\varepsilon^{\lambda+\mu}\cos.^{g+i+\mu-\lambda}\psi\sin.^{h-g}\psi.$$

Si troverà parimenti

$$(149)\qquad \Psi'=\Sigma(-1)^{\lambda'}(g')_{\lambda'}[h+l+1]_{\mu'}\,\varepsilon^{\lambda'+\mu'}\cos.^{g'+l-i+\mu'-\lambda'}\psi'\sin.^{h-g'}\psi'.$$

Combinando queste ultime equazioni colla formola (49) e scrivendo ν od ν' in luogo di n, si troveranno

$$(150)\qquad \Psi=\Sigma(-1)^\lambda(g)_\lambda[h]_\mu\frac{N^{\nu-1}}{2^{\nu+h+i+\mu-\lambda}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\varepsilon^{\nu+\lambda+\mu}\,e^{NT\sqrt{-1}}}{(1\cdot2\cdots\nu)(\sqrt{-1})^{h-g}}\times\\ \left\{\begin{array}{l}(-1)^\varsigma N(g+i+\mu-\lambda)_\rho(h+\nu-g)_\varsigma\\ -(-1)^\varsigma\nu(g+i+1+\mu-\lambda)_\rho(h+\nu-g-1)_\varsigma\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

$$(151)\qquad \Psi'=$$

$$\Sigma(-1)^{\lambda'}(g')_{\lambda'}[h+l+1]_{\mu'}\frac{N'^{\nu'-1}}{2^{\nu'+h+l-i+\mu'-\lambda'}}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\varepsilon^{\nu'+\lambda'+\mu'}\,e^{N'T'\sqrt{-1}}}{(1\cdot2\cdots\nu')(\sqrt{-1})^{h-g'}}\times\\ \left\{\begin{array}{l}(-1)^\varsigma N'(g'+l-i+\mu'-\lambda')_{\rho'}(h+\nu'-g')_{\varsigma'}\\ -(-1)^\varsigma\nu'(g'+l-i+1+\mu'-\lambda')_{\rho'}(h+\nu'-g'-1)_{\varsigma'}\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

i valori di N e di N' essendo

$$(152)\qquad \begin{array}{l}N=\nu+h+i+\mu-\lambda-2(\rho+\varsigma)\\ N'=\nu'+h+l-i+\mu'-\lambda'-2(\rho'+\varsigma').\end{array}$$

Finalmente si avranno

$$(153)\qquad \begin{array}{l}\eta^{h-g}=(1-\varepsilon^2)^{\frac{h-g}{2}}=\Sigma(-1)^v\left(\dfrac{h-g}{2}\right)_v\varepsilon^{2v}\\ \eta'^{h-g'}=(1-\varepsilon'^2)^{\frac{h-g'}{2}}=\Sigma(-1)^{v'}\left(\dfrac{h-g'}{2}\right)_{v'}\varepsilon'^{2v'}\end{array}$$

$$\frac{e^{(NT+N'T')\sqrt{-1}}}{(\sqrt{-1})^{2h-g-g'}}=(-1)^h e^{\left(NT+N'T'+\pi\frac{g+g'}{2}\right)\sqrt{-1}}$$

$$=(-1)^h\left\{\cos.\left(NT+N'T'+\pi\frac{g+g'}{2}\right)+\sqrt{-1}\sin.\left(NT+N'T'+\pi\frac{g+g'}{2}\right)\right\}.$$

Ciò posto, se si fanno per brevità

$$(154)\qquad \begin{array}{l}\nu+i+\lambda+\mu+2v=n\\ \nu'+l-i+\lambda'+\mu'+2v'=n',\end{array}$$

si dedurrà dalle formole (145), (150), (151), (153)

$$(155)\qquad P=\frac{m'}{a'}\Sigma\left\{\begin{array}{l}(-1)^{h+i}\ \dfrac{\theta^l}{1\cdot 2\cdots l}\ \dfrac{K_{k-h}}{2^{n+n'+2h}}(l)_i(h)_{j,g-j,g'-j}\times\\ \mathcal{C}\,\mathcal{C}'\,\mathcal{D}\,\varepsilon^n\,\varepsilon'^{n'}\dfrac{d^l\Theta_k}{d\theta^l}\cos.\left(NT+N'T'+\pi\dfrac{g+g'}{2}\right)\end{array}\right\}$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(156)\qquad P=\frac{m'}{a'}\Sigma\left\{\begin{array}{l}(-1)^{i+\frac{k+h}{2}}\ \dfrac{k}{k+h}\left(\dfrac{k+h}{2}\right)_h\ \dfrac{(l)_i(h)_{j,g-j,g'-j}}{2^{n+n'+h}}\cdot\dfrac{\theta^l}{1\cdot 2\cdots l}\times\\ \mathcal{C}\,\mathcal{C}'\,\mathcal{D}\,\varepsilon^n\,\varepsilon'^{n'}\dfrac{d^l\Theta_k}{d\theta^l}\cos.\left(NT+N'T'+\pi\dfrac{g+g'}{2}\right)\end{array}\right\}$$

i valori di $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ essendo

$$(157)\qquad \mathcal{C}=$$

$$\Sigma(-1)^{\lambda+\upsilon}\,2^{2(\lambda+\upsilon)}(g)_\lambda[h]_\mu\left(\frac{h-g}{2}\right)_\upsilon\left\{\begin{array}{l}(-1)^\varsigma N(g+i+\mu-\lambda)_\rho(h+\nu-g)_\varsigma\\ -(-1)^\varsigma\nu(g+i+1+\mu-\lambda)_\rho(h+\nu-g-1)_\varsigma\end{array}\right\}\frac{N^{\nu-1}}{1\cdot 2\cdots\nu}$$

$$(158)\qquad \mathcal{C}'=$$

$$\Sigma(-1)^{\lambda'+\upsilon'}\,2^{2(\lambda'+\upsilon')}(g')_{\lambda'}[h+l+1]_{\mu'}\left(\frac{h-g'}{2}\right)_{\upsilon'}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{N'^{\nu'-1}}{1\cdot 2\cdots\nu'}\times\\ \left\{\begin{array}{l}(-1)^{\varsigma'}N'(g'+l-i+\mu'-\lambda')_{\rho'}(h+\nu'-g')_{\varsigma'}\\ -(-1)^{\varsigma'}\nu'(g'+l-i+1+\mu'-\lambda')_{\rho'}(h'+\nu'-g'-1)_{\varsigma'}\end{array}\right\}\end{array}\right\}$$

e il segno Σ non dovendo nella formola (156) essere esteso che ai valori pari di $k+h$. Aggiungiamo che nelle formole (155), (157), (158) si potrebbe senza inconveniente estendere il segno Σ a tutti i valori interi nulli o positivi di

$$(159)\qquad \nu,\ \nu',\ l,\ k,\ h,\ i,\ j,\ g,\ g',\ \lambda,\ \lambda',\ \mu,\ \mu',\ \upsilon,\ \upsilon',\ \rho,\ \rho',\ \varsigma,\ \varsigma'$$

che rendono pari il valore di $k+h$. Ma siccome le espressioni della forma

$$K_{k-h}\ ;\quad (k)_h\ ;\quad (k)_{h,h',h''}$$

svaniscono, la prima e la seconda allorchè h diventa negativa o superiore a k, e la terza allorchè una delle quantità h, h', h'' diventa negativa, od allorchè la somma $h+h'+h''$ sorpassa k; egli è chiaro che nelle formole di cui si tratta potrà bastare di attribuire ai numeri (159) valori tali che le differenze

$$(160)\quad k-h,\ l-i,\ h-j,\ g-j,\ g'-j,\ h-g,\ h-g',\ h+j-g-g',\ g-\lambda,\ h-\mu,\ g'-\lambda',\ h+l+1-\mu'$$

siano nulle o positive, e che le somme

$$(161)\qquad \nu+h+i+\mu-\lambda=(g+i+\mu-\lambda)+(h+\nu-g)=(g+i+1+\mu-\lambda)+(h+\nu-g-1)$$

$$(162)\qquad \begin{aligned}\nu'+h+l-i+\mu'-\lambda'&=(g'+l-i+\mu'-\lambda')+(h+\nu'-g')\\ &=(g'+l-i+1+\mu'-\lambda')+(h+\nu'-g'-1)\end{aligned}$$

siano eguali o superiori, la prima a $\rho+\varsigma$ la seconda a $\rho'+\varsigma'$. Per conseguenza i

dovrà essere eguale o inferiore ad l; h a k; g, g', j e μ ad h; λ a g; λ' a g'; e μ' ad $h+l+1$, di modo che i numeri

$$h, j, g, g', \lambda, \lambda', \mu$$

non potranno sorpassare k. Osserviamo d'altronde che in virtù delle formole (154) ciascuno dei numeri $v, i, \lambda, \mu, 2v$ dovrà essere al più eguale ad n, e ciascuno dei numeri $v', l-i, \lambda', \mu', 2v'$ tutt'al più eguale ad n'. Dunque

$$l = i + (l - i)$$

dovrà essere tutt'al più eguale ad $n+n'$. Osserviamo ancora che dalle formole (152) e (154) si deducono le

$$(163) \qquad \begin{aligned} \lambda + v + \rho + \varsigma &= \frac{n+h-N}{2} \\ \lambda' + v' + \rho' + \varsigma' &= \frac{n'+h-N'}{2} \end{aligned}$$

e

$$(164) \qquad \begin{aligned} \lambda + v + (v + h + i + \mu - \lambda) - (\rho + \varsigma) &= \frac{n+h+N}{2} \\ \lambda' + v' + (v' + h + l - i + \mu' - \lambda') - (\rho' + \varsigma') &= \frac{n'+h+N'}{2}. \end{aligned}$$

Ora poichè i primi membri delle formole (163), (164) devono essere nulli o positivi, si potrà dire lo stesso dei secondi membri. Dunque le quantità N, N' resteranno necessariamente comprese, la prima fra i limiti

$$-(n+h), \quad +(n+h),$$

la seconda fra i limiti

$$-(n'+h), \quad +(n'+h) \text{ (*)}.$$

Di più ciascuno dei numeri

$$\lambda, \quad v$$

ed anche la loro somma

$$\lambda + v$$

non potrà sorpassare il più piccolo dei numeri

$$\frac{n+h-N}{2}, \quad \frac{n+h+N}{2},$$

cioè a dire l'espressione

$$(165) \qquad \frac{n+h-\sqrt{N^2}}{2}.$$

Parimenti $\lambda' + v'$ non potrà sorpassare

$$(166) \qquad \frac{n'+h-\sqrt{N'^2}}{2}.$$

(*) I primi membri delle formole (163), (164) dovendo essere interi, i secondi dovranno esserlo parimenti. Dunque $n \pm N + h$, $n' \pm N' + h$ e conseguentemente $n \pm N + k$, $n' \pm N' + k$ dovranno essere pari, e $n \pm N$, $n' \pm N'$ pari o dispari insieme con k.

Finalmente le quantità

$$(167)\quad \rho+\varsigma,\ \rho'+\varsigma',\ (\nu+h+i+\mu-\lambda)-(\rho+\varsigma),\ (\nu'+h+l-i+\mu'-\lambda')-(\rho'+\varsigma')$$

non potranno sorpassare i numeri

$$(168)\qquad \frac{n+h-N}{2},\ \frac{n'+h-N'}{2},\ \frac{n+h+N}{2},\ \frac{n'+h+N'}{2}.$$

Col mezzo delle formole (155) o (156), (157) e (158) si può giungere a trovare immediatamente nella P il coefficiente d'un prodotto della forma

$$(169)\qquad \frac{\theta^l}{1\cdot 2\cdots l}\,\frac{d^l\,\Theta_k}{d\theta^l}\,\varepsilon^n\,\varepsilon'^{n'}\cos.(NT+N'T')$$

ovvero

$$(170)\qquad \frac{\theta^l}{1\cdot 2\cdots l}\,\frac{d^l\,\Theta_k}{d\theta^l}\,\varepsilon^n\,\varepsilon'^{n'}\sin.(NT+N'T')$$

e ad assicurarsi che questo coefficiente è sempre composto d'un numero finito di termini. Di fatto

$$\cos.\left(NT+N'T'+\pi\,\frac{g+g'}{2}\right)$$

si riduce a

$$(-1)^{\frac{g+g'}{2}}\cos.(NT+N'T')$$

quando $g+g'$ è un numero pari ed a

$$(-1)^{\frac{g+g'+1}{2}}\sin.(NT+N'T')$$

nel caso contrario. Di più siegue dalle riflessioni fatte precedentemente che essendo dati i numeri n, n', l, k e le quantità N, N', tutti i numeri della serie (159) potranno essere ridotti al di sotto di certi limiti. Vi è di più: tutti i numeri della serie (159) ed i valori numerici di N, N' potranno essere supposti inferiori a certi limiti determinati allorchè saranno date soltanto n, n', e k: poichè l è tutt'al più eguale ad $n+n'$, h a k, $\sqrt{N^2}$ ad $n+h$, e $\sqrt{N'^2}$ a $n'+h$.

Per mostrare un applicazione delle formole precedenti consideriamo in particolare il caso in cui si avesse

$$(171)\qquad \tau=0,\ \tau'=0,\ \varphi-\varphi'+\varpi-\varpi'=0.$$

In questo caso si troverà

$$(172)\quad \cos.\delta=\cos.(p-\varpi-p'+\varpi')=\cos.(p-\varpi)\cos.(p'-\varpi')+\sin.(p-\varpi)\sin.(p'-\varpi')$$

e conseguentemente

$$(173)\qquad \cos.\Delta_{0,0}=1,\ \cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}=0,\ \cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}=0,\ \cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}=1.$$

Ne risulta che si avrà

$$\mathcal{D}=1$$

se $g=g'=j$, e

$$\mathcal{D}=0$$

nel caso contrario. Dunque la formola (156) potrà essere ridotta a

$$(174)\quad P=\frac{m'}{a'}\Sigma(-1)^{g+i+\frac{k+h}{2}}\frac{k}{k+h}\binom{k+h}{2}_h\frac{(l)_i(h)_g}{2^{n+n'+h}}\mathcal{C}\mathcal{C}'\frac{\theta^l}{1\cdot 2\cdots l}\frac{d^l\Theta_k}{d\theta^l}\varepsilon^n\varepsilon'^{n'}\cos.(NT+N'T'')$$

i valori di $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ essendo dati dalle equazioni (157), (158) nelle quali si dovrà supporre $g'=g$.

Siccome nel sistema del mondo le eccentricità ε, ε' hanno generalmente valori poco considerabili, importa di conoscere per valori dati di N e di N' i più piccoli valori che si possano attribuire ad n e ad n'. Ora dovendo essere n eguale o superiore a

$$\sqrt{N^2}-h$$

il più piccolo valore di n sarà evidentemente, se $h=$ ovvero $>\sqrt{N^2}$

zero o *l'unità*

secondo che $\sqrt{N^2}-h$ sarà pari o dispari, e

$$\sqrt{N^2}-h$$

se $h=$ ovvero $<\sqrt{N^2}$. Parimenti il più piccolo valore di n' sarà se $h=$ ovvero $>\sqrt{N'^2}$

zero o *l'unità*

secondo che $\sqrt{N'^2}-h$ sarà pari o dispari, e

$$\sqrt{N'^2}-h$$

se $h=$ ovvero $<\sqrt{N'^2}$.

D'altronde si dedurranno dalle formole (154), ponendo $n=0$,

$$(175)\qquad \lambda=\mu=\nu=i=v=0$$

e conseguentemente

$$(176)\qquad \mathcal{C}=\Sigma(-1)^{\varsigma}(g)_\rho(h-g)_\varsigma,\quad \rho+\varsigma=\frac{h-N}{2};$$

indi ponendo $n'=0$

$$(177)\qquad \lambda'=\mu'=\nu'=l-i=v'=0$$

e conseguentemente

$$(178)\qquad \mathcal{C}'=\Sigma(-1)^{\varsigma'}(g')_{\rho'}(h-g')_{\varsigma'},\quad \rho'+\varsigma'=\frac{h-N'}{2}.$$

D'altra parte se si pone $N=n+h$ ovvero $N=-n-h$, si dedurranno dalle formole (163), (164) e (152)

$$(179)\quad \lambda=v=0,\quad \nu+\mu+i=n;$$

e di più

$$(180)\qquad \rho=0,\ \varsigma=0,\ \text{ovvero}\ \rho+\varsigma=\nu+h+\mu+i-\lambda=n+h.$$

In seguito si troverà 1.° supponendo $N=n+h$,

$$(181)\qquad \mathcal{C}=\Sigma[h]_\nu(n+h-\nu)\frac{(n+h)^{\nu-1}}{1\cdot 2\cdots\nu}$$

2.° supponendo $N=-n-h$,

$$(182)\qquad \mathfrak{C}=\Sigma(-1)^{h-g}[h]_{\mu}(n+h-\nu)\frac{(n+h)^{\nu-1}}{1\cdot 2\cdots\nu}.$$

Parimenti se si pone $N'=n'+h$ ovvero $N'=-n'-h$, si avranno dalle formole (163), (164) e (152)

$$(183)\qquad \lambda'=v'=0,\quad \nu'+\mu'+l-i=n';$$

e di più

$$(184)\qquad \rho'=0,\ \varsigma'=0;\ \text{ovvero}\ \rho'+\varsigma'=\nu'+h+\mu'+(l-i)-\lambda'=n'+h.$$

Poscia se ne conchiuderà 1.° supponendo $N'=n'+h$,

$$(185)\qquad \mathfrak{C}'=\Sigma[h+l+1]_{\mu'}(n'+h-\nu')\frac{(n'+h)^{\nu'-1}}{1\cdot 2\cdots\nu'}$$

2.° supponendo $N'=-n'-h$,

$$(186)\qquad \mathfrak{C}'=\Sigma(-1)^{h-g'}[h+l+1]_{\mu'}(n'+h-\nu')\frac{(n'+h)^{\nu'-1}}{1\cdot 2\cdots\nu'}.$$

Finalmente, se si suppone $n=1$, la formola (157) darà 1.° per $i=0$,

$$(187)\qquad \mathfrak{C}=\Sigma(-1)^{\varsigma}N(g)_{\rho}(h-g+1)_{\varsigma}-4g\Sigma(-1)^{\varsigma}(g-1)_{\rho-1}(h-g)_{\varsigma}$$
$$+(h-1)\Sigma(-1)^{\varsigma}(g+1)_{\rho}(h-g)_{\varsigma}$$

essendo ρ e ς assoggettate all'equazione di condizione

$$(188)\qquad \rho+\varsigma=\frac{h+1-N}{2};$$

2.° per $i=1$

$$(189)\qquad \mathfrak{C}=\Sigma(-1)^{\varsigma}N(g+1)_{\rho}(h-g)_{\varsigma}$$

essendo ρ e ς sempre legate fra loro dall'equazione (188). Parimenti se si suppone $n'=1$, la formola (158) darà 1.° per $i=l$,

$$(190)\qquad \mathfrak{C}'=\Sigma(-1)^{\varsigma'}N'(g')_{\rho'}(h-g'+1)_{\varsigma'}-4g'\Sigma(-1)^{\varsigma'}(g'-1)_{\rho'-1}(h-g')_{\varsigma'}$$
$$+(h+l)\Sigma(-1)^{\varsigma'}(g'+1)_{\rho'}(h-g')_{\varsigma'}$$

ρ' e ς' essendo assoggettate all'equazione di condizione

$$(191)\qquad \rho'+\varsigma'=\frac{h+1-N'}{2};$$

2.° per $i=l-1$

$$(192)\qquad \mathfrak{C}'=\Sigma(-1)^{\varsigma'}(g'+1)_{\rho'}(h-g')_{\varsigma'}$$

ρ' e ς' essendo sempre legate fra loro dall'equazione (191).

Conviene osservare che estendendo il segno Σ a tutti i valori interi, nulli o positivi di g, g', j, si hanno

$$(193)\qquad \begin{aligned}&\Sigma(\sqrt{-1})^{g+g'}(h)_{j,\,g-j,\,g'-j}\,\mathfrak{D}=\\&\left\{\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}+\left(\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\right)\sqrt{-1}-\cos.\Delta_{0,0}\right\}^{h}\end{aligned}$$

$$(194)\qquad \begin{aligned}&\Sigma(-1)^{g+g'}(\sqrt{-1})^{g+g'}(h)_{j,\,g-j,\,g'-j}\,\mathfrak{D}=\\&\left\{\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}-\left(\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\right)\sqrt{-1}-\cos.\Delta_{0,0}\right\}^{h}\end{aligned}$$

$$\Sigma(-1)^{g}(\sqrt{-1})^{g+g'}(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathcal{D}=$$

(195) $$\left\{\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}-\left(\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}-\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\right)\sqrt{-1}+\cos.\Delta_{0,0}\right\}^{h}$$

$$\Sigma(-1)^{g'}(\sqrt{-1})^{g+g'}(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathcal{D}=$$

(196) $$\left\{\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}+\left(\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}-\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\right)\sqrt{-1}+\cos.\Delta_{0,0}\right\}^{h}.$$

Dunque se si fanno per brevità

(197) $$\left\{\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}-\cos.\Delta_{0,0}+\left(\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\right)\sqrt{-1}\right\}^{h}=\mathcal{E}_1+\mathcal{E}_2\sqrt{-1}$$

(198) $$\left\{\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}+\cos.\Delta_{0,0}+\left(\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}-\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\right)\sqrt{-1}\right\}^{h}=\mathcal{F}_1+\mathcal{F}_2\sqrt{-1}$$

si avranno

(199) $$\begin{aligned}\Sigma\cos.\frac{\pi(g+g')}{2}(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathcal{D}&=\Sigma(-1)^{g+g'}\cos.\frac{\pi(g+g')}{2}(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathcal{D}=\mathcal{E}_1\\ \Sigma\sin.\frac{\pi(g+g')}{2}(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathcal{D}&=-\Sigma(-1)^{g+g'}\sin.\frac{\pi(g+g')}{2}(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathcal{D}=\mathcal{E}_2\end{aligned}$$

(200) $$\begin{aligned}\Sigma(-1)^{g'}\cos.\frac{\pi(g+g')}{2}(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathcal{D}&=\Sigma(-1)^{g}\cos.\frac{\pi(g+g')}{2}(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathcal{D}=\mathcal{F}_1\\ \Sigma(-1)^{g'}\sin.\frac{\pi(g+g')}{2}(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathcal{D}&=-\Sigma(-1)^{g}\sin.\frac{\pi(g+g')}{2}(h)_{j,g-j,g'-j}\,\mathcal{D}=\mathcal{F}_2\end{aligned}$$

Ciò posto, la parte di P che corrisponde a valori di N, n, N', n' proprj a verificare la condizione

(201) $$\frac{N}{n+h}=\frac{N'}{n'+h}=\pm 1$$

sarà evidentemente della forma

(202) $$\frac{m'}{a'}\Sigma(-1)^{i+\frac{k+h}{2}}\frac{k}{k+h}\left(\frac{k+h}{2}\right)_h\frac{(l)_i}{2^{n+n'+h}}\frac{\theta^l}{1\cdot 2\cdots l}\mathcal{C}\,\mathcal{C}'\,\varepsilon^{n}\,\varepsilon'^{n'}\frac{d^l\Theta_k}{d\theta^l}\times$$
$$\left\{\mathcal{E}_1\cos.(NT+N'T')\mp\mathcal{E}_2\sin.(NT+N'T')\right\}$$

i valori di $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ essendo determinati dalle formole (181), (185); mentre che la parte di P corrispondente a valori di N, n, N', n' proprj a verificare la condizione

(203) $$-\frac{N}{n+h}=\frac{N'}{n'+h}=\pm 1$$

sarà

(204) $$\frac{m'}{a'}\Sigma(-1)^{i+\frac{k-h}{2}}\frac{k}{k+h}\left(\frac{k+h}{2}\right)_h\frac{(l)_i}{2^{n+n'+h}}\frac{\theta^l}{1\cdot 2\cdots l}\mathcal{C}\,\mathcal{C}'\,\varepsilon^{n}\,\varepsilon'^{n'}\frac{d^l\Theta_k}{d\theta^l}\times$$
$$\left\{\mathcal{F}_1\cos.(NT+N'T')\pm\mathcal{F}_2\sin.(NT+N'T')\right\}$$

i valori di $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ essendo ancora determinati dalle formole (181), (185).

Consideriamo specialmente il caso in cui si hanno

$$(205) \qquad \tau = 0\,, \qquad \tau' = 0.$$

Allora ponendo per brevità

$$(206) \qquad \varpi - \varpi' + \varphi - \varphi' = \Pi$$

si troverà

$$(207) \qquad \begin{aligned} \cos.\delta &= \cos.(p - \varpi - p' + \varpi' + \Pi) \\ &= \cos.\Pi \left\{ \cos.(p-\varpi)\cos.(p'-\varpi') + \sin.(p-\varpi)\sin.(p'-\varpi') \right\} \\ &\quad - \sin.\Pi \left\{ \sin.(p-\varpi)\cos.(p'-\varpi') - \sin.(p'-\varpi')\cos.(p-\varpi) \right\} \end{aligned}$$

e conseguentemente saranno

$$(208) \qquad \cos.\Delta_{0,0} = \cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}} = \cos.\Pi\,, \quad \cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}} = -\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0} = \sin.\Pi$$

$$(209) \qquad \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2\sqrt{-1} = 0\,; \qquad \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2\sqrt{-1} = 2^h(\cos.\Pi + \sqrt{-1}\sin.\Pi)^h$$

$$(210) \qquad \mathcal{E}_1 = 0\,; \quad \mathcal{E}_2 = 0\,; \quad \mathcal{F}_1 = 2^h\cos.h\Pi\,, \quad \mathcal{F}_2 = 2^h\sin.h\Pi.$$

Dunque l'espressione (202) svanirà, mentre che l'espressione (204) sarà ridotta a

$$(211) \quad \frac{m'}{a'}\Sigma(-1)^{i+\frac{k-h}{2}}\frac{k}{k+h}\left(\frac{k+h}{2}\right)_h\frac{(l)_i}{2^{n+n'}}\mathcal{C}\mathcal{C}'\frac{\theta^l}{1\cdot 2\cdots l}\frac{d^l\Theta_k}{d\theta^l}\varepsilon^n\varepsilon'^{n'}\cos.(NT+N'T'\mp h\Pi)$$

i valori di $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ essendo sempre determinati colle formole (181), (185). È importante l'osservare che nella formola (211) i termini corrispondenti ai valori di N eguali, astrazion fatta dal segno, ma affetti di segni contrarj sono due a due eguali.

Cerchiamo in particolare i termini che nella espressione (211) corrispondono a

$$N = -2\,, \quad N' = 5\,, \quad k = 1.$$

Dovendo $k-h$ essere pari ed $h =$ ovvero $< k$, si avrà necessariamente $h = 1$. In seguito l'equazione

$$-\frac{N}{n+h} = \frac{N'}{n'+h} = 1$$

darà

$$n = -N - h = 1\,, \quad n' = N' - h = 4.$$

Dunque i termini cercati saranno compresi nella somma

$$(212) \qquad \frac{m'}{a'}\Sigma\frac{(-1)^i(l)_i}{2^6}\mathcal{C}\mathcal{C}'\frac{\theta^l}{1\cdot 2\cdots l}\frac{d^l\Theta_1}{d\theta^l}\varepsilon\varepsilon'^4\cos.(5T'-2T-\Pi),$$

i valori di $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ essendo

$$(213) \qquad \mathcal{C} = \Sigma[1]_\mu(2-\nu)\frac{2^{\nu-1}}{1\cdot 2\cdots\nu}\,; \quad \mathcal{C}' = \Sigma[l+2]_{\mu'}(5-\nu')\frac{5^{\nu'-1}}{1\cdot 2\cdots\nu'}$$

ed i numeri $\nu, \mu, i, \nu', \mu', l-i$ essendo assoggettati alle condizioni (179), (183), ovvero

$$(214) \qquad \mu + \nu + i = 1\,, \quad \mu' + \nu' + l - i = 4.$$

D'altronde si dedurranno dalle formole (213), (214), 1.° ponendo $i=0$,

$$\mathcal{C}=2\,,\quad \mathcal{C}'=\Sigma\,[l+2]_{4-l-\nu'}(5-\nu')\frac{5^{\nu'-1}}{1\cdot 2\cdots\nu'}$$

2.° ponendo $i=1$,

$$\mathcal{C}=1\,,\quad \mathcal{C}'=\Sigma\,[l+2]_{5-l-\nu'}(5-\nu')\frac{5^{\nu'-1}}{1\cdot 2\cdots\nu'}\,.$$

Per conseguenza ciascuno dei termini in quistione sarà della forma

$$(215)\qquad \frac{m'L}{a'}\,\theta^l\,\frac{d^l\Theta_1}{d\theta^l}\,\varepsilon\,\varepsilon'^4\cos.(5T'-2T-\Pi)$$

il valore di L essendo

$$(216)\qquad L=\frac{1}{2^6(1\cdot 2\cdots l)}\,\Sigma\left\{2[l+2]_{4-l-\nu'}-l[l+2]_{5-l-\nu'}\right\}(5-\nu')\frac{5^{\nu'-1}}{1\cdot 2\cdots\nu'}\,.$$

Ciò posto, si troverà per $l=0$

$$L=\frac{1}{2^5}\Sigma[2]_{4-\nu'}(5-\nu')\frac{5^{\nu'-1}}{1\cdot 2\cdots\nu'}=\frac{1}{2}\,\frac{3138}{768}$$

per $l=1$

$$L=\frac{1}{2^6}\,\Sigma\left\{2[3]_{3-\nu'}-[3]_{4-\nu'}\right\}(5-\nu')\frac{5^{\nu'-1}}{1\cdot 2\cdots\nu'}=-\frac{1}{2}\,\frac{13}{768}$$

per $l=2$

$$L=\frac{1}{2^6}\,\Sigma\left\{[4]_{2-\nu'}-[4]_{3-\nu'}\right\}(5-\nu')\frac{5^{\nu'-1}}{1\cdot 2\cdots\nu'}=-\frac{1}{2}\,\frac{1556}{768}$$

per $l=3$

$$L=\frac{1}{2^6(1\cdot 2\cdot 3)}\,\Sigma\left\{2[5]_{1-\nu'}-3[5]_{2-\nu'}\right\}(5-\nu')\frac{5^{\nu'-1}}{1\cdot 2\cdots\nu'}=-\frac{1}{2}\,\frac{438}{768}$$

per $l=4$

$$L=\frac{1}{2^6(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)}\,\Sigma\left\{2[6]_{-\nu'}-4[6]_{1-\nu'}\right\}(5-\nu')\frac{5^{\nu'-1}}{1\cdot 2\cdots\nu'}=-\frac{1}{2}\,\frac{38}{768}$$

per $l=5$

$$L=\frac{1}{2^6(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5)}(-5)=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{2^5(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)}=-\frac{1}{2}\,\frac{1}{768}\,.$$

Dunque raddoppiando ciascun termine, indi sommando i differenti termini fra loro, si troverà per la parte di P che ha per fattori ε, ε'^4 e $\cos.(5T'-2T-\Pi)$

$$(217)\qquad \frac{m'}{a'}\,\frac{\varepsilon\,\varepsilon'^4}{768}\left\{3138\,\Theta_1-13\,\theta\frac{d\Theta_1}{d\theta}-1556\,\theta^2\frac{d^2\Theta_1}{d\theta^2}-438\,\theta^3\frac{d^3\Theta_1}{d\theta^3}\right.$$
$$\left.-38\,\theta^4\frac{d^4\Theta_1}{d\theta^4}-\theta^5\frac{d^5\Theta_1}{d\theta^5}\right\}\cos.(5T'-2T-\Pi);$$

ciò che è esatto.

NOTE DEI TRADUTTORI

ALLA PARTE SECONDA

I.A

Al §. 1.°

Chiunque vorrà confrontare questa analisi con tutto ciò che è stato scritto da altri geometri sullo stesso argomento, dovrà convenire che, arrivando allo stesso scopo, si segue in essa un andamento più naturale e più breve. È noto che l'uso del metodo sta nell'integrare le equazioni (14) come se non vi esistessero i secondi termini dei secondi membri, ottenendo così tali equazioni integrali che non sono le ricercate, ma che servono di mezzo per giungere ad esse. In fatti le costanti ottenute dalle precedenti integrazioni si cambiano in funzioni di t determinabili per l'integrazione delle equazioni (17) e allora gl'integrali dapprima ottenuti si mutano nei veri integrali delle (14). Questo artificio sembra sulle prime lasciare intatta la difficoltà, giacchè invece delle $2n$ equazioni differenziali (14) si hanno ad integrare le $2n$ equazioni (17) parimenti di primo ordine; ma la circostanza che i coefficienti (A, B), (A, C), ecc. nelle (17) hanno la singolare proprietà di non contenere la t esplicita alle a, b, c - - -: e l'altra che la R è nei casi di applicazione fatta di termini aventi fattori assai piccoli, contribuiscono a facilitare la ricerca degli integrali delle (17) almeno per serie.

Volendo aggiungere qualche parola di maggiore schiarimento diremo che indicati con

$$x = x(a, b, c - - - t);\ y = y(a, b, c - - - t);\ - - - u = u(a, b, c - - - t), - - -$$

gli integrali delle (1), le A, B, C - - - [equazioni (6) del testo] funzioni di x, y, z - - - u - - - sono i valori di a, b, c - - - che si ottengono sciogliendo le equazioni precedenti. Risostituite tali funzioni di x, y, z - - - u - - - nelle stesse precedenti al luogo di a, b, c - - -, le equazioni diventano identiche stando alla sola composizione in x, y, z - - - senza bisogno di ricorrere alla ulteriore composizione delle x, y, z - - - in a, b, c - - - t. È questa riflessione che persuade la verità delle equazioni (8). Nelle (8), (9), (10), (16) le derivate

$$\frac{dx}{da}, \frac{dx}{db}, - - - \frac{du}{da}, \frac{du}{db}, - - - \frac{dR}{da}, \frac{dR}{db}, - - -$$

dovrebbero veramente scriversi

$$\frac{dx}{dA}, \frac{dx}{dB}, - - - \frac{du}{dA}, \frac{du}{dB}, - - - \frac{dR}{dA}, \frac{dR}{dB}, - - -;$$

ma siccome le A, B - - - stanno al posto delle a, b, c - - -, e qui si ha poi bisogno di portare le quantità alla seconda composizione delle x, y, z - - - per le a, b, c - - - t: non è difficile accorgersi che le due espressioni conducono ai medesimi risultati.

II.A

Al §. 2.°

Per la dimostrazione delle equazioni (5) indirizziamo il lettore al Capo VI. Lib. 2.° N.° 46 della *Mécanique céleste* di Laplace [T. I.er pag. 254].

A convincersi che il sistema delle equazioni (*), (7), (8), (9) rappresenta gl'integrali completi delle tre

$$(a) \qquad \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{Mx}{r^3} = 0\,; \quad \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{My}{r^3} = 0\,; \quad \frac{d^2z}{dt^2} + \frac{Mz}{r^3} = 0$$

può il lettore consultare diversi autori: noi citeremo la *Mécanique analytique* di Lagrange [T. II. pag. 10 et suiv]. Assai più breve riesce una dimostrazione *a posteriori* che crediamo di riferire.

Se i valori di x, y, z dati dalle (7) si sostituiscono nelle precedenti (a), avvertendo che ϕ, τ sono costanti, si ottengono facilmente le tre

$$(\cos.\phi \cos.p - \sin.\phi \sin.p \cos.\tau)\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \frac{M}{r^2}\right]$$

$$-(\cos.\phi \sin.p + \sin.\phi \cos.p \cos.\tau)\left[r\frac{d^2p}{dt^2} + 2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dr}{dt}\right] = 0$$

$$(\sin.\phi \cos.p + \cos.\phi \sin.p \cos.\tau)\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \frac{M}{r^2}\right]$$

$$-(\sin.\phi \sin.p - \cos.\phi \cos.p \cos.\tau)\left[r\frac{d^2p}{dt} + 2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dr}{dt}\right] = 0$$

$$\sin.p \sin.\tau\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \frac{M}{r^2}\right]$$

$$+\cos.p \sin.\tau\left[r\frac{d^2p}{dt^2} + 2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dr}{dt}\right] = 0.$$

Pertanto sarà provato che queste equazioni sono verificate quando si dimostri che le due

$$(b) \qquad \frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 + \frac{M}{r^2} = 0; \quad r\frac{d^2p}{dt^2} + 2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} = 0$$

sono avverate per le (*), (8), (9).

Dalla (9) per la prima delle (8) abbiamo $\frac{d\psi}{dt} = \frac{a\alpha}{r}$. Quindi dalla stessa prima delle (8)

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a^2\alpha\varepsilon \sin\psi}{r}; \quad \frac{d^2r}{dt^2} = \frac{a^4\alpha^2\varepsilon(\cos.\psi - \varepsilon)}{r^3}.$$

Dalla seconda delle (8) si cavano prontamente le due

$$\cos.(p - \varpi) = a\frac{\cos.\psi - \varepsilon}{r}; \quad \sin.(p - \varpi) = a\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\frac{\sin.\psi}{r},$$

per le quali

$$\frac{dp}{dt} = \frac{a^2\alpha\sqrt{1-\varepsilon^2}}{r^2}; \quad \frac{d^2p}{dt^2} = -2a^4\alpha^2\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\frac{\sin.\psi}{r^4}.$$

Avvertendo ora che per la (*) abbiamo $a^3\alpha^2 = M$, risultano

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{aM\varepsilon(\cos.\psi - \varepsilon)}{r^3}; \quad r\left(\frac{dp}{dt}\right)^2 = \frac{aM(1-\varepsilon^2)}{r^3}$$

$$2\frac{dp}{dt}\cdot\frac{dr}{dt} = 2aM\varepsilon\sqrt{1-\varepsilon^2}\,\frac{\sin.\psi}{r^3} = -r\frac{d^2p}{dt^2}$$

valori che sostituiti nelle (b) le rendono identiche.

Dedurre dalle equazioni (17) del 1.° paragrafo le (10) del presente, è un'operazione assai lunga, che ci dispensiamo di riproporre, essendo stata fatta da altri. Citeremo una Memoria del sig. Poisson inserita nel Giornale Politecnico [Cah. 15, pag. 308, 309]. Chi vorrà fare il confronto delle formole, dovrà osservare che nella Memoria di Poisson le lettere

$$\Omega,\ n,\ \mu,\ g,\ \alpha,\ \gamma,\ e$$

hanno la medesima significazione che in questa di Cauchy le espressioni

$$-R,\ a,\ M,\ \varpi,\ \phi,\ \tau,\ \varepsilon$$

essendo lo stesso il significato delle lettere a, c. Dovrà anche osservare che nella seconda linea, pag. 309 del libro citato vi è un errore di stampa: in luogo di $\frac{d\Omega}{d\gamma}$ deve leggersi $\frac{d\Omega}{dg}$, come si capisce subito per gli antecedenti.

Nello stesso luogo si troverà la dimostrazione di ciò che il nostro Autore asserisce sul fine del paragrafo assumendo l'espressione (13) invece della (9).

La formola (11) dipende a colpo d'occhio dalla (4). Quanto alla (12) la riduzione non è ovvia, e però ne daremo l'indirizzo. Primieramente, sostituiti i valori (7), si ha

$$\begin{aligned}\cos.\delta = {} & (\cos.\phi \cos.p - \sin.\phi \sin.p \cos.\tau)(\cos.\phi' \cos.p' - \sin.\phi' \sin.p' \cos.\tau') \\ & + (\sin.\phi \cos.p + \cos.\phi \sin.p \cos.\tau)(\sin.\phi' \cos.p' + \cos.\phi' \sin.p' \cos.\tau') \\ & + \sin.p \sin.\tau \sin.p' \sin.\tau'.\end{aligned}$$

Pongasi per $\cos.\tau$ l'espressione $1 - 2\sin.^2\frac{\tau}{2}$: il primo fattore binomiale della precedente quantità si cambia in $\cos.(\phi+p) + 2\sin.\phi \sin.p \sin.^2\frac{\tau}{2}$, e riduzioni affatto simili hanno luogo nei seguenti tre. Eseguiti poi i prodotti accennati, risulta una quantità che agevolmente si riduce sotto la forma

$$\begin{aligned}&\cos.(\phi+p-\phi'-p') + 2\sin.p \sin.^2\frac{\tau}{2}\sin.(\phi-\phi'-p') + 2\sin.p' \sin.^2\frac{\tau'}{2}\sin.(\phi'-\phi-p) \\ &+ 4\sin.^2\frac{\tau}{2}\sin.^2\frac{\tau'}{2}\sin.p \sin.p' \cos.(\phi-\phi') + \sin.p \sin.p' \sin.\tau \sin.\tau'.\end{aligned}$$

Sciogliendo ora $\sin.(\phi-\phi'-p')$, $\sin.(\phi'-\phi-p)$ nelle espressioni equivalenti

$$-\sin.(\phi'-\phi)\cos.p' - \cos.(\phi'-\phi)\sin.p'\ ; \qquad \sin.(\phi'-\phi)\cos.p - \cos.(\phi'-\phi)\sin.p\ ,$$

la precedente quantità si riduce prestamente alla

$$\begin{aligned}&\cos.(\phi+p-\phi'-p') - 2\sin.(\phi'-\phi)\left\{\sin.^2\frac{\tau}{2}\sin.p \cos.p' - \sin.^2\frac{\tau'}{2}\sin.p' \cos.p\right\} \\ &+2\sin.p \sin.p'\left\{\frac{1}{2}\sin.\tau \sin.\tau' + 2\sin.^2\frac{\tau}{2}\sin.^2\frac{\tau'}{2}\cos.(\phi-\phi') - \sin.^2\frac{\tau}{2}\cos.(\phi-\phi') - \sin.^2\frac{\tau'}{2}\cos.(\phi-\phi')\right\}\end{aligned}$$

Perchè dunque sia dimostrata la (12) dell'Autore, rimane a provare il quadrinomio

$$\frac{1}{2}\sin.\tau \sin.\tau' + 2\sin.^2\frac{\tau}{2}\sin.^2\frac{\tau'}{2}\cos.(\phi-\phi') - \sin.^2\frac{\tau}{2}\cos.(\phi-\phi') - \sin.^2\frac{\tau'}{2}\cos.(\phi-\phi')$$

equivalente al binomio

$$\sin.\tau \sin.\tau' \sin.^2\frac{\phi-\phi'}{2} - \sin.^2\frac{\tau'-\tau}{2}\cos.(\phi-\phi');$$

il che prontamente si scorge mettendo in quest'ultimo in luogo di

$$\sin.^2\frac{\phi-\phi'}{2}\ ; \qquad \sin.^2\frac{\tau'-\tau}{2}$$

le quantità rispettivamente eguali

$$\frac{1-\cos.(\phi-\phi')}{2}\ ; \qquad \sin.^2\frac{\tau}{2} + \sin.^2\frac{\tau'}{2} - 2\sin.^2\frac{\tau}{2}\sin.^2\frac{\tau'}{2} - \frac{1}{2}\sin.\tau \sin.\tau'.$$

III.[A]

pag. 139. *Siano d'altronde* - - -

Avendo chiamato a_0 il valore di a per $t=0$, può incontrarsi una difficoltà nel trovare la stessa espressione a_0 per primo termine del secondo membro della (6), il quale dovrebbe essere il valore di a per $\mu=0$. Esprimiamo dunque la (6) nel seguente modo

$$(c) \qquad a=\alpha+\mu a_1+\frac{\mu^2}{2}a_2+\text{ecc.},$$

e siano $\gamma, --- \alpha', ---$ i primi termini delle serie analoghe per $c, --- a', ---$. Faremo vedere che si hanno

$$(d) \qquad \alpha=a_0, \quad \gamma=c_0, --- \alpha'=a'_0, ---$$

nello stesso tempo che esporremo quanto si richiede alla chiara intelligenza della (7).
La prima delle (4) può scriversi

$$\frac{da}{dt}=\mu\mathfrak{A}\left(\alpha+\mu a_1+\text{ecc.},\ \gamma+\mu c_1+\text{ecc.},\ --- \alpha'+\mu a'_1+\text{ecc.},\ --- t\right),$$

e svolgendo $\mathfrak{A}$ secondo le potenze di μ

$$(e) \qquad \frac{da}{dt}=\mu(\mathfrak{A})_0+\mu^2\left[\left(\frac{d\mathfrak{A}}{da}\right)_0 a_1+\left(\frac{d\mathfrak{A}}{dc}\right)_0 c_1+ --- +\left(\frac{d\mathfrak{A}}{da'}\right)_0 a'_1+ ---\right]+\text{ecc.},$$

avendo indicato per

$$(\mathfrak{A})_0, \left(\frac{d\mathfrak{A}}{da}\right)_0, \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dc}\right)_0, \text{ecc. le } \mathfrak{A}, \frac{d\mathfrak{A}}{da}, \frac{d\mathfrak{A}}{dc}, \text{ecc.}$$

in cui siansi messe le lettere $\alpha, \gamma, --- \alpha', ---$ in luogo delle $a, c, --- a', ---$. S'integri per t la precedente equazione (e) definendo l'integrazione fra i limiti *zero*, t, avremo

$$(f) \qquad a-a_0=\mu\int_0^t dt\cdot(\mathfrak{A})_0+\mu^2\left[\int_0^t dt\cdot\left(\frac{d\mathfrak{A}}{da}\right)_0 a_1+ --- +\int_0^t dt\cdot\left(\frac{d\mathfrak{A}}{da'}\right)_0 a'_1+ ---\right]+\text{ecc.}$$

Ora osserviamo che le $a_0, c_0, --- a'_0 ---$ sono indipendenti da μ per convenzione, supponendo che l'effetto delle forze perturbatrici cominci al principio del tempo t ad effettuarsi sull'orbita ellittica corrispondente a quell'istante: e però dacchè a_0 non contiene μ, il confronto delle (c), (f) dà subito $\alpha=a_0$, e da confronti simili si hanno tutte le altre equazioni (d). Veggonsi poi evidentemente dipendere dalle (f) le

$$\left(\frac{da}{d\mu}\right)_0=\int_0^t dt\cdot(\mathfrak{A})_0$$

$$\left(\frac{d^2a}{d\mu^2}\right)_0=2\left[\int_0^t dt\cdot\left(\frac{d\mathfrak{A}}{da}\right)_0 a_1+ --- +\int_0^t dt\cdot\left(\frac{d\mathfrak{A}}{da'}\right)_0 a'_1+ ---\right]$$

ecc. ecc.

che conducono prontamente alla (7), e nelle quali si è voluto indicare con

$$\left(\frac{da}{d\mu}\right)_0, \left(\frac{d^2a}{d\mu^2}\right)_0, \text{ecc. le } \frac{da}{d\mu}, \frac{d^2a}{d\mu^2}, \text{ecc.}$$

ove μ abbia preso il valore *zero*.

IV.[A]

pag. 140. *Primieramente risulta* - - -

Le equazioni (10) del §. 2.° danno

$$(g) \qquad \mathfrak{A} = -h\frac{dR}{dc}; \quad \mathfrak{C} = h\frac{dR}{da} + h'\frac{dR}{d\varepsilon}; \text{ ecc.}$$

dove h, h' ecc. sono coefficienti che non contengono la t esplicitamente alle $a, c, - - -$. Quindi è che quando alle $a, c, - - -$ si sostituiscono le $a_0, c_0, - - -$, e così dalle precedenti (g) si passa alle

$$(h) \qquad (\mathfrak{A})_0 = -(h)_0\left(\frac{dR}{dc}\right)_0; \quad (\mathfrak{C})_0 = (h)_0\left(\frac{dR}{da}\right)_0 + (h')_0\left(\frac{dR}{d\varepsilon}\right)_0; \text{ ecc.};$$

le $(h)_0$, $(h')_0$, ecc. sono quantità costanti rispetto al tempo t che non trovasi se non nelle $\left(\frac{dR}{dc}\right)_0$, $\left(\frac{dR}{da}\right)_0$, ecc. Le precedenti (h) danno

$$\int_0^t dt \cdot (\mathfrak{A})_0 = -(h)_0 \int_0^t dt \cdot \left(\frac{dR}{dc}\right)_0; \text{ ecc.}$$

e così è provato ciò che l'Autore asserì relativamente alle espressioni (9) del testo.

Dalle (g) deduconsi le

$$\frac{d\mathfrak{A}}{da} = -h\frac{d^2R}{dadc} - \frac{dh}{da}\cdot\frac{dR}{dc}; \quad \frac{d\mathfrak{A}}{dc} = -h\frac{d^2R}{dc^2}; \text{ ecc.}$$

essendo h un coefficiente che contiene la sola a e non le altre quantità $c, - - -$ variabili col tempo. Si passa poi alle

$$(i) \qquad \left(\frac{d\mathfrak{A}}{da}\right)_0 = -(h)_0\left(\frac{d^2R}{dadc}\right)_0 - \left(\frac{dh}{da}\right)_0\left(\frac{dR}{dc}\right)_0; \quad \left(\frac{d\mathfrak{A}}{dc}\right)_0 = -(h)_0\left(\frac{d^2R}{dc^2}\right)_0; \text{ ecc.}$$

e deve notarsi che anche la quantità $\left(\frac{dh}{da}\right)_0$ con tutte le simili, è costante per riguardo a t.

Componendo colle (h), (i) le espressioni equivalenti agli integrali doppj che occorrono per calcolare il coefficiente di μ^2 nella (7), ed estraendo dai segni integrali le quantità costanti per riguardo al tempo, vedesi come sotto tali segni non restino che le quantità

$$\left(\frac{dR}{da}\right)_0, \quad \left(\frac{dR}{dc}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2R}{dadc}\right)_0, \quad \left(\frac{d^2R}{dc^2}\right)_0, \text{ ecc.}$$

E questo è già tutto quanto si richiede per l'intelligenza del seguito della Memoria dove l'Autore [sue espressioni (13)] insegna a calcolare integrali duplicati presentati sotto forma monomia. Nondimeno diremo, che la forma binomiale delle espressioni (10) per quegl'integrali che si compongono coi differenziali secondi della R, si prova facilmente a motivo del ripetersi dei coefficienti $h, h', - - -$ nei diversi termini delle equazioni (g) a due a due con segno contrario. Havvi poi anche qualche integrale duplicato composto coi soli differenziali primi della R, che riducesi al calcolo d'integrali semplici. Così nel coefficiente di μ^2 per la (7) occorre il termine

$$(h)_0\left(\frac{dh}{da}\right)_0 \int_0^t dt \cdot \left[\left(\frac{dR}{dc}\right)_0 \int_0^t dt \cdot \left(\frac{dR}{dc}\right)_0\right];$$

ma abbiamo in generale

$$\int_0^t dt \cdot \left[\psi(t) \int_0^t dt \cdot \psi(t)\right] = \frac{1}{2}\left[\int_0^t dt \cdot \psi(t)\right]^2.$$

V.A

pag. 141. *Osserviamo ancora* - - -

Facendo $S(t) = \mathcal{S}(t) + \omega(t)$ abbiamo

$$\int_0^t dt \cdot S(t) = \int_0^t dt \cdot \mathcal{S}(t) + \int_0^t dt \cdot \omega(t),$$

e perciò se, calcolando il valore dell'integrale $\int_0^t dt \cdot S(t)$, si prende la funzione $\mathcal{S}(t)$ in luogo di $S(t)$, si commette un errore corrispondente al valore dell'integrale $\int_0^t dt \cdot \omega(t)$, astrazione fatta dal segno.

Considerando un integrale definito come il limite della somma di una serie di termini che crescono di numero e diminuiscono di grandezza (*) ma possono essere altri positivi altri negativi: se dicasi i il più gran valore, astrazion fatta dal segno, che prende $\omega(t)$ per tutti i valori di t fra *zero*, t: si prova nel luogo citato essere sempre

$$\int_0^t dt \cdot \omega(t) < i \int_0^t dt \quad \text{ossia} \quad < it.$$

Così si capiscono le espressioni (14), (15) del testo, e perchè in esse le i, j non portino il doppio segno. Non bisogna dimenticarsi di astrarre sempre le quantità dal loro segno nei casi in cui si assegnano limiti dei quali esse debbono restare minori.

VI.A

pag. 142. *Consideriamo primieramente* - - -

Per cambiare l'espressione (12) del §. 2.° nella (17) del presente conviene mettere dappertutto $p - \varpi + \varpi$, in luogo di p, e $p' - \varpi' + \varpi'$ in luogo di p', e considerare $p - \varpi$, $p' - \varpi'$ come facenti un arco solo: avremo così

$$\begin{aligned}\cos.(p-p'+\varphi-\varphi') = {} & \cos.(p-\varpi)\cos.(p'-\varpi')\cos.(\varphi-\varphi'+\varpi-\varpi') + \cos.(p-\varpi)\sin.(p'-\varpi')\sin.(\varphi-\varphi'+\varpi-\varpi') \\ & - \sin.(p-\varpi)\cos.(p'-\varpi')\sin.(\varphi-\varphi'+\varpi-\varpi') + \sin.(p-\varpi)\sin.(p'-\varpi')\cos.(\varphi-\varphi'+\varpi-\varpi');\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin.p\sin.p' = {} & \cos.(p-\varpi)\cos.(p'-\varpi')\sin.\varpi\sin.\varpi' + \cos.(p-\varpi)\sin.(p'-\varpi')\sin.\varpi\cos.\varpi' \\ & + \sin.(p-\varpi)\cos.(p'-\varpi')\cos.\varpi\sin.\varpi' + \sin.(p-\varpi)\sin.(p'-\varpi')\cos.\varpi\cos.\varpi';\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin.p\cos.p' = {} & \cos.(p-\varpi)\cos.(p'-\varpi')\sin.\varpi\cos.\varpi' - \cos.(p-\varpi)\sin.(p'-\varpi')\sin.\varpi\sin.\varpi' \\ & + \sin.(p-\varpi)\cos.(p'-\varpi')\cos.\varpi\cos.\varpi' - \sin.(p-\varpi)\sin.(p'-\varpi')\cos.\varpi\sin.\varpi';\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sin.p'\cos.p = {} & \cos.(p-\varpi)\cos.(p'-\varpi')\cos.\varpi\sin.\varpi' + \cos.(p-\varpi)\sin.(p'-\varpi')\cos.\varpi\cos.\varpi' \\ & - \sin.(p-\varpi)\cos.(p'-\varpi')\sin.\varpi\sin.\varpi' - \sin.(p-\varpi)\sin.(p'-\varpi')\sin.\varpi\cos.\varpi'.\end{aligned}$$

Avendo sott'occhio queste espressioni e la formola (12) da trasformarsi, si riconoscono, anche senza prender penna, i valori dei quattro coefficienti H, J, I, K assegnati nelle equazioni (18) del testo.

(*) Vedi questi Opuscoli Tomo I.° pag. 371.

VII.[A]

pag. 143. *Sia ora* $\mathfrak{P}$ - - -

Conviene por mente che P è una funzione di ε, ε' due quantità le quali si trovano in parte esplicitamente nella sua espressione (27), in parte implicitamente dentro le ψ, ψ' determinate dalle due equazioni

$$(j) \qquad \psi = T + \varepsilon \sin.\psi; \quad \psi' = T' + \varepsilon' \sin.\psi';$$

e che lo scopo a cui si vuole giungere è di avere P svolto in serie secondo le potenze e i prodotti di ε, ε'. Ciò si potrebbe direttamente ottenere mediante la formola (188) della Parte prima della Memoria; ed è bene richiamare quanto colà si è detto e confrontare le precedenti (j) con quelle (187) per capire il perchè i valori delle ε, ε' debbano essere minori del numero 0,662742 - - -. Non è però di tal maniera che l'Autore procede in questo luogo. Egli dapprima non si occupa delle ε, ε' che entrano nel valore (27) di P esplicitamente alle ψ, ψ': e per applicare la formola di Lagrange considera semplicemente P funzione di ψ, ψ' [noi la esprimeremo per $P(\psi, \psi')$]. Così facendo, l'applicazione della formola (142) della Parte prima ci dà

$$P(\psi, \psi') = P(T, \psi') + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varepsilon^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 - - - n} \cdot \frac{d^{n-1} \left\{ \frac{dP(T, \psi')}{dT} \sin.^n T \right\}}{dT^{n-1}}.$$

Visto il valore di T scritto nella prima delle (28), si capisce che non fa differenza l'accennare le derivazioni per c invece di accennarle per T, e però la precedente può scriversi

$$(l) \qquad P(\psi, \psi') = P(T, \psi') + \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varepsilon^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 - - - n} \cdot \frac{d^{n-1} \left\{ \frac{dP(T, \psi')}{dc} \sin.^n T \right\}}{dc^{n-1}}.$$

Allo stesso modo troviamo essere

$$(m) \qquad P(T, \psi') = P(T, T') + \Sigma_{n'=1}^{n'=\infty} \frac{\varepsilon'^{n'}}{1 \cdot 2 \cdot 3 - - - n'} \cdot \frac{d^{n'-1} \left\{ \frac{dP(T, T')}{dc'} \sin.^{n'} T' \right\}}{dc'^{n'-1}}.$$

Dalla quale deduciamo prontamente

$$(n) \quad \frac{dP(T, \psi')}{dc} \sin.^n T = \frac{dP(T, T')}{dc} \sin.^n T + \Sigma_{n'=1}^{n'=\infty} \frac{\varepsilon'^{n'}}{1 \cdot 2 - - - n'} \cdot \frac{d^{n'-1} \left\{ \frac{d^2 P(T, T')}{dc\, dc'} \sin.^n T \sin.^{n'} T' \right\}}{dc'^{n'-1}}.$$

Per queste (m), (n) la precedente (l) diventa

$$(o) \qquad P(\psi, \psi') = P(T, T') +$$

$$\Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varepsilon^n}{1 \cdot 2 \cdot 3 - - - n} \cdot \frac{d^{n-1} \left\{ \frac{dP(T, T')}{dc} \sin.^n T \right\}}{dc^{n-1}} + \Sigma_{n'=1}^{n'=\infty} \frac{\varepsilon'^{n'}}{1 \cdot 2 - - - n'} \cdot \frac{d^{n'-1} \left\{ \frac{dP(T, T')}{dc'} \sin.^{n'} T' \right\}}{dc'^{n'-1}}$$

$$+ \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \Sigma_{n'=1}^{n'=\infty} \frac{\varepsilon^n}{1 \cdot 2 - - - n} \cdot \frac{\varepsilon'^{n'}}{1 \cdot 2 - - - n'} \cdot \frac{d^{n+n'-2} \left\{ \frac{d^2 P(T, T')}{dc\, dc'} \sin.^n T \sin.^{n'} T' \right\}}{dc^{n-1}\, dc'^{n'-1}};$$

e questa è la (30) del testo, osservando che le nostre espressioni $P(\psi, \psi')$, $P(T, T')$ corrispondono alle P, $\mathfrak{P}$ dell'Autore, e che il terzo de' suoi segni Σ esprime una somma duplicata.

L'adoperare uno stesso segno Σ per significare somme tanto di serie semplici, come di serie doppie, triple ecc. è una convenzione a cui bisogna avvezzarsi, perchè l'Autore ne fa in seguito molto uso. Osserviamo anco che $P(T, T')$ nella (o), ovvero $\mathfrak{P}$ nella (30) rimane funzione delle ε, ε' esplicite alle ψ, ψ' nel valore (27), e che di qui hanno origine le seguenti ricerche in cui si mira ad ottenere mediante ulteriori svolgimenti la serie ordinata per le potenze, e i prodotti delle ε, ε' senza che i coefficienti contengano essi medesimi queste quantità. Il calcolo è poi subito rifatto da capo a fine di giungere più direttamente al risultato finale.

VIII.[A]

pag. 144. *Ora la valutazione* - - -

L'Autore non dà qui che un'idea del modo col quale si potrebbe giungere all'intento: e ciò per potere prontamente far conoscere l'origine delle ineguaglianze periodiche e secolari: del resto egli entra poi dopo più di proposito nella trattativa della questione. Per tale motivo non ci fermeremo qui a mostrare come le quantità della forma

$$\cos.^g T \cos.^{g'} T \sin.^h T \sin.^{h'} T'$$

possano ridursi ad una delle espressioni

$$A \cos.(nT + n'T'), \quad B \sin.(nT + n'T');$$

è questa una proposizione che emerge facilmente da quanto è in seguito insegnato dall'Autore.

La (39) si dimostra col teorema Neutoniano, e può scriversi

$$(p) \qquad (1 - x)^{-3} = \frac{1}{2} \Sigma_{n=0}^{n=\infty} \left[(n+1)(n+2)x^n\right]$$

che diventa necessaria per capir poi la (41). Per comprendere ciò che si asserisce della espressione (40), bisogna provare che la somma della serie

$$1 + \frac{n+2}{n+1} \cdot \frac{n+3}{n+2} \varepsilon' + \frac{n+3}{n+1} \cdot \frac{n+4}{n+2} \varepsilon'^2 + - - -$$

è minore della somma della serie

$$1 + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2} \varepsilon' + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2} \varepsilon'^2 + - - - .$$

E si fa dimostrando che, esclusa l'unità, ogni termine della seconda è maggiore del corrispondente nella prima. A tale effetto basterà provare in generale

$$\frac{h \cdot k}{1 \cdot 2} > \frac{n+h}{n+1} \cdot \frac{n+k}{n+2}$$

essendo h, k numeri interi non minori di 2. Infatti, prendendo la differenza delle quantità confrontate, avremo identicamente

$$\frac{h \cdot k}{1 \cdot 2} - \frac{n+h}{n+1} \cdot \frac{n+k}{n+2} = \frac{(hk-2)n^2 + \left[2h(k-1) + k(h-2)\right]n}{2(n+1)(n+2)},$$

e quest'ultima quantità è evidentemente sempre positiva. Una dimostrazione affatto simile vale pel limite di cui si parla subito dopo; veramente pel limite nel secondo dei due casi dovrebbe porsi il fattore ε'^n come nella (40) invece del fattore ε'^{n-1}; ma mettendo questo secondo si abbracciano i due casi, per essere $\varepsilon' < 1$.

IX.ª

pag. 146. *In luogo di sviluppare - - -*

Lo svolgimento del valore di P eseguito alla maniera qui primieramente indicata lascerebbe ancora alcune ε, ε' fra i coefficienti dei termini provenienti dallo sviluppo delle funzioni implicite; nondimeno le formole (42), (43) meritano attenzione in quanto si combinano poi in seguito con altri artificj pei quali si giunge a togliere dai suddetti coefficienti le ε, ε' che derivano dai fattori $\cos.\psi - \varepsilon$, $\cos.\psi' - \varepsilon'$ e dalle η, η'.

La formola (141), Parte prima, ci dà

$$(q)\qquad \begin{aligned} &\cos.^g \psi \sin.^h \psi = \cos.^g T \sin.^h T \\ &+ \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2 - - - n} \left\{ \frac{d^n[\cos.^g T \sin.^{h+n} T]}{dT^n} - n \frac{d^{n-1}[\cos.^{g+1} T \sin.^{h+n-1} T]}{dT^{n-1}} \right\}. \end{aligned}$$

L'Autore per abbracciare anche il primo termine sotto il segno Σ ha fatto cominciare la somma da zero ponendo la condizione che si legge nel testo; è quindi manifesto che la (42) è giusta perchè, ammessa quella condizione, il suo effetto corrisponde a quello della precedente. Similmente, senza condizioni particolari, la formola che tiene il luogo della (43) è

$$(r)\qquad \begin{aligned} &\cos.^g \psi \sin.^h \psi = \cos.^g T \sin.^h T \\ &+ \Sigma_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varepsilon^n}{1\cdot 2 - - - n} \left\{ h \frac{d^{n-1}[\cos.^{g+1} T \sin.^{h+n-1} T]}{dT^{n-1}} - g \frac{d^{n-1}[\cos.^{g-1} T \sin.^{h+n+1} T]}{dT^{n-1}} \right\} \end{aligned}$$

e si deduce prontamente dalla precedente (q) eseguendo una sola delle n derivazioni per T nel primo termine sotto il segno Σ. Ammessa la (43) dell'Autore, si vede pel confronto colla precedente (r), che per $n=0$ il suo secondo membro deve dare il termine $\cos.^g T \sin.^h T$; però egli dovette mettere quelle condizioni, avendo osservato che l'espressione

$$h \int dt \cdot \cos.^{g+1} T \sin.^{h-1} T - g \int dt \cdot \cos.^{g-1} T \sin.^{h+1} T$$

si riduce appunto alla $\cos.^g T \sin.^h T$ mediante una integrazione a parti.

Non sarà inutile avvertire che la sommatoria della (44) non contiene veramente il primo termine dello sviluppo di η, giacchè per $n=0$ la quantità sotto il segno non riducesi all'unità: ma questo difetto è tolto, come vedremo, quando si sostituisce alla quantità sotto il segno un'altra espressione, la quale è poi quella di cui si fa uso.

X.ª

pag. 147. *Per semplificare il calcolo - - -*

I valori delle quantità simboliche $(k)_l$, $[k]_l$ possono essere resi colla *gamma* di Legendre dietro le loro espressioni date dalle (46) (*); diventano così

$$(s)\qquad (k)_l = \frac{\Gamma(k+1)}{\Gamma(k-l+1)\Gamma(l+1)}; \quad [k]_l = \frac{\Gamma(k+l)}{\Gamma(k)\Gamma(l+1)};$$

formole di cui faremo molto uso in progresso, principalmente della prima.

(*) Vedi i nostri Opuscoli Tomo I.° pag. 186 formole (g), (h), (i).

Sotto questa forma tutte le diverse trasformazioni esposte nelle (46) si riscontrano quasi a colpo d'occhio. Si trovano subito vere le (47). Ed anche le seguenti per l negativa; ritenendo essere stato dimostrato da Legendre, partendo da $\Gamma(0)=\infty$ (*), che il valore della gamma corrispondente ad un *argomento numero negativo intero* è sempre l'infinito.

La (44) diventa per la prima delle (46)

$$\eta = \Sigma_{n=0}^{n=\infty} \left(\frac{1}{2}\right)_n (-1)^n e^{2n}$$

e allora sparisce il difetto notato in quella, come è evidente a motivo della prima delle (47).

Lo sviluppo del binomio $(1+x)^k$, quando k è numero intero positivo, prende la forma

$$(1+x)^k = \Sigma_{n=0}^{n=k} (k)_n \, x^n$$

e può anche scriversi

$$(t) \qquad (1+x)^k = \Sigma_{n=0}^{n=\infty} (k)_n \, x^n$$

perchè tutti i valori di $(k)_n$ nei quali n supera k sono zero; ciò si dimostra colla prima delle precedenti (s) osservando che allora si ha nel denominatore una *gamma* con argomento intero e negativo. È necessario far attenzione a quanto qui si è detto per capire ciò che si asserisce nel testo a proposito di alcune formole che dipendono dalla precedente (t).

Giova anche notare la seguente formola

$$(u) \qquad (1+x)^{-k} = \Sigma_{l=0}^{l=\infty} [k]_l \, (-1)^l \, x^l \, .$$

XI.[A]

pag. 148. *Ciò posto, si troveranno - - -*

A ben ravvisare l'utilità delle nuove espressioni, facciamo qualche osservazione sulla prima delle formole qui date dall'Autore. Essendo

$$\cos.T = \frac{1}{2} e^{T\sqrt{-1}} \left(1 + e^{-2T\sqrt{-1}}\right)$$

e quindi

$$\cos.^g T = \frac{1}{2^g} e^{gT\sqrt{-1}} \left(1 + e^{-2T\sqrt{-1}}\right)^g,$$

s'immagini sviluppato il binomio, e per la formola (t) della nota precedente avremo

$$\cos.^g T = \frac{1}{2^g} e^{gT\sqrt{-1}} \, \Sigma (g)_\rho \, e^{-2\rho T\sqrt{-1}}$$

estendendo la somma Σ da $\rho=0$ a $\rho=g$, ovvero [il che non fa differenza] a $\rho=\infty$; il fattore $e^{gT\sqrt{-1}}$ può passarsi sotto il segno sommatorio, e allora si ha la formola del testo. Se in luogo dell'espressione $e^{(g-2\rho)T\sqrt{-1}}$ mettasi l'equivalente

$$\cos.(g-2\rho)\,T + \sqrt{-1} \cdot \sin.(g-2\rho)\,T,$$

la parte immaginaria dovrà fare equazione da sè; e la formola di cui si tratta si romperà

(*) *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales eulériennes.* T. II. pag. 476.

nelle due

$$\cos.^g T = \frac{1}{2^g} \Sigma (g)_\rho \cos.(g-2\rho) T \; ; \quad 0 = \frac{1}{2^g} \Sigma (g)_\rho \sin.(g-2\rho) T.$$

S'interpreti la prima di queste alla maniera ordinaria, e per essere

$$(g)_0 = 1, \; (g)_1 = g; \; (g)_2 = \frac{g(g-1)}{2}, \; (g)_3 = \frac{g(g-1)(g-2)}{2 \cdot 3}, \text{ ecc.}$$

risulterà

$$\cos.^g T = \frac{1}{2^g} \left\{ \cos.gT + g \cos.(g-2) T + \frac{g(g-1)}{2} \cos.(g-4) T + \text{ecc.} \right\}$$

che è la formola nota (*) per trasformare le potenze dei coseni di archi semplici in serie di coseni di archi multipli.

Un andamento affatto simile persuade la seconda delle formole date qui dall'Autore; nella terza il secondo membro tiene il luogo del prodotto di due serie, e il segno Σ si estende a due variabili ρ, ς, come fosse un segno sommatorio duplicato.

Il passaggio alle (49), (50) non ha difficoltà, ponendo mente alla formola

$$\frac{d^m \cdot e^{NT\sqrt{-1}}}{d\,T^m} = e^{NT\sqrt{-1}} N^m \left(\sqrt{-1}\right)^m.$$

Nel dedurre la (50) dalla (43) si osservi che nel secondo termine si cambia il $-$ col $+$ per un giuoco del $\sqrt{-1}$. In entrambe le (49), (50) la Σ tiene il luogo di un segno di somma tripla: talchè immaginando scritta la serie infinita contenente le successive potenze di ε, ogni coefficiente avrà ancora una Σ che esprimerà somma duplicata.

Per capire ciò che è detto nel testo dopo la (51), si noti che, per essere $\frac{1}{\sqrt{-1}} = (-1)^{1+\frac{1}{2}}$, abbiamo

$$\frac{e^{NT\sqrt{-1}}}{(\sqrt{-1})^h} = (-1)^{h+\frac{h}{2}} \cos.NT + (-1)^{h+\frac{h}{2}} \sqrt{-1} \sin.NT$$
$$= (-1)^{h+\frac{h-1}{2}} \sqrt{-1} \cos.NT + (-1)^{h+1+\frac{h-1}{2}} \sin.NT.$$

Poniamo attenzione che nel passaggio dalla (52) alla (53) si cambia la Σ esprimente una somma tripla in una Σ esprimente una somma doppia. Questa (53), richiamate le comuni maniere di scrivere, è una delle note serie che danno l'anomalia eccentrica per la media. Infatti mettendo in disteso la serie ordinata per le potenze di ε, la (53), ove l'esponenziale immaginario riducasi alla sola parte reale, prende la forma

$$\cos.\psi = \Sigma \frac{(-1)^\varsigma}{2} (1)_\varsigma (1-2\varsigma)^{-1} \cos.(1-2\varsigma) T + \varepsilon \Sigma \frac{(-1)^\varsigma}{2^2} (2)_\varsigma (2-2\varsigma)^0 \cos.(2-2\varsigma) T$$
$$+ \frac{\varepsilon^2}{2} \Sigma \frac{(-1)^\varsigma}{2^3} (3)_\varsigma (3-2\varsigma)^1 \cos.(3-2\varsigma) T + \frac{\varepsilon^3}{2 \cdot 3} \Sigma \frac{(-1)^\varsigma}{2^4} (4)_\varsigma (4-2\varsigma)^2 \cos.(4-2\varsigma) T + \text{ecc.}$$

dove le Σ dei singoli coefficienti significano somme semplici. È assai facile calcolare questi coefficienti e ottenere così

$$\cos.\psi = \cos.T - \varepsilon \cdot \frac{1}{2}(1-\cos.2T) - \frac{\varepsilon^2}{2} \cdot \frac{3}{4}(\cos.T - \cos.3T) - \frac{\varepsilon^3}{3} \cdot (\cos.2T - \cos.4T) + \text{ecc.};$$

risultato che coincide colla seconda delle formole date da Lagrange (**) per l'oggetto indicato, eseguite nella formola Lagrangiana alcune facili riduzioni.

(*) Lagrange: *Leçons sur le calcul des fonctions*. Edit. in 8.vo, pag. 150.
(**) *Mécanique analytique*. T. II. pag. 23.

Il segno Σ della (54) è ancora di somma triplicata, ma la variabilità di ρ dà i soli due termini contenenti $(1)_0 = 1$, $(1)_1 = 1$, talchè il secondo membro potrebbe ridursi a forma binomiale dove le Σ non esprimerebbero che somme doppie. La (55) diventa manifesta se si osservi che Σ è segno duplicato, ma che di tutte le combinazioni dei valori di n, ς non havvi che la combinazione $n = 1$, $\varsigma = 1$ la quale dia un termine diverso da zero.

XII.[A]

pag. 149. *Si avrà d'altronde - - -*

La prima delle (57) è un'immediata conseguenza della formola (u) posta in fondo alla Nota X.[a]. La seconda ci si presenta sulle prime col secondo membro sotto la forma

$$(v) \qquad \Sigma_{l=0}^{l=\infty} \left\{ [l+1]_2 \, \varepsilon'^{l} \cos.\psi'^{l+1} - [l+1]_2 \, \varepsilon'^{l+1} \cos.\psi'^{l} \right\}$$

dove il secondo termine differisce apparentemente da quello dell'Autore. Per ridurre questo termine come sul testo e così avere la ε' ad eguale potenza in ambo i termini, si osservi che sulle somme può usarsi un artificio analitico molto simile a quello che si adopera per trasformare gl'integrali definiti. La somma

$$\Sigma_{l=0}^{l=\infty} [l+1]_2 \, \varepsilon'^{l+1} \cos.\psi'^{l}$$

può trasformarsi ponendo $l+1 = h$ nuova variabile: ai limiti $l=0$, $l=\infty$ corrispondono i limiti $h=1$, $h=\infty$: nè v'è alcun fattore da introdurre perchè in ambi i casi l'aumento finito è l'unità. Essa si prova per tal modo equivalente alla somma

$$\Sigma_{h=1}^{h=\infty} [h]_2 \, \varepsilon'^{h} \cos.\psi'^{h-1},$$

e questa può farsi cominciare da $h=0$ e non da $h=1$, perchè il coefficiente $[0]_2$ e in generale $[0]_l$ è zero, come è facile dimostrare mediante la seconda formola (s) della Nota X.[a]. Nella somma

$$\Sigma_{h=0}^{h=\infty} [h]_2 \, \varepsilon'^{h} \cos.\psi'^{h-1}$$

possiamo ora restituire la lettera l invece della h [queste lettere entrando in una maniera soltanto istrumentale], l'espressione che ne nasce, sostituita nella (v), dà il risultato del testo.

La (58) quale risulta dalla prima delle (57) avrebbe per secondo membro l'espressione

$$(w) \qquad \Sigma [l+1]_2 \frac{N'^{n-1}}{2^{l+n+1}} \left\{ (-1)^{\varsigma} (l+1)_{\rho} (n)_{\varsigma} + (-1)^{\varsigma} l (l-1)_{\rho} (n+2)_{\varsigma} \right\} \frac{\varepsilon'^{n+l}}{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot \frac{e^{N' T' \sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}$$

$$N' = l + n + 1 - 2(\rho + \varsigma)$$

con quattro variabili l, n, ρ, ς, talchè Σ significa qui una somma quadrupla.

Quando si mette $n = n' - l$, si trasforma la sommatoria Σ per quella parte che risguarda n: e siccome ai limiti $n=0$, $n=\infty$ corrispondono i limiti $n'=l$, $n'=\infty$, la nuova sommatoria per la parte che riguarda n' si deve cominciare da $n'=l$, e non da $n'=0$. È questa un'avvertenza essenziale, che non farebbe più bisogno se in luogo di una sola lettera Σ si mettesse nel caso di una somma multipla il segno multiplo, come usa il sig. Libri, corredato dell'indicazione dei limiti per ciascuna Σ, il che è praticato dal nostro Autore nel solo caso della somma semplice. La ragione per cui l'Autore cambia la precedente (w) nella espressione del testo, s'intende facilmente Egli mira qui e in seguito ad avere espresso da una sola variabile l'esponente di ε',

affinchè sciogliendo la sommatoria in serie per quella parte che riguarda una tale variabile, si ottenga prontamente la serie ordinata per le successive potenze di ε^p.

Un'avvertenza affatto simile vale pei due termini della (60) dove le sommatorie per la parte che riguarda n' debbono cominciare da l e non da *zero*. Quando nella seconda sommatoria della (60) si faccia la riduzione di cui parla l'Autore dopo la (61), è bene avvertire che allora la sommatoria in quel secondo termine per la parte che riguarda ρ comincerebbe da 1 e non da *zero*: infatti si trasforma anche qui cambiando la variabile, e poi restituendo a operazione finita la lettera di prima. Ma si può senza errore far cominciare la sommatoria trasformata da $\rho=0$, perchè [prima formola (s)] abbiamo $(l-2)_{-1}$ sempre zero per ogni valore di l, tranne il caso in cui $l=1$, caso nel quale il termine è poi zero per un'altra ragione, cioè a motivo del fattore $l-1$. Avremo presente questa avvertenza nella Nota XV.ª dove ci gioverà far cominciare la sommatoria da 1 e non da zero.

Per maggiore chiarezza tradurremo qui coi segni multipli le sommatorie per quelle formole di cui l'Autore fa uso in seguito.

Nella (54) Σ sta pel segno $\Sigma_{n=0}^{n=\infty}\,\Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty}\,\Sigma_{\varsigma=0}^{\varsigma=\infty}$.

Nella (56) Σ è invece di $\Sigma_{n=0}^{n=\infty}\,\Sigma_{\varsigma=0}^{\varsigma=\infty}$

Nella (58) Σ sta per $\Sigma_{l=0}^{l=\infty}\,\Sigma_{n'=l}^{n'=\infty}\,\Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty}\,\Sigma_{\varsigma=0}^{\varsigma=\infty}$.

Nei due termini del secondo membro della (60) la Σ ha la stessa significazione precedente: anche quando facciasi la trasformazione indicata dall'Autore affinchè pel secondo abbia luogo come pel primo la (59).

In quest'ultima espressione diventa utile per le ulteriori applicazioni un cambiamento legittimato dal seguente teorema. Essendo $\alpha(l, n)$ una funzione di l, n, abbiamo identicamente

$$(x)\qquad \Sigma_{l=0}^{l=\infty}\,\Sigma_{n=l}^{n=\infty}\,\alpha(l, n)\,\varepsilon^n = \Sigma_{n=0}^{n=\infty}\,\Sigma_{l=0}^{l=n}\,\alpha(l, n)\,\varepsilon^n.$$

La maniera più ovvia di persuadercene è quella di sciogliere entrambe le espressioni precedenti nelle serie doppie equivalenti che si troveranno identiche. Adunque riterremo che nella (58) e nella (60)

$$\Sigma \text{ sta per } \Sigma_{n'=0}^{n'=\infty}\,\Sigma_{l=0}^{l=n'}\,\Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty}\,\Sigma_{\varsigma=0}^{\varsigma=\infty}.$$

XIII.ª

pag. 149. *Se ora si unisce* - - -

Da questo luogo della Memoria innanzi si sottintende che le N, N' finora prese come abbreviazioni delle espressioni

$$n+1-2\varsigma;\quad n'+1-2(\rho+\varsigma)$$

si prendano invece per vere variabili, trasformando per esse le sommatorie nella parte dovuta alla variabile ς. Accenneremo questa trasformazione preliminare nelle (54), (56), (58), (60) di cui risulta la (62).

Cominciando dalla (56) come dalla più facile, essa diventa

$$(y)\qquad \cos\psi-\varepsilon = \Sigma_{n=0}^{n=\infty}\,\Sigma_{N=-n-1}^{N=n+1}\left\{(-1)^{\varsigma}(n+1)_{\varsigma}\,\frac{N^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n}-2^{n+1}(0)_{n-1}(0)_{\varsigma-1}\right\}\frac{\varepsilon^n}{2^{n+1}}\,e^{NT\sqrt{-1}}$$

dove è $\varsigma = \frac{n+1-N}{2}$; ed ecco in qual modo. Nel trasformare la sommatoria per ς mediante l'equazione $N = n+1-2\varsigma$ verrebbe che ai limiti $\varsigma = 0$, $\varsigma = \infty$ dovrebbero corrispondere i limiti $N = n+1$, $N = -\infty$; talchè la nuova sommatoria per la parte che riguarda N porterebbe il segno $\Sigma_{N=n+1}^{N=-\infty}$. È evidente che si possono rovesciare senza alterazione i limiti di sifatte sommatorie [principio di cui faremo uso anche in seguito]; e invece di $\Sigma_{N=-\infty}^{N=n+1}$ si mette $\Sigma_{N=-n-1}^{N=n+1}$ perchè l'Autore dimostra in appresso essere $-(n+1)$ il limite negativo di N, essendone $n+1$ il positivo. Anticipiamo qui questa cognizione anche per la sommatoria simile riguardante N' per non avere a riformare le formole dopo poche linee. Del resto è chiaro che si potevano qui accennare imperfettamente i limiti di N, N', e perfezionarli dipoi.

La (54) diventa

$$(z) \qquad \sin.\psi = \Sigma_{n=0}^{n=\infty} \Sigma_{N=-n-1}^{N=n+1} \Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty} (-1)^{\varsigma} (1)_{\rho} (n)_{\varsigma} \frac{N^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot \frac{\varepsilon^{n}}{2^{n+1}} \cdot \frac{e^{NT\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}$$

essendo $\varsigma = \frac{n+1-N}{2} - \rho$.

Il segno Σ nella (58) e nella (60) deve interpretarsi

$$\Sigma_{n'=0}^{n'=\infty} \Sigma_{N'=-n'-1}^{N'=n'+1} \Sigma_{l=0}^{l=n'} \Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty}$$

essendo $\varsigma = \frac{n'+1-N'}{2} - \rho$.

Con questa preparazione delle formole s'intende prontamente la (62), notando che si hanno in essa i coseni e i seni in luogo degli esponenziali immaginarj, perchè si sottintende che dopo eseguite le moltiplicazioni della (56) per la (60), della (54) per la (58), della (54) per la (60) e della (56) per la (58) siansi ridotti i suddetti esponenziali immaginarj alle loro parti reali. Nel prodotto della (54) per la (58) havvi un $\sqrt{-1}$ che si moltiplica per altro $\sqrt{-1}$ e di qui esce il segno — che precede K nella (62). Quanto ai segni sommatorj, i due Σ che veggonsi nella (62) hanno la significazione $\Sigma_{n=0}^{n=\infty} \Sigma_{n'=0}^{n'=\infty} \Sigma_{N=-n-1}^{N=n+1} \Sigma_{N'=-n'-1}^{N'=n'+1}$.

Nella (63), volendo parlare a rigore, non dovrebbe esservi alcun segno Σ: il vero valore di A è il secondo membro senza Σ e con $\varsigma = \frac{n+1-N}{2}$. Nella (64) Σ deve interpretarsi $\Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty}$; nella (65) il primo Σ è $\Sigma_{l=0}^{l=n'} \Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty}$, e così anche il secondo; questa significazione è quella altresì del Σ nella (66): ritenendo per le (65), (66) $\varsigma = \frac{n'+1-N'}{2} - \rho$. Nelle (63), (64), (65), (66) n, n', N, N' figurano come costanti, e non diventano variabili se non dopo la sostituzione nella (62).

Il cambiamento della (62) nella (67) si comprenderà dopo aver preparate le due formole che debbono adoperarsi in luogo delle (54), (58). Combinando la precedente (z) colla

$$\eta = \Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} (-1)^{\upsilon} \left(\frac{1}{2}\right)_{\upsilon} \varepsilon^{2\upsilon}$$

abbiamo

$$\eta \sin.\psi = \Sigma_{n=0}^{n=\infty} \Sigma_{N=-n-1}^{N=n+1} \Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty} \Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} (-1)^{\varsigma+\upsilon} \left(\frac{1}{2}\right)_{\upsilon} (1)_{\rho} (n)_{\varsigma} \frac{N^{n-1}}{1 \cdot 2 \cdots n} \cdot \frac{\varepsilon^{n+2\upsilon}}{2^{n+1}} \cdot \frac{e^{NT\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}$$

con $\varsigma = \frac{n+1-N}{2} - \rho$.

Si trasformi la sommatoria per n ponendo $n + 2\upsilon = h$ nuova variabile; avremo

$$\eta \sin.\psi = \Sigma_{h=2\upsilon}^{h=\infty} \Sigma_{N=-n-1}^{N=n+1} \Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty} \Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} (-1)^{\varsigma+\upsilon} \left(\frac{1}{2}\right)_\upsilon (1)_\rho (h-2\upsilon)_\varsigma \frac{N^{h-2\upsilon-1}}{1\cdot 2 \cdots (h-2\upsilon)} \cdot \frac{2^{2\upsilon}\varepsilon^h}{2^{h+1}} \cdot \frac{e^{NT\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}$$

con $\varsigma = \frac{h-2\upsilon+1-N}{2} - \rho$. Abbiamo conservati i limiti della sommatoria per N a fine di evitare una inutile complicazione.

La sommatoria per h che comincia da $h=2\upsilon$ si può far cominciare da $h=0$ a motivo di un teorema simile a quello marcato (x) nella Nota precedente, che dà identicamente

$$\Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty} \Sigma_{h=2\upsilon}^{h=\infty} \alpha(h, \upsilon)\varepsilon^h = \Sigma_{h=0}^{h=\infty} \Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=h_1} \alpha(h, \upsilon)\varepsilon^h,$$

dove h_1 ha il valore $\frac{h}{2}$ se h è pari, e il valore $\frac{h-1}{2}$ se h è dispari, e che si verifica alla stessa maniera. Ciò fatto, può restituirsi n in luogo di h per la solita ragione che è lettera di solo uso istrumentale: così si ha

$$(aa) \qquad \eta \sin.\psi =$$

$$\Sigma_{n=0}^{n=\infty} \Sigma_{N=-n-1}^{N=n+1} \Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty} \Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=n_1} (-1)^{\varsigma+\upsilon} \left(\frac{1}{2}\right)_\upsilon (1)_\rho (n-2\upsilon)_\varsigma \frac{N^{n-2\upsilon-1}}{1\cdot 2 \cdots (n-2\upsilon)} \cdot \frac{2^{2\upsilon}\varepsilon^n}{2^{n+1}} \cdot \frac{e^{NT\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}$$

con $\varsigma = \frac{n-2\upsilon+1-N}{2} - \rho$; e dove $n_1 = \frac{n}{2}$ se n è pari, $n_1 = \frac{n-1}{2}$ se n è dispari.

Un processo di trasformazione affatto simile eseguito colla (58) dà

$$(bb) \qquad \frac{\eta' \sin.\psi'}{(1-\varepsilon' \cos.\psi')^3} =$$

$$\Sigma(-1)^\upsilon \left(\frac{1}{2}\right)_\upsilon [l+2]_2 \left\{ \begin{matrix} (-1)^\varsigma (l+1)_\rho (n'-2\upsilon-l)_\varsigma \\ +(-1)^\varsigma l(l-1)_\rho (n'-2\upsilon-l+2)_\varsigma \end{matrix} \right\} \frac{2^{2\upsilon} N'^{n'-2\upsilon-l-1}}{1\cdot 2 \cdots (n'-2\upsilon-l)} \cdot \frac{\varepsilon'^{n'}}{2^{n'+1}} \cdot \frac{e^{N'T'\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}$$

con $\varsigma = \frac{n'-2\upsilon+1-N'}{2} - \rho$

dove Σ sta per $\Sigma_{n'=0}^{n'=\infty} \Sigma_{N'=-n'-1}^{N'=n'+1} \Sigma_{l=0}^{l=n'-2\upsilon} \Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty} \Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=n'_1}$

ed $n'_1 = \frac{n'}{2}$ ovvero $= \frac{n'-1}{2}$ secondo che n' è pari o dispari.

Le (aa), (bb) adoperate invece delle (54), (58) e insieme colle (56), (60) alla stessa maniera già tenuta pel ritrovamento della (62), ci conducono alla (67).

Adunque nella (68) Σ tiene il luogo di $\Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty} \Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=n_1}$ con $n_1 = \frac{n}{2}$ ovvero $\frac{n-1}{2}$; e nella (69) Σ sta per $\Sigma_{l=0}^{l=n'-2\upsilon} \Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty} \Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=n'_1}$ con $n'_1 = \frac{n'}{2}$ ovvero $\frac{n'-1}{2}$.

Ora si capiranno le espressioni del testo che si trovano immediatamente dopo la (69).

Per non interrompere la Nota seguente diremo qui che se invece di ridurre gli esponenziali immaginarj alle loro parti reali dopo le moltiplicazioni indicate pel ritrovamento della (67), si riducono prima nelle singole formole, avremo non più la (67) ma la (73).

XIV.[A]

pag. 151. *Ma egli è chiaro* - - -

Il vero valore di A, giusta quanto si disse nella Nota precedente, è in generale

$$A = (-1)^{\varsigma}\,(n+1)_{\varsigma}\,\frac{N^{n-1}}{1\cdot 2 \cdots n} - 2^{n+1}\,(0)_{n-1}\,(0)_{\varsigma-1}$$

con ς invece di $\frac{n+1-N}{2}$. Se $N-n$ è pari, ς è necessariamente fratto, il che ripugna colla natura di questa quantità, che vedemmo dover essere numero intero e positivo. Dunque il corrispondente valore di A non deve esistere: di qui la (70). Per la (71) abbiamo

$$A = -(2)_1\,0^0 - 2^2 = -6;$$

giacchè in questo caso $0^0 = 1$, e si dimostra così. L'equazione $N = n+1-2\varsigma$, per essere $\varsigma = 1$, dà $N = n-1$; dunque il nostro 0^0 risulta dal fare $n = 1$ nella espressione

$$(n-1)^{n-1} = n^{n-1} - (n-1)\,n^{n-2} + \text{ecc.};\ \text{dunque ecc.}$$

Stante tutto l'esposto sul testo e nelle Note precedenti, si riconoscono senza fatica le asserzioni dell'Autore circa le (75), (76), (77). Il passo difficile è dalla (77) alla (78): ecco come può dimostrarsi

Mettendo per $[l+1]_2\,(l+1)$; $1\cdot 2 \cdots (n'-l)$ le espressioni equivalenti $\frac{(l+1)^2\,(l+2)}{2}$; $\Gamma(n'-l+1)$; la (77) è

$$A' = \frac{1}{2}\,\Sigma_{l=0}^{l=n'}\,(l+1)^2\,(l+2)\,\frac{(n'+1)^{n'-l-1}}{\Gamma(n'-l+1)}.$$

Trasformando la sommatoria col porre $n'-l = h$ nuova variabile, i limiti rimangono invariati. È vero che verrebbero a rovescio, ma si è già detto anche nella Nota precedente che si possono raddrizzare senza che ciò porti differenza: avremo

$$A' = \frac{1}{2}\,\Sigma_{h=0}^{h=n'}\,(n'-h+1)^2\,(n'-h+2)\,\frac{(n'+1)^{h-1}}{\Gamma(h+1)}.$$

La sommatoria definita può cambiarsi in un integrale finito definito: il che importa (*) il cambiamento del simbolo $\Sigma_{h=0}^{h=n'}$ nel simbolo $\Sigma_0^{n'+1}\,\Delta h$. È dunque, ponendo per brevità $n'+1 = a$,

$$A' = \frac{1}{2}\,\Sigma_0^a\,\Delta h\cdot(a-h)^2\,(a-h+1)\,\frac{a^{h-1}}{\Gamma(h+1)}.$$

Di questo integrale finito definito si trova il valore passando per l'indefinito, giacchè è

$$\Sigma\,\Delta h\cdot(a-h)^2\,(a-h+1)\,\frac{a^{h-1}}{\Gamma(h+1)} = \frac{[(a-h)^2+3a-h]\,a^{h-1}}{\Gamma(h)}$$

come si può facilmente verificare *a posteriori*. Eseguendo ora la definizione e osservando che la quantità nel primo limite svanisce a motivo di $\Gamma(0) = \infty$, viene

$$A' = \frac{a^a}{\Gamma(a)}$$

che coincide col valore della (78).

(*) Vedi questi Opuscoli, Tomo II.° pag. 105.

Ciò che l'Autore dice dalle equazioni (80) fino alla (83) potrebbe qui provarsi in particolare: ma ci pare inutile, dovendo noi dimostrare in generale nella Nota seguente, che cambiando N in $-N$ si mantiene A collo stesso valore e collo stesso segno, e B collo stesso valore, ma con segno contrario; e che il medesimo avviene di A', B' quando N' si muta in $-N'$. Pertanto nel caso delle (80) il terzo termine della (79) avrebbe il segno — a motivo di sin.$(-n-1)T$, ma riprende il segno + perchè il coefficiente $B=-A$; lo stesso dicasi del quarto termine a motivo di $B'=-A'$. Per le altre due combinazioni seguenti valgono osservazioni affatto simili.

Due parole per ajutare il lettore a trovar giusta la (86). Essendo $N=n-1$ viene $\varsigma=1-\upsilon-\rho$, e υ, ρ non possono prendere valori maggiori di 1 senza rendere ς negativa, il che non deve essere; adunque la (68) diventa

$$B=\Sigma_{\rho=0}^{\rho=1}\,\Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=1}(-1)^{1-\rho}\left(\frac{1}{2}\right)_{\upsilon}(1)_{\rho}\,(n-2\upsilon)_{1-\upsilon-\rho}\,\frac{2^{2\upsilon}\,(n-1)^{n-2\upsilon-1}}{1\cdot 2\cdots(n-2\upsilon)}$$

$$=\Sigma_{\rho=0}^{\rho=1}(-1)^{1-\rho}\,(1)_{\rho}\left\{(n)_{1-\rho}\,\frac{(n-1)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n}+\frac{1}{2}\,(n-2)_{-\rho}\,\frac{4(n-1)^{n-3}}{1\cdot 2\cdots(n-2)}\right\}$$

$$=-\frac{n\,(n-1)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n}-2\,\frac{(n-1)^{n-3}}{1\cdot 2\cdots(n-2)}+\frac{(n-1)^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n}$$

$$=-\frac{(n-1)^{n-2}}{1\cdot 2\cdots n}\left((n-1)^2+2n\right)=-\frac{(n-1)^{n-2}}{1\cdot 2\cdots n}\,(n^2+1).$$

XV.ª

pag. 154. *D'altra parte è facile assicurarsi* - - -

Quando si cambia N in $-N$ abbiamo dalla (72)

$$A=(-1)^{\frac{n+1+N}{2}+n-1}\,(n+1)_{\frac{n+1+N}{2}}\,\frac{N^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n};$$

ora essendo

$$(cc)\qquad \frac{n+1+N}{2}+n-1=2n-\frac{n+1-N}{2}$$

si vede prontamente che la potenza di -1 dà lo stesso risultato che quando ha l'esponente $\frac{n+1-N}{2}$. Perchè dunque nell'indicato cambiamento A rimanga invariato, bisogna che sia

$$(dd)\qquad (n+1)_{\frac{n+1+N}{2}}=(n+1)_{\frac{n+1-N}{2}}$$

la quale si verifica traducendo questi simboli colla Γ mediante la prima formola (s) della Nota X.ª.

La (68) ove tolgasi la sommatoria per ρ col rendere binomiale il secondo membro dando a ρ i due soli valori *zero*, 1; facendo anche per brevità $n''=n-2\upsilon$, può scriversi

$$(ee)\qquad B=\Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=n_1}(-1)^{\upsilon+\frac{n''+1-N}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)_{\upsilon}\frac{2^{2\upsilon}\,N^{n''-1}}{1\cdot 2\cdots n''}\left\{(n'')_{\frac{n''+1-N}{2}}-(n'')_{\frac{n''-1-N}{2}}\right\}.$$

Quando N si muta in $-N$, tutto il fattore monomio nella precedente formola non cambia a motivo della già usata equazione (cc). Perchè dunque si avveri il cambiamento di B in $-B$,

è d'uopo che si abbia l'equazione

$$(ff)\qquad (n'')_{\frac{n''+1-N}{2}} - (n'')_{\frac{n''-1-N}{2}} = -(n'')_{\frac{n''+1+N}{2}} + (n'')_{\frac{n''-1+N}{2}};$$

e questa infatti trovasi identica, traducendo le quantità simboliche, come si è fatto per la (dd) colla più volte citata prima formola (s) della Nota X.ª.

La (65) ponendo per abbreviazione

$$(gg)\qquad \begin{aligned} P &= (-1)^{\frac{n'+1-N'}{2}} [l+1]_2 (l+1) \frac{N'^{n'-l-1}}{1\cdot 2 \cdots (n'-l)} \\ Q &= 4(-1)^{\frac{n'+1-N'}{2}} [l]_2 (l-1) \frac{N'^{n'-l-1}}{1\cdot 2 \cdots (n'-l)} \end{aligned}$$

e richiamata un'avvertenza fatta nella Nota XII.ª, può scriversi

$$(hh)\qquad \begin{aligned} A' = {} & \Sigma_{l=0}^{l=n'} P \Sigma_{\rho=0}^{\rho=l} (-1)^{-\rho} (l)_\rho (n'-l+1)_{\frac{n'+1-N'}{2}-\rho} \\ & - \Sigma_{l=0}^{l=n'} Q \Sigma_{\rho=1}^{\rho=l-1} (-1)^{-\rho} (l-2)_{\rho-1} (n'-l+1)_{\frac{n'+1-N'}{2}-\rho} \end{aligned}$$

dove si sono dati ai secondi limiti delle sommatorie per ρ i valori estremi che nelle quantità simboliche $(l)_\rho$, $(l-2)_{\rho-1}$ rendono l'indice al piede eguale alla quantità sotto parentesi; i valori di ρ al di là di questi rendono quelle quantità simboliche nulle, come si è già veduto. Quando N' si muta in $-N'$, avuta d'occhio la (cc), il valore di A' può scriversi

$$(ii)\qquad \begin{aligned} A' = {} & \Sigma_{l=0}^{l=n'} P \Sigma_{\rho=0}^{\rho=l} (-1)^{-\rho+l} (l)_\rho (n'-l+1)_{\frac{n'+1+N'}{2}-\rho} \\ & - \Sigma_{l=0}^{l=n'} Q \Sigma_{\rho=1}^{\rho=l-1} (-1)^{-\rho+l} (l-2)_{\rho-1} (n'-l+1)_{\frac{n'+1+N'}{2}-\rho} \end{aligned}$$

dove P, Q sono come nelle (gg). Veramente l'esponente di -1 sotto le precedenti sommatorie, quale risulta dalle operazioni, sarebbe $-\rho-l$, ma si è potuto mettere l positiva perchè $(-1)^{-l} = (-1)^l$. Ora si trasformino le due sommatorie per ρ, ponendo $-\rho+l=h$ nuova variabile: i limiti rimangono gli stessi, perchè si corrispondono a rovescio, ed è lecito raddrizzarli, come si è più volte detto. Restituendo, a trasformazione finita, ρ per h, la (ii) diventa

$$\begin{aligned} A' = {} & \Sigma_{l=0}^{l=n'} P \Sigma_{\rho=0}^{\rho=l} (-1)^{\rho} (l)_{l-\rho} (n'-l+1)_{\frac{n'+1+N'}{2}-l+\rho} \\ & - \Sigma_{l=0}^{l=n'} Q \Sigma_{\rho=1}^{\rho=l-1} (-1)^{\rho} (l-2)_{l-\rho-1} (n'-l+1)_{\frac{n'+1+N'}{2}-l+\rho} \end{aligned}$$

e questa è la stessa (hh) se sono identiche le quattro equazioni

$$(-1)^{-\rho} = (-1)^{\rho}; \quad (l)_\rho = (l)_{l-\rho}; \quad (l-2)_{\rho-1} = (l-2)_{l-\rho-1}$$

$$(n'-l+1)_{\frac{n'+1-N'}{2}-\rho} = (n'-l+1)_{\frac{n'+1+N'}{2}-l+\rho}.$$

Di queste la prima è evidente: le due seguenti sono provate dalla prima delle (46): l'ultima si dimostra al solito colla (s) della Nota X.ª.

La (69), ponendo per abbreviazione

$$n'' = n' - 2\upsilon$$

$$W = (-1)^{\upsilon + \frac{n''+1-N'}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)_\upsilon [l+1]_2\, 2^{2\upsilon} \frac{N'^{n''-l-1}}{1\cdot 2 \cdots (n''-l)}$$

può scriversi

$$(jj)\qquad B' = \Sigma_{l=0}^{l=n''}\ \Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=n'_1}\ W \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{\rho=0}^{\rho=l+1}\ (-1)^{-\rho}\ (n''-l)_{\frac{n''+1-N'}{2}-\rho} \\ +\ \Sigma_{\rho=0}^{\rho=l-1}\ (-1)^{-\rho}\ (n''-l+2)_{\frac{n''+1-N'}{2}-\rho} \end{array} \right\}.$$

Quando N' si cambia in $-N'$, la nuova formola che ne nasce può presentarsi sotto la forma

$$B' = -\Sigma_{l=0}^{l=n''}\ \Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=n'_1}\ W \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{\rho=0}^{\rho=l+1}\ (-1)^{-\rho+l+1}\ (n''-l)_{\frac{n''+1+N'}{2}-\rho} \\ +\ \Sigma_{\rho=0}^{\rho=l-1}\ (-1)^{-\rho+l-1}\ (n''-l+2)_{\frac{n''+1+N'}{2}-\rho} \end{array} \right\}$$

il segno negativo che precede tutta la formola è compensato dai due fattori $(-1)^1$, $(-1)^{-1}$ introdotti sotto le due sommatorie per ρ. La prima di queste sommatorie si trasformi ponendo $-\rho+l+1=h$, e la seconda ponendo $-\rho+l-1=k$; si vedrà, dietro il solito principio, che i limiti non si cambiano. Restituendo a trasformazioni finite per h, k la lettera ρ, avremo

$$B' = -\Sigma_{l=0}^{l=n''}\ \Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=n'_1}\ W \left\{ \begin{array}{l} \Sigma_{\rho=0}^{\rho=l+1}\ (-1)^{\rho}\ (n''-l)_{\frac{n''+1+N'}{2}+\rho-l-1} \\ +\ \Sigma_{\rho=0}^{\rho=l-1}\ (-1)^{\rho}\ (n''-l+2)_{\frac{n''+1+N'}{2}+\rho-l+1} \end{array} \right\}.$$

Il secondo membro di questa eguaglierà manifestamente il secondo della (jj) col segno mutato quando siano identiche le due equazioni

$$(n''-l)_{\frac{n''+1-N'}{2}-\rho} = (n''-l)_{\frac{n''+1+N'}{2}+\rho-l-1}$$

$$(n''-l+2)_{\frac{n''+1-N'}{2}-\rho} = (n''-l+2)_{\frac{n''+1+N'}{2}+\rho-l+1}\ :$$

il che di fatto si verifica traducendo le precedenti quantità simboliche colla formola (s) della Nota X.ª.

XVI.ª

pag. 154. *I valori di* A, A′, B, B′ - - -

Per facilitare la verificazione delle (91) daremo qui le formole che conviene usare nella nuova ipotesi invece delle (56), (60) e (aa), (bb) della Nota XIII.ª.
Primieramente osserveremo che in luogo della (55) deve adottarsi nel presente caso la

$$\varepsilon = \frac{1}{2}\ \Sigma_{n=0}^{n=\infty}\ \Sigma_{\varsigma=0}^{\varsigma=\infty}\ \Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty}\ (0)_{n-1}\ (0)_{\varsigma+\rho-1}\ \varepsilon^n\ e^{NT\sqrt{-1}}$$

dove

$$N = n+1-2(\rho+\varsigma);$$

e questa si riconosce vera perchè il secondo membro dà $\frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$, essendo sempre zero fuori di quando le combinazioni dei valori delle variabili sono le due

$$n=1,\ \varsigma=0,\ \rho=1;\quad n=1,\ \varsigma=1,\ \rho=0.$$

In conseguenza la formola da sostituirsi alla (56), dopo aver dedotto $\cos.\psi$ dalla (49), risulta

$$\cos.\psi - \varepsilon = \Sigma_{n=0}^{n=\infty}\ \Sigma_{N=-n-1}^{N=n+1}\ A\ \frac{\varepsilon^n}{2^{n+1}}\ e^{NT\sqrt{-1}}$$

essendo

$$(ll)\qquad A=\Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty}\left\{\left[(-1)^{\varsigma}N(1)_{\rho}(n)_{\varsigma}-(-1)^{\varsigma}n(2)_{\rho}(n-1)_{\varsigma}\right]\frac{N^{n-1}}{1\cdot 2\cdots n}-2^{n}(0)_{n-1}(0)_{\varsigma+\rho-1}\right\}$$

dove $\varsigma=\dfrac{n+1-N}{2}-\rho.$

La formola da sostituirsi alla (60) si trova usando la (49) insieme alla seconda della (57): essa è

$$\frac{\cos.\psi'-\varepsilon'}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^3}=\Sigma_{n'=0}^{n'=\infty}\ \Sigma_{N'=-n'-1}^{N'=n'+1}A'\ \frac{\varepsilon'^{n'}}{2^{n'+1}}\ e^{N'T'\sqrt{-1}}$$

dove A' è come nella terza delle (91) interpretandovi il primo segno Σ per mezzo della notazione $\Sigma_{l=0}^{l=n'}\ \Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty}$ e il secondo colla notazione $\Sigma_{l=0}^{l=n'}\ \Sigma_{\rho=1}^{\rho=\infty}$. Il calcolo non è difficile partendo dalla

$$\cos.^{g}\psi'=\Sigma_{n=0}^{n=\infty}\Sigma_{\varsigma=0}^{\varsigma=\infty}\Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty}\frac{N^{n'-1}}{2^{g+n'}}\left\{(-1)^{\varsigma}N'(g)_{\rho}(n')_{\varsigma}-(-1)^{\varsigma}n'(g+1)_{\rho}(n'-1)_{\varsigma}\right\}\frac{\varepsilon'^{n'}}{1\cdot 2\cdots n'}\ e^{N'T'\sqrt{-1}}$$

dove $N'=g+n'-2(\rho+\varsigma)$, e che è dedotta dalla (49); solamente si avverta che debbono esservi praticate trasformazioni di sommatorie in tutto analoghe a quelle di cui si è discorso nella Nota XII.ª.

La formola che tiene il posto della (aa) è

$$\eta\sin.\psi=\Sigma_{n=0}^{n=\infty}\ \Sigma_{N=-n-1}^{N=n+1}\ B\ \frac{\varepsilon^{n}}{2^{n+1}}\cdot\frac{e^{NT\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}$$

ove B è quale nella seconda delle (91), ed osservando che in detto valore di B il Σ equivale a $\Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty}\ \Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=n_1}$ con $n_1=\dfrac{n}{2}$ ovvero $n_1=\dfrac{n-1}{2}$ siccome si è detto nel luogo analogo della Nota XIII.ª. Vi si giunge deducendo dalla (49)

$$\sin.\psi=\Sigma_{n=0}^{n=\infty}\ \Sigma_{\varsigma=0}^{\varsigma=\infty}\ \Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty}\frac{N^{n-1}}{2^{n+1}}\left\{(-1)^{\varsigma}N(0)_{\rho}(n+1)_{\varsigma}-(-1)^{\varsigma}n(1)_{\rho}(n)_{\varsigma}\right\}\frac{\varepsilon^{n}}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\frac{e^{NT\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}$$

con $N=n+1-2(\rho+\varsigma)$

e poi moltiplicando per η e trasformando la sommatoria relativa ad n, siccome si è fatto sul fine della Nota XIII.ª trovando la (aa).

Finalmente dovrassi alla (bb) sostituire la

$$\frac{\eta'\sin.\psi'}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^3}=\Sigma_{n'=0}^{n'=\infty}\ \Sigma_{N'=-n'-1}^{N'=n'+1}\ B'\ \frac{\varepsilon'^{n'}}{2^{n'+1}}\cdot\frac{e^{N'T'\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}$$

essendo B' quale nell'ultima delle (91), ove Σ significa

$$\Sigma_{l=0}^{l=n'-2\upsilon}\ \Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty}\ \Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=n'_1}\ \text{con}\ n'_1=\frac{n'}{2}\ \text{ovvero}\ \frac{n'-1}{2}.$$

A tale oggetto si deduce dalla prima delle (57) combinata colla (49) la

$$\frac{\sin.\psi'}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^3}=$$

$$\Sigma_{l=0}^{l=\infty}\ \Sigma_{n'=0}^{n'=\infty}\ \Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty}\ \Sigma_{\varsigma=0}^{\varsigma=\infty}\ [l+1]_2\ \frac{N'^{n'-1}}{2^{l+n'+1}}\left\{\begin{matrix}(-1)^{\varsigma}\ N'(l)_{\rho}\ (n'+1)_{\varsigma}\\ -(-1)^{\varsigma}\ n'(l+1)_{\rho}\ (n)_{\varsigma}\end{matrix}\right\}\frac{\varepsilon'^{n'+l}}{1\cdot 2\cdots n'}\cdot\frac{e^{N'T'\sqrt{-1}}}{\sqrt{-1}}$$

sulla quale si eseguisce una trasformazione per la sommatoria relativa ad n' a fine di ridurre semplicemente n' l'esponente di ε'. Poi si moltiplica per η' e si trasforma di nuovo la sommatoria relativa ad n'; il tutto in perfetta corrispondenza a quanto si è praticato pel caso analogo nelle Note XII.ª, XIII.ª.

È facile cavare dalla precedente (*ll*) $A=6$ per $N=0$, $n=1$. Si osservi che il fattore $(2)_\rho$ indicherebbe per ρ i tre valori *zero*, 1, 2: ma l'equazione $\varsigma=1-\rho$ $\left[\text{alla quale riducesi la } \varsigma=\frac{n+1-N}{2}-\rho\right]$ esclude il terzo valore di ρ che condurrebbe ad un valor negativo di ς.

Per vedere come la (92) sorte dalla terza delle (91) si comincino ad eseguire i prodotti accennati de' due binomj col fattore $\frac{N'^{n'-l-1}}{1\cdot 2\cdots(n'-l)}$, riducendo così la formola a quattro termini tutti preceduti dal loro segno sommatorio. In seguito si capirà che può togliersi la sommatoria per riguardo alla variabile l, quando si rifletta che il primo e terzo termine della formola sono sempre zero a motivo del fattore $N'^{n'-l}$ per $l<n'$, e non lo sono nell'unico caso di $l=n'$; ritenendo altronde che l non può passare n', giusta quanto si è provato dove assegnammo i limiti delle sommatorie. Il secondo e quarto termine della formola sono sempre zero per $l<n'-1$ a motivo del fattore $N'^{n'-l-1}$ e non hanno valori finiti diversi da zero che nel caso di $l=n'-1$. Adunque la formola diventa

$$A'=\Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty}\left\{[n'+1]_2(-1)^\varsigma(n'+1)_\rho(0)_\varsigma-[n']_2(-1)^\varsigma(n'+1)_\rho(0)_\varsigma\right\}$$

$$-4\Sigma_{\rho=1}^{\rho=\infty}\left\{[n']_2(-1)^\varsigma(n'-1)_{\rho-1}(0)_\varsigma-[n'-1]_2(-1)^\varsigma(n'-1)_{\rho-1}(0)_\varsigma\right\}$$

con $\varsigma=\frac{n'+1}{2}-\rho$.

Scompare poi anche la sommatoria per riguardo a ρ dietro l'osservazione, che il fattore $(0)_\varsigma$ è sempre zero fuori di quando $\varsigma=0$; pel che la variabilità di ρ si restringe al solo valore $\rho=\frac{n'+1}{2}$; allora esce la formola (92).

A provare poscia la (93), si faccia primieramente uso della seconda delle formole (*s*) della Nota X.ª e con qualche riduzione sulle Γ si avrà

$$A'=(n'+1)(n'+1)_{\frac{n'+1}{2}}-4n'(n'-1)_{\frac{n'-1}{2}}$$

indi colla prima delle citate formole (*s*) si proverà

$$A'=(n'+1)\frac{\Gamma(n'+2)}{\left(\Gamma\left(\frac{n'+3}{2}\right)\right)^2}-4n'\frac{\Gamma(n')}{\left(\Gamma\left(\frac{n'+1}{2}\right)\right)^2};$$

essendo poi

$$\frac{\Gamma(n'+2)}{\left(\Gamma\left(\frac{n'+3}{2}\right)\right)^2}=\frac{(n'+1)n'}{\left(\frac{n'+1}{2}\right)^2}\cdot\frac{\Gamma(n')}{\left(\Gamma\left(\frac{n'+1}{2}\right)\right)^2},$$

l'eguaglianza di A' a zero diventa manifesta.

XVII.ª

pag. 155. *È bene osservare che* - - -

Considerati i valori di $\cos.\psi-\varepsilon$, $\eta\sin.\psi$, $\frac{\cos.\psi'-\varepsilon'}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^3}$, $\frac{\eta'\sin.\psi'}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^3}$ quali li abbiamo scritti nella precedente Nota, non havvi difficoltà a comprendere le (94), (95), (96), (113).

Avendo la

$$\cos.\psi-\varepsilon=A_0+2\Sigma_{N=0}^{N=\infty}A_N\cos.NT$$

s'immagini sostituita al secondo membro l'equivalente serie infinita, poi si moltiplichi l'equazione per $\cos.NT$ e si integri per T fra i limiti $-\pi$, π. Tutti i termini del secondo membro svaniranno a motivo delle formole (*)

$$(mm) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} dT \cdot \cos.NT = 0\,; \quad \int_{-\pi}^{\pi} dT \cdot \cos.NT \cos.m\,T = 0$$

ad eccezione di un solo che per essere

$$\int_{-\pi}^{\pi} dT \cdot (\cos.NT)^2 = \pi$$

darà il risultato del testo.

L'integrazione a parti accennata dall'Autore per giungere alla (100) è

$$\int dT \cdot \cos.NT(\cos.\psi - \varepsilon) = \frac{1}{N} \sin.NT(\cos.\psi - \varepsilon) + \frac{1}{N} \int d\psi \cdot \sin.NT \sin.\psi$$

dove la quantità non affetta da segno integrale svanisce ai due limiti.

In maniera molto simile si trova la (102); le (105), (106) si hanno senza integrazioni a parti bastando mettere per dT' l'espressione equivalente $d\psi' \cdot (1 - \varepsilon' \cos.\psi')$. Il passaggio dalla (106) alla (107) esige che si osservi la seguente equazione contenente un integrale indefinito

$$\int d\psi' \cdot \frac{\sin.\psi'}{(1 - \varepsilon' \cos.\psi')^2} = -\frac{1}{\varepsilon'} \cdot \frac{1}{1 - \varepsilon' \cos.\psi'}.$$

Il Σ nella seconda e nella terza espressione di $\cos.[N'(\psi' - \varepsilon' \sin.\psi')]$ è $\Sigma_{n'=-1}^{n'=\infty}$; nella quarta è $\Sigma_{n'=-1}^{n'=\infty} \Sigma_{s=0}^{s=\infty}$. Il passaggio da questa alla (108) vuole il richiamo delle formole (1), (2) della prima Parte di questa Memoria; per esse si vede sciogliersi nel secondo membro la sommatoria riguardo ad s essendo i termini della serie rappresentata da quella sommatoria tutti zero tranne due soli nei quali s soddisfa alle equazioni

$$n' + 1 - 2s - N' = 0\,; \quad n' + 1 - 2s + N' = 0.$$

Quindi nella (108) il Σ significa ancora semplicemente $\Sigma_{n'=-1}^{n'=\infty}$, e così pure nelle (109), (111); ma per la riflessione fatta poi dall'Autore, il Σ della (111) può ritenersi $\Sigma_{n'=N'-1}^{n'=\infty}$.

Per la (118) conviene richiamare le (28).

Per le seguenti osservazioni sul valore di P si rilegga il testo dalla equazione (86) alla (90) e si vedrà che sono quelle stesse trasformazioni che debbono essere ripetute in questo luogo.

XVIII.A

pag. 160. *D'altronde per grandissimi valori di* n - - -

Questa formola è dimostrata dal Legendre negli *Exercices de calcul intégral*, 2.e Partie pag. 290, et 3.me Partie pag. 347. Veramente ivi trovasi per n comunque grande o piccola

$$(nn) \qquad \Gamma(n+1) = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}\,(1 + s)$$

essendo

$$(oo) \qquad s = \frac{1}{12\,n} + \frac{1}{288\,n^2} - \frac{139}{51840\,n^3} - \frac{571}{2488320\,n^4} + \text{ecc.}\,;$$

ma se mettasi $n\Gamma(n)$ per $\Gamma(n+1)$ e dividasi l'equazione per n, diventa manifesto, nel caso di n grande, quanto è asserito nel testo.

(*) Vedi questi Opuscoli. T. I.° pag. 88 formole (ζ).

L'equazione che segue non ha difficoltà per chi si rammenta una delle formole relative al trascendente *gamma* (*).

La frazione $\dfrac{\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(n+1)\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$, mettendo per $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)$ l'espressione equivalente (**)

$$\frac{\Gamma(2n)}{\Gamma(n)}\,\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)2^{1-2n}, \quad \text{diventa} \quad \frac{\Gamma(2n)}{n(\Gamma(n))^2}\,2^{1-2n}$$

la quale per l'applicazione della formola del testo si trova dopo varie riduzioni equivalente all'espressione

$$\frac{1}{\sqrt{n\pi}}\left(1-\frac{1}{2^3 n}+\frac{1}{2^7 n^2}+\frac{5}{2^{10} n^3}+\text{ecc.}\right)$$

ove si vede qual è il valore di s che diventa semprepiù piccolo al crescere di n.

Si poteva giungere prontamente al risultato del testo facendo uso della formola (31) alla pag. 10 del T. I.° degli *Exercices de mathématiques* dello stesso sig. Cauchy. Avvertiamo a questo proposito che la formola precedente la (31) ora citata deve avere nel secondo membro $r-\frac{1}{2}$ per esponente di r, e non $r+\frac{1}{2}$, come nella formola (8) pag. 91 del Tomo II.° della stessa Opera. In quest'ultimo luogo si cita la formola (152) della Memoria dello stesso Autore *sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires*; ed ivi pure dovrebbesi fare la stessa rettificazione.

Il teorema qui usato dall'Autore per decidere della convergenza della serie trovasi a pag. 95 del suo *Calcolo differenziale* [leçon dixième, formule (25)].

La radice (n)*esima* della (126) può scriversi

$$\theta\left(\frac{1}{2n}\right)^{\frac{1}{2n}}\left(\frac{8}{\pi(1-\theta)}\right)^{\frac{1}{2n}}$$

espressione che diventa semplicemente θ per $n=\infty$, giacchè $x^x=1$ quando $x=0$ (***).

Il resto della (124) è prossimamente nella ipotesi dell'Autore

$$2\left(\frac{1}{n\pi(1-\theta)}\right)^{\frac{1}{2}}\left\{\theta^n\cos.n\delta+\theta^{n+1}\cos.(n+1)\delta+\theta^{n+2}\cos.(n+2)\delta+\text{ecc.}\right\}.$$

La serie infinita può sommarsi (****), e dà il risultato del testo.

XIX.^A

pag. 161. *Si avrà d'altronde* - - -

Nella (130) Σ è $\Sigma_{k=0}^{k=\infty}\ \Sigma_{l=0}^{l=\infty}$; così anche nella (131).

Ecco le formole generali per lo svolgimento di $\cos.k\delta$ in una serie finita ordinata secondo le potenze di $\cos.\delta$, essendo k numero intero

$$\cos.k\delta=K_0\cos.^k\delta+K_1\cos.^{k-1}\delta+\text{- - -}+K_h\cos.^{k-h}\delta+\text{- - -}+K_k\cos.^0\delta$$
$$=\Sigma_{h=0}^{h=k}K_h\cos.^{k-h}\delta$$

(*) Vedi questi Opuscoli. T. I.° pag. 186, formola (g).
(**) Vedi questi Opuscoli. T. I.° pag. 190, formola (s).
(***) Veggasi lo stesso *Calcolo differenziale* del sig. Cauchy pag. 45, formule (23).
(****) Vedi in questi Opuscoli T. I.°, pag. 176, il valore di $R_1(n, p)$.

$$(pp) \qquad K_h = \frac{2^{k-h-1} k \Gamma\left(k - \frac{h}{2}\right)}{\Gamma(k-h+1)\Gamma\left(\frac{h}{2}+1\right)} \cos.\frac{h}{2}\pi .$$

$$\cos.k\delta = H_0 \cos.^0\delta + H_1 \cos.\delta + \text{- - - -} + H_h \cos.^h\delta + \text{- - - -} + H_k \cos.^k\delta$$
$$= \Sigma_{h=0}^{h=k} H_h \cos.^h\delta$$

$$(qq) \qquad H_h = \frac{2^{h-1} k \Gamma\left(\frac{k+h}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-h}{2}+1\right)\Gamma(h+1)} \cos.\frac{k-h}{2}\pi = K_{k-h} .$$

Questi valori di K_h, K_{k-h} possono dedursi per induzione delle formole note (*); e possono anche dimostrarsi direttamente per mezzo dell'equazione a differenze finite e parziali

$$H_{k+2,h+1} - 2H_{k+1,h} + H_{k,h+1} = 0$$

che trovasi aver luogo a motivo della equazione identica

$$\cos.\delta\cos.k\delta = \frac{1}{2}\cos.(k+1)\delta + \frac{1}{2}\cos.(k-1)\delta .$$

Ommettiamo per brevità il calcolo qui accennato, e ci accontentiamo di osservare: 1.° che la (qq) si cava prontamente dalla (pp) mediante la trasformazione della sommatoria: 2.° che l'introduzione del coseno ci dispensa dalla condizione posta nel testo per l'alternativo annullamento dei coefficienti; 3.° che il non potere la serie contenere potenze di $\cos.\delta$ superiori a k e inferiori a zero è un teorema che leggesi nelle stesse formole: talchè quand'anche la sommatoria si estendesse all'infinito le formole non cesserebbero d'esser vere.
A motivo della prima formola (s) della Nota X.ª la (qq) riducesi

$$(rr) \qquad K_{k-h} = 2^h \cdot \frac{k}{k+h}\left(\frac{k+h}{2}\right)_h \cos.\frac{k-h}{2}\pi$$

e questa combina colla (136), tranne l'esservi $\cos.\frac{k-h}{2}\pi$ invece di $(-1)^{\frac{k-h}{2}}$ affinchè si annullino di lor natura i coefficienti che debbono essere zero.

Nella (137) Σ è $\Sigma_{k=0}^{k=\infty}\Sigma_{l=0}^{l=\infty}\Sigma_{h=0}^{h=k}$; e l'ultima sommatoria può anche definirsi fra $h=0$, $h=\infty$.

XX.ª

pag. 163. *Si avrà d'altronde - - -*

Dal binomio di Newton cavasi la formola generale

$$(ss) \qquad (AL+BM)^m = \Sigma_{i=0}^{i=\infty}(m)_i A^{m-i} B^i L^{m-i} M^i ;$$

essendo m numero intero e positivo.
Da questa la (138) ponendo $m=l$, $A=\varepsilon'$, $B=(-1)\varepsilon$, $L=\cos.\psi'$, $M=\cos.\psi$.
Il valore di $\cos.\delta$ può mettersi sotto la forma

$$\cos.\delta = AL + BM$$

(*) Vedi Lacroix. *Traité du Calcul.* T. I.er pag. 80.

essendo

$$A = \sin.(p - \varpi)\,, \quad B = \cos.(p - \varpi)$$

$$L = \cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\,0}\ \cos.(p' - \varpi') + \cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\ \sin.(p' - \varpi')$$

$$M = \cos.\Delta_{0,\,0}\ \cos.(p' - \varpi') + \cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\ \sin.(p' - \varpi')\,,$$

quindi se si fa $m = h$, $i = g$, la (ss) dà la (140).

Le due formole seguenti, per cui la (140) si muta nella (141), sono ancora due nuove applicazioni della (ss). La seconda di esse dovrebbe avere il secondo membro sotto la forma

$$\Sigma_{t=0}^{t=\infty} (h-g)_t \cos.^t \Delta_{\frac{\pi}{2},\,0}\ \cos.^{h-g-t} \Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\ \cos.^t (p' - \varpi')\ \sin.^{h-g-t} (p' - \varpi')\,.$$

Si trasformi la sommatoria ponendo $t = g' - j$ con g' nuova variabile, e si avrà come sul testo. La nuova sommatoria comincerebbe da $g' = j$; ma può cominciarsi da $g' = 0$, giacchè $(h-g)_{g'-j}$ è zero pei valori di g' inferiori ad j, quando $h-g$ sia quantità positiva. Si richiede questa condizione, perchè essendo insieme negativo l'indice al piede, e la quantità sotto le parentesi, si dà un caso di non eguaglianza a zero: abbiamo $(-k)_{-k} = 1$, e si prova colla prima formola (s) della Nota X.ª. Avventuratamente è qui sempre $h-g$ quantità positiva, ossia $g < h$; il che nel testo è detto più tardi, e si può conoscere fino da questo luogo non dando alle sommatorie maggior estensione di quella che loro si conviene. Ponemmo nella (ss) il secondo limite infinito per preparare l'intelligenza di quanto l'Autore dice in seguito circa le espressioni (159); ma è chiaro che, essendo m intera, la sommatoria nella (ss) poteva scriversi $\Sigma_{i=0}^{i=m}$; quindi nella (140) Σ starebbe per $\Sigma_{g=0}^{g=h}$, da cui si vede che $g < h$. Così il Σ nella (142) è $\Sigma_{g=0}^{g=h}\ \Sigma_{j=0}^{j=g}\ \Sigma_{g'=0}^{g'=h-g}$.

Pel passaggio dalla (141) alla (142) si debbono richiamare le formole (21).

L'espressione $(h)_g\,(g)_j\,(h-g)_{g'-j}$, usando la prima (s) della Nota X.ª, si riduce

$$(tt) \qquad (h)_g\,(g)_j\,(h-g)_{g'-j} = \frac{1}{\Gamma(j+1)\,\Gamma(g-j+1)\,\Gamma(g'-j+1)} \cdot \frac{\Gamma(h+1)}{\Gamma(h-g-g'+j+1)}$$

la quale per due formole note (*) diventa quella del testo. Bisogna notare che $h-g-g'+j+1$ può scriversi $h-j-(g-j)-(g'-j)+1$.

Nella (145) Σ significa

$$(uu) \qquad \Sigma_{k=0}^{k=\infty}\ \Sigma_{l=0}^{l=\infty}\ \Sigma_{h=0}^{h=k}\ \Sigma_{i=0}^{i=l}\ \Sigma_{g=0}^{g=h}\ \Sigma_{j=0}^{j=g}\ \Sigma_{g'=0}^{g'=h-g}\,.$$

Nelle (148), (149) i segni Σ sono rispettivamente $\Sigma_{\lambda=0}^{\lambda=g}\ \Sigma_{\mu=0}^{\mu=\infty}$, $\Sigma_{\lambda'=0}^{\lambda'=g'}\ \Sigma_{\mu'=0}^{\mu'=\infty}$.

Nelle (150), (151) i segni Σ sono rispettivamente

$$(vv) \qquad \begin{array}{l} \Sigma_{\lambda=0}^{\lambda=g}\ \Sigma_{\mu=0}^{\mu=\infty}\ \Sigma_{\varsigma=0}^{\varsigma=\infty}\ \Sigma_{\rho=0}^{\rho=\infty}\ \Sigma_{\nu=0}^{\nu=\infty} \\ \Sigma_{\lambda'=0}^{\lambda'=g'}\ \Sigma_{\mu'=0}^{\mu'=\infty}\ \Sigma_{\varsigma'=0}^{\varsigma'=\infty}\ \Sigma_{\rho'=0}^{\rho'=\infty}\ \Sigma_{\nu'=0}^{\nu'=\infty}\,. \end{array}$$

E nella (153) i segni Σ sono

$$(ww) \qquad \Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\,, \quad \Sigma_{\upsilon=0}^{\upsilon=\infty}\,.$$

Siegue una trasformazione la quale esige che si rammenti essere $-1 = e^{\pi\sqrt{-1}}$.

(*) Vedi questi Opuscoli T. I.°, pag. 186, formole (h), (i).

Osservando le espressioni simboliche (uu), $(\nu\nu)$, (ww) si viene a capire che salirebbero al numero di diciannove le sommatorie significate dal Σ della (155); per minore complicazione l'Autore le distribuisce in tre formole. La (155) ovvero la (156) contiene le sommatorie per le variabili

$$k,\ h,\ i,\ g,\ g',\ j,\ l;$$

la (157) contiene quelle per

$$\lambda,\ \upsilon,\ \mu,\ \varsigma,\ \rho,\ \nu,$$

e la (158) quelle per

$$\lambda',\ \upsilon',\ \mu',\ \varsigma',\ \rho',\ \nu'.$$

Giova però qui osservare come più sopra in un luogo analogo [vedi Nota XIII.ª] che le lettere N', N, n, n' introdotte nelle (152), (154) come denominazioni di abbreviazione, passano ad essere considerate vere variabili; e che in conseguenza quattro sommatorie dovranno essere impiegate per esse con opportune trasformazioni, distruggendo la variabilità in quattro delle diciannove lettere registrate nella riunione (159).

Per gli antecedenti il lettore si persuaderà agevolmente di quanto è detto nel testo circa le differenze (160); ma egli forse come noi non giungerà a ricavarne che debbano essere $\mu < h$, $\mu' < h+l+1$. Ciò però non fa alcun difetto pel progresso della Memoria; giacchè le μ, μ', cui le antecedenti sommatorie lasciano il corso da zero all'infinito, prendono poi la restrizione marcata del nostro Autore, non potendo rispettivamente passare n, n'. È questa una conseguenza dell'avere considerate n, n' variabili semplici invece di altre due, tali cioè che nei calcoli dei diversi termini ricevano dal nostro arbitrio valori che si riguardano come dati. E non solo per questo motivo si fermano i corsi all'infinito delle μ, μ', ma quelli simili di tutte le altre variabili non per anco limitate nelle precedenti sommatorie: tranne quello dell'unica k. Osserveremo per la (161) che veramente dalla (157) si desumono

$$g+i+\mu-\lambda \overset{=}{\gtrless} \rho\,; \qquad h+\nu-g \overset{=}{\gtrless} \varsigma$$

$$g+i+1+\mu-\lambda \overset{=}{\gtrless} \rho\,; \qquad h+\nu-g-1 \overset{=}{\gtrless} \varsigma\,.$$

Sommando le due prime relazioni si ha lo stesso risultato, che sommando le due ultime, cioè

$$\nu+h+i+\mu-\lambda \overset{=}{\gtrless} \rho+\varsigma$$

come sul testo.

Ciò che è detto di λ, υ per riguardo alle espressioni (165), (166), dipende dalla (163), ritenuto che N, N' possono prendere valori negativi.

XXI.ª

pag. 167. *Per mostrare un'applicazione* - - -

Per capire le (172), (173) conviene richiamare le (18) e la (116).

Considerata la (156) ove D entra come fattore, è facile accorgersi, che pel caso di cui si parla, P non ha valori se non quando $D=1$; il che importando le due equazioni $g=g'=j$, vengono così a togliersi due delle sommatorie delle quali è composto il Σ della stessa (156). Vedremo fra poco altro caso in cui se ne tolgono tre. Che poi essendo $g=g'=j$, l'espressione $(h)_{j,\,g-j,\,g'-j}$ riducasi $(h)_g$, s'intende richiamando la (tt) della Nota precedente e la prima (s) della Nota X.ª. Il fattore $(-1)^g$ nasce nella (174) per aver sciolto $\cos.(NT+N'T'+g\pi)$ nella quantità equivalente

$$\cos.(NT+N'T')\cos.g\pi - \sin.(NT+N'T')\sin.g\pi$$

e per essere $\sin.g\pi=0$, $\cos.g\pi=(-1)^g$.

Che debbano essere

$$n \gtreqless \sqrt{N^2} - h\,; \qquad n' \gtreqless \sqrt{N'^2} - h$$

potrà ricavarsi come conseguenza del già detto sul conto delle espressioni (165), (166). Osservisi che h è variabile mentre $\sqrt{N^2}$, $\sqrt{N'^2}$ hanno valori fissi, e si conoscerà possibile quella riduzione di n, n' a zero o all'unità.

Si esaminano in particolare i casi di $n=0$, $n'=0$, pei quali ha luogo una grande semplificazione nei valori di $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ scomparendo quattro sommatorie per ciascheduno. Le equazioni di condizione che accompagnano le (176), (178) si desumono dalle (163).

XXII.[A]

pag. 168. *D'altra parte se si pone - - -*

Prosegue l'Autore a percorrere alcuni casi nei quali si hanno con molta semplicità i valori di $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$.

Per $N=n+h$ la prima delle (163) dà

$$\lambda+\upsilon+\rho+\varsigma=0$$

ossia $\lambda=0$, $\nu=0$, $\rho=0$, $\varsigma=0$; ammesse le quali, la prima delle (164) dà

$$(aaa) \qquad \nu+\mu+i=n.$$

La (181) deriva dalla (157) a colpo d'occhio: ritengasi che nella (181) Σ è sommatoria doppia per le variabili μ, ν.

Non è sì ovvio il ragionamento per l'altro caso $N=-n-h$. Eccolo.

Le (163), (164) danno

$$(bbb) \qquad \lambda+\upsilon+\rho+\varsigma=n+h$$

$$(ccc) \qquad \lambda+\upsilon+(\nu+h+i+\mu-\lambda)-(\rho+\varsigma)=0.$$

In questa seconda per la (161)

$$\nu+h+i+\mu-\lambda \gtreqless \rho+\varsigma\,;$$

dunque è forza, perchè l'equazione abbia qualche caso in cui sia vera, che siano $\lambda=0$, $\upsilon=0$. Così la (bbb) riducesi

$$(ddd) \qquad \rho+\varsigma=n+h$$

per la quale e per la (ccc) vedesi subito che anche in questo secondo caso ha luogo la (aaa).

Usando questa (aaa) e osservando essere $(-n-h)^{\nu-1}=(-1)^{\nu-1}(n+h)^{\nu-1}$, la (157) diventa

$$\mathcal{C}=\Sigma[h]_\mu\left\{(-1)^{\varsigma+\nu}(n+h)(g+n-\nu)_\rho(h+\nu-g)_\varsigma-(-1)^{\varsigma+\nu-1}\nu(g+n-\nu+1)_\rho(h+\nu-g-1)_\varsigma\right\}\frac{(n+h)^{\nu-1}}{1\cdot 2\cdots\nu}$$

dove la sommatoria è quadrupla per le quattro variabili μ, ν, ρ, ς. Due però di queste, cioè le due ultime, si vedono sparire dopo il seguente discorso. Abbiamo

$$(eee) \qquad (g+n-\nu)_\rho(h+\nu-g)_\varsigma=\frac{\Gamma(g+n-\nu+1)\Gamma(h+\nu-g+1)}{\Gamma(g+n-\nu+1-\rho)\Gamma(h+\nu-g+1-\varsigma)\Gamma(\rho+1)\Gamma(\varsigma+1)}\,;$$

eliminando ρ nel primo dei Γ del denominatore mediante la (ddd), trovasi che esso denominatore ha per fattore la quantità

$$\Gamma(g-\nu+1-h+\varsigma)\Gamma(h+\nu-g+1-\varsigma)$$

ossia ponendo

$$(fff) \qquad \tau=g-\nu-h+\varsigma,$$

la quantità

$$\Gamma(1+\tau)\Gamma(1-\tau)$$

che è sempre infinita per tutti i valori di τ, tranne il solo caso in cui $\tau=0$: Adunque combinata la (fff) colla (ddd), si vede che $(g+n-\nu)_\rho(h+\nu-g)_\varsigma$ è sempre zero fuori di quando si combinano i due unici valori

$$\varsigma=\nu+h-g\,;\quad \rho=n-\nu+g.$$

Per questi il secondo membro della (eee) riducesi visibilmente all'unità, e il fattore

$$(-1)^{\varsigma+\nu}=(-1)^{2\nu+h-g}=(-1)^{h-g}.$$

Similmente abbiamo

$$(ggg)\qquad (g+n-\nu+1)_\rho(h+\nu-g-1)_\varsigma=\frac{\Gamma(g+n-\nu+2)\Gamma(h+\nu-g)}{\Gamma(g+n-\nu+2-\rho)\Gamma(h+\nu-g-\varsigma)\Gamma(\rho+1)\Gamma(\varsigma+1)}\,;$$

dove il denominatore contiene un fattore, che dopo l'eliminazione di ρ, riesce

$$\Gamma(g-\nu+2-h+\varsigma)\,\Gamma(h+\nu-g-\varsigma)$$

ossia, fatta

$$\tau=g-\nu-h+\varsigma+1\,;$$

$$\Gamma(1+\tau)\,\Gamma(1-\tau)$$

quantità sempre infinita se non è $\tau=0$. Qui pertanto i due unici valori di ς, ρ che non rendono zero il primo membro della (ggg) sono

$$\varsigma=\nu+h-g-1\,;\quad \rho=n-\nu+g+1\,;$$

essi lo rendono eguale all'unità, come vedesi pel secondo membro. Si ha inoltre

$$(-1)^{\varsigma+\nu-1}=(-1)^{2(\nu-1)+h-g}=(-1)^{h-g}.$$

Dopo tutto il sin qui esposto diventa chiara la riduzione del valore di $\mathfrak{C}$ al secondo membro della (182): ivi la sommatoria è doppia per le variabili μ, ν, talchè non havvi altra diversità dal valore di $\mathfrak{C}$ della (181) che nel fattore $(-1)^{h-g}$.

Non diamo la dimostrazione delle (185), (186), essendone l'andamento in tutto simile al sin qui tracciato.

Ecco la dimostrazione della (187). Essendo $n=1$, $i=0$ la prima delle (154) dà

$$\nu+\lambda+\mu+2\upsilon=1\,;$$

riflettendo sulla quale si comprende che υ è necessariamente zero, e le altre tre variabili ammettono le tre sole combinazioni

$$\nu=1,\ \lambda=0,\ \mu=0;\quad \nu=0,\ \lambda=1,\ \mu=0;\quad \nu=0,\ \lambda=0,\ \mu=1.$$

Si applichino queste l'una dopo l'altra alla (157) desumendo ogni volta l'equazione di condizione dalla prima delle (163), avremo

$$\begin{aligned}\mathfrak{C}=\Sigma(-1)^\varsigma N(g)_\rho(h+1-g)_\varsigma-\Sigma(-1)^\varsigma(g+1)_\rho(h-g)_\varsigma\,; &\qquad \rho+\varsigma=\frac{1+h-N}{2}\\ -4\Sigma g(-1)^\varsigma(g-1)_\rho(h-g)_\varsigma\,; &\qquad 1+\rho+\varsigma=\frac{1+h-N}{2}\\ +\ \Sigma h(-1)^\varsigma(g+1)_\rho(h-g)_\varsigma\,; &\qquad \rho+\varsigma=\frac{1+h-N}{2}\end{aligned}$$

essendo nei quattro termini le sommatorie doppie per ρ e per ς. Volendo che l'equazione di condizione sia la stessa per tutti i termini, conviene trasformare la sommatoria del terzo

per quella parte che riguarda ρ, ponendo $1+\rho=t$ nuova variabile, e poi ad operazione finita restituendo ρ per t. Allora per la compenetrazione di due termini si ha il risultato del testo. Veramente la sommatoria trasformata comincerebbe da 1 e non da zero, e facendola cominciare da zero vi sarebbe pel caso di $g=0$ la quantità $(-1)_{-1}$ che non è zero (vedi Nota XII.ª); ma siccome g è anche fattore, quel termine svanirebbe per questa ragione. Riteniamo dunque eguale per tutti i termini della (187) il principio delle sommatorie.

Per $n=1$, $i=1$ si ha dalle (154)

$$\nu+\lambda+\mu+2\upsilon=0$$

cioè $\nu=0$, $\lambda=0$, $\mu=0$, $\upsilon=0$, colle quali il mutarsi della (157) nella (189) è manifesto. Ommettiamo la dimostrazione delle (190), (192) essendo affatto simile a quella delle (187), (189).

XXIII.ª

pag. 169. *Conviene osservare* - - -

Si passa a mostrare una semplificazione nelle sommatorie della (156) che ne fa sparire tre, cioè quelle per g, g', j.

Per dimostrare la (193) scriviamone il secondo membro sotto la forma

$$\left\{\left(\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\sqrt{-1}\right)+\left(\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\sqrt{-1}+\cos.\Delta_{0,0}(-1)\right)\right\}^h$$

riducendo il quadrinomio a due binomj, che per un momento chiamiamo A, B. Allora la formola (ss) della Nota XX.ª ove facciasi $L=1$, $M=1$ ci fa capire che il secondo membro della (193) eguaglia

$$\Sigma_{g=0}^{g=\infty}(h)_g\left[\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\sqrt{-1}\right]^{h-g}\left[\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\sqrt{-1}+\cos.\Delta_{0,0}(-1)\right]^g.$$

Due successive applicazioni della stessa (ss) ci danno

$$\left[\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\sqrt{-1}+\cos.\Delta_{0,0}(-1)\right]^g=\Sigma_{j=0}^{j=\infty}(g)_j\cos.^j\Delta_{0,0}\cos.^{g-j}\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}(-1)^{j+\frac{g-j}{2}}$$

$$\left[\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\sqrt{-1}\right]^{h-g}=\Sigma_{g'=0}^{g'=\infty}(h-g)_{g'-j}\cos.^{g'-j}\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\cos.^{h-g-g'+j}\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}(-1)^{\frac{g'-j}{2}}.$$

E tutte queste equazioni insieme riducono il secondo membro della (193) identico col primo. Non ci fermiamo sulle (194), (195), (196) che si dimostrano in maniera del tutto simile.

Bisogna notare che le quattro $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$ si hanno facilmente perchè i primi membri delle (197), (198) sono fatti di quantità tutte costanti e supposte note fin da principio: se si eccettui l'esponente h.

Le (193), (196), a motivo della

$$(hhh)\qquad (-1)^{\frac{g+g'}{2}}=\cos.\frac{\pi(g+g')}{2}+\sin.\frac{\pi(g+g')}{2}\sqrt{-1}$$

e delle denominazioni (197), (198), danno l'eguaglianza dei primi ai terzi membri delle (199), (200). L'eguaglianza dei primi ai secondi membri in queste medesime (199), (200) si riconosce col solo por mente alla precedente (hhh) e alle due seguenti

$$(-1)^{g+g'}(-1)^{\frac{g+g'}{2}}=(-1)^{2(g+g')}(-1)^{-\frac{g+g'}{2}}=\cos.\frac{\pi(g+g')}{2}-\sin.\frac{\pi(g+g')}{2}\sqrt{-1}$$

$$(-1)^{g'}(-1)^{\frac{g+g'}{2}}=(-1)^{2g'}(-1)^{g}(-1)^{-\frac{g+g'}{2}}=(-1)^{g}\cos.\frac{\pi(g+g')}{2}-(-1)^{g}\sin.\frac{\pi(g+g')}{2}\sqrt{-1}.$$

L'utilità delle (199) nel calcolo della (156) vedesi prontamente scomponendo

$$\cos.\left(NT + N'T' + \pi\frac{g+g'}{2}\right),$$

cioè mettendo per questa la quantità identica

$$\cos.(NT + N'T')\cos.\frac{\pi(g+g')}{2} - \sin.(NT + N'T')\sin.\frac{\pi(g+g')}{2}.$$

XXIV.[A]

pag. 170. *Ciò posto, la parte di* P - - -

L'Autore combina gli ultimi insegnamenti per facilitare il calcolo della (156) coll'analisi già data di quattro casi nei quali i valori di $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ si hanno con molta semplicità.

1.° Caso $N = n + h$, $N' = n' + h$;

la (156) si riduce alla (202) col segno — fra le ultime due parentesi. In questa il segno Σ è diminuito delle tre sommatorie risguardanti g, g', j.

2.° Caso $N = -n - h$; $N' = -n' - h$;

il prodotto $\mathcal{C}\mathcal{C}'$ dovrebbe essere quello dei secondi membri delle (182), (186). Volendo conservare per $\mathcal{C}$, $\mathcal{C}'$ i valori (181), (185), dobbiamo tener conto a parte del fattore $(-1)^{2h-g-g'} = (-1)^{g+g'}$; di qui pei secondi membri delle (199) vedesi la cagione che fa comparire il segno + nelle ultime parentesi della (202).

3.° Caso $N = -n - h$; $N' = n' + h$;

il prodotto $\mathcal{C}\mathcal{C}'$ dovrebbe essere col valore di $\mathcal{C}$ dato dalla (182); prendendo invece quello della (181), abbiamo a considerare a parte il fattore $(-1)^{h-g} = (-1)^{-h}(-1)^{g}$. Di quest'ultima espressione il primo fattore $(-1)^{-h}$ fa sì che l'esponente $i + \frac{k+h}{2}$ di -1 diventa nella (204) $i + \frac{k-h}{2}$; e l'altro fattore $(-1)^{g}$ ci rende avvertiti che debbonsi in questo caso adoperare i secondi e terzi membri delle (200).

Il 4.° Caso $N = n + h$, $N' = -n' - h$

cui corrisponde il segno — nelle ultime parentesi della (204), ha un'ovvia spiegazione dopo il fin qui detto: si osservi che allora si adoperano i primi e terzi membri delle (200).

Le sommatorie nelle (213) sono doppie cioè rispettivamente per μ, ν; μ', ν'. La prima delle (214) ci fa vedere che i non può ricevere che i due valori *zero*, 1. Quando è zero, tra μ, ν hanno luogo le due sole combinazioni $\mu = 0$, $\nu = 1$; $\mu = 1$, $\nu = 0$; quando è l'unità, si ha l'unica combinazione $\mu = 0$, $\nu = 0$.

Passando dalla (212) al sistema delle (215), (216) si scioglie la sommatoria per la parte che riguarda la variabile i, rammentandoci non darsi per i che i due valori *zero*, 1. Così la (215) non ha sommatoria, e la (216) ha soltanto una sommatoria doppia per l, ν'. Il limite della sommatoria per l è 5, perchè vedemmo essere al più $l = n + n'$; i limiti delle sommatorie per ν' si riconoscono facilmente dagli indici posti al piede delle espressioni simboliche componenti i diversi valori di L: espressioni che diventano zero quando tali indici riescono negativi.

Il raddoppiamento di ciascun termine fatto dall'Autore prima di scrivere la (217) s'attiene all'osservazione posta nel testo dopo la (211).

(sarà continuato)

Continuazione e fine della Memoria *SULLA GRANDINE* di ANGELO BELLANI
(Vedi Tomo II.°, Fascicolo I.°, pag. 85).

ARTICOLO III.

Della causa che produce il freddo sufficiente a congelare in aria la pioggia.

Se dalla costituzione fisica della grandine ho potuto tirare la conseguenza ch'essa è formata da vapori prima convertiti in acqua e in gocce al tutto simili a quelle che cadono in ogni stagione e nei temporali stessi, egli ne segue che la grandine è una pioggia gelata; ma a rintracciare la vera causa di questa congelazione ci mancano le osservazioni dirette, nè pare possibile che queste si possan fare entro quel tenebroso e tremendo laboratorio dell' atmosfera, per cui non si può proporre che un ipotesi, la quale però mi studierò di convalidare con altri fatti già conosciuti ed ammessi.

Se dissi che la grandine ha avuto origine da una pioggia d'acqua, ben s'intende che il freddo generatore di quel ghiaccio si deve trovare in uno strato dell'atmosfera inferiore a quello in cui si è formata la pioggia.

In due diverse anzi opposte circostanze si presenta per lo più il fenomeno della grandine, cioè o d'estate tanto nei climi freddi come nei temperati e caldi, o d'inverno nei soli climi freddi, o sopra le più alte montagne. Io intendo specialmente di trattare della prima specie di grandine che è la più universale, la più frequente, la più grossa e la più dannosa, e che è sempre preceduta e accompagnata da grande sviluppo di elettricità, perchè della seconda mi pare che si possa dar una più semplice spiegazione senza supporre il concorso dell' elettricità almeno in notabil grado. Si ammette in fatti generalmente che la pioggia derivi dalla mescolanza di due arie di diversa temperatura e prossime alla saturazione di vapori. Ora se avvenga (come la gravità specifica anche vi favorisce) che una corrente d'aria men fredda sia la superiore, l'acqua che si produrrà per precipitazione nella media temperatura che ne risulta dalla mescolanza delle due arie, cadendo nel sottoposto strato d'aria che ancora ritiene della sua temperatura più fredda, quando quella sia d'una certa altezza e questa anche molto sotto il termine della congelazione, potrà quell'acqua agghiacciarvisi prima di giungere a terra. Ecco perchè ha luogo tale fenomeno nei paesi più settentrionali o sopra le più alte montagne. Musschembroeck avea notato che ad Utrecht per lo spazio di 29 anni la grandine era più rara in estate che in inverno. De Saussure (*Voyages dans les Alpes*, §. 2075) dice essere un fatto ben rimarcabile la frequenza della grandine, o almeno del *grésil* sulle alte montagne. Questo non succede nei paesi più temperati per la mancanza di quegli inferiori strati sufficientemente freddi; come non succede grandine neppur d'estate sotto i tropici, se si eccettuino le più alte montagne. Humboldt (*Quadro fisico delle regioni*

equinoziali) dice che copiosa è la grandine a 3000 metri d'altezza sulle Ande, e che sopra a 3900 metri la grandine cade mista a fiocchi di neve, ed anche di notte. Al dire di Beccaria (*Elettricismo atmosferico*, §. 184) in Sicilia in cinque anni non aveva osservati che alcuni temporali in autunno, e questi in Sardegna principiare verso la metà di autunno. Il prof. Tholard (*Esposizione degli effetti dei paragrandini*) aggiunge che nei Pirenei un'abbondanza di neve nell'inverno è annunziata da gravi scoppj di tuono (1). Gay Lussac (*Sulla formazione delle nubi temporalesche. Annal. de Chim. et Phys.* T. VIII, pag. 165) attesta aver veduto in Francia molte volte in inverno una neve abbondante essere accompagnata da uno o due colpi di tuono. Ma più vicino al polo dove il freddo è sempre intensissimo, non potrà neppur aver luogo in nessuna stagione la grandine, come attesta Scoresby, perchè ivi i vapori dacchè diventano visibili e cominciano a precipitarsi, non trovano temperatura sufficiente per conformarsi in gocciole d'acqua, nonostante il calorico latente che si rende libero, e per cui cadono sempre in forma di neve con tale frequenza che in dieci giorni quel Viaggiatore ne calcola nove con neve (*Annales de Chim. et Phys.* T. XVIII, p. 37).

È generale opinione ammessa anche dal Volta che quelle nubi cenericcie che si staccano dal nero telone del nembo temporalesco siano quelle apportatrici di grandine (2). È anche generale osservazione cadere sulla cima degli alti monti la grandine più piccola che non nelle valli e nelle pianure. Molte persone di criterio, e che hanno osservato con riflessione, assicurano essersi trovate sulle alte cime dei monti, in occasione che sotto ai loro piedi si formava un temporale con grandine, mentre sopra il loro capo ed all'intorno a quella medesima altezza era sereno il cielo e risplendeva il sole. Non è raro il caso, e da nessuno contrastato, che può nevicare in alto e piovere al basso contemporaneamente; ma è anche altresì certo che può piovere e nevicare al basso e non all'alto sui monti.

L'aspetto fulminante del cielo e l'impeto dei venti impediranno sempre all'uomo più coraggioso di potersi recare in un globo aerostatico in mezzo alla sede del temporale, e siccome per quanto sarò per soggiungere, neppure sulla cima dei monti si può essere spettatore di questa terribile scena, quantunque la sede del temporale possa essere a minore altezza, altro non rimarrebbe per

(1) Non dovrebbe dunque far meraviglia se anche in Milano abbia potuto scoppiare un fulmine l'ultimo giorno del 1831, in cui cominciò a nevicare abbondantissimamente; anzi è meraviglia come non sieno anche nell'Italia settentrionale frequenti que' temporali d'inverno, che si osservano nell'Italia meridionale, e specialmente in vicinanza del mare.

(2) Non è già che questo colore sia loro proprio, dipendendo dalla diversa riflessione della luce e dal passaggio di questa più o meno impedito; perchè quello stesso nero telone osservato dall'alto di un monte che vi sovrasti, appare candidissimo illuminato dai raggi del sole, come De Luc (*Lettres phys. et morales sur les montagnes.* 1778, Lett. XIV) e Spallanzani (*Memorie di Matematica e Fisica*, T. II, Parte 2.ª) ci attestano. Seneca (*Natur. Quæst.* Lib. IV, cap. 6) diceva: *Quosdam peritos observandarum nubium esse affirmant, et prædicere cum grando futura sit: et hoc intelligere usu ipso potuisse, cum colorem nubium notassent, quem grando toties insequebatur.*

poter assicurarsi se veramente esista questo strato d'aria più freddo e interposto fra la terra e le nubi generatrici della pioggia, che di dirigervi mediante un cervo volante un termometro capace d'indicarne la temperatura. Il termometrografo per luoghi inaccessibili, da me descritto nel Giornale di Fisica di Pavia, T. IV. anno 1811, pag. 89, sarebbe forse il solo idoneo a questo uso sì per la facilità di costruirlo e di trasportarlo, come per quella di adattarlo al cervo volante col minor pericolo di rottura, riparato da una rete metallica o tubo di latta forato, sì per l'indicazione precisa del massimo e del minimo della temperatura nonostante qualunque urto o movimento brusco, e in qualunque direzione: ma dubito molto che in un temporale minaccioso si possa dirigere un cervo volante fino a penetrare in seno a quelle nubi, sì per la distanza grandissima dalla pianura dove unicamente si potrebbero fare le sperienze per aversi un libero campo, onde seguirne gli andamenti fra le variate direzioni dei venti, e sì pel pericolo di stabilire una comunicazione fulminea fra il cielo e la terra, come non rare volte è avvenuto, oltre alla difficoltà di sostenerlo in aria in mezzo ai venti turbinosi, e sotto la sferza della pioggia e della grandine. Ma anche superate tutte queste difficoltà, non si potrebbe poi distinguere se quel freddo indicato dallo stromento fosse dovuto direttamente alla nube che si suppone generatrice della grandine, oppure a quello semplicemente comunicato nel passaggio della grandine stessa.

De Luc (*Idées sur la météorologie,* 1787, §. 641) dopo aver spiegato come si formi la neve in una nube tutta egualmente raffreddata al termine almeno della congelazione, soggiunge che appunto per questa stessa ragione che si forma la neve non può supporre che anche la grandine si formi dall'unione di quei vapori stessi congelati. Ammette bensì un nocciolo nevoso nella grandine, ma oltre a quello egli non saprebbe come concepire la formazione di una massa solida di ghiaccio nel seno delle nubi. Al §. 642 dice, che antecedentemente era dell'opinione che la grandine avesse origine nelle regioni molto elevate dell'atmosfera, ma che di poi ha dovuto persuadersi, che le nubi temporalesche sono sempre molto basse, e che la loro parte superiore non si prolunga molto all'insù, sia che le abbia osservate dall'alto, sia ad una distanza sufficiente verso l'orizzonte: al §. 639 avea già premesso: « Quelle pioggie improvvise sogliono « essere presagite da nubi splendenti pe' raggi del sole sul più bell'azzurro del « cielo: alcuna di queste nubi *s'ingrossa allora enormemente* e s'abbassa. Altre « nubi si formano attorno a queste, e vi si riuniscono; l'aria si oscura come se « un telone fosse tirato davanti il cielo. Dall'alto delle montagne si vedono so- « venti tali nubi accumularsi rapidamente sulle pianure.... Un vento si leva « che soffia turbinoso, e finalmente sopraggiunge una pioggia a rovescio. »

Altri e fra questi anche il Volta avevano voluto arguire dal breve tempo che passa dall'apparizione del lampo al fragore del tuono, che la sede del temporale non fosse molto lontana, ma questa poteva essere un'illusione, perchè per quanto si stenda lontano il cammino percorso dal torrente elettrico, il primo scoppio del tuono che si fa sentire è sempre quello che parte dal luogo più

vicino allo spettatore, essendo come istantanea la velocità del fluido elettrico in paragone di quella del suono; di maniera che potrebbe ben partire da lontano il tuono e propagarsi vicino a noi, e così farci sentire molto più presto il fine che non il principio del tuono stesso.

Dissi che la causa che può produrre quel freddo quasi istantaneo risiede nel mezzo dell'atmosfera, e perde di sua intensità accostandosi alla terra o ai monti, per cui come vedremo non può mai succedere che nell' occasione di gelare l'acqua in seno alle nubi temporalesche, possa quel freddo propagarsi anche al suolo posto allo stesso livello sulle montagne, e far gelare l' acqua che vi si trovasse, e far succedere in somma quegli effetti che da un grande e subitaneo freddo ne potrebbero derivare.

Ma fra le cause che possono tendere a diminuire la temperatura nell' aria o nei vapori in modo sufficiente a far gelare rapidamente l' acqua in un' altezza inferiore a quella delle nevi perpetue, e nelle giornate ed ore più calde, io non trovo che la rarefazione ossia l' espansione dell'aria e dei vapori la quale possa dare un grado sufficiente di freddo, perchè nè l'evaporazione delle nubi, nè il loro irradiamento del calorico, nè il concorso di venti freddissimi può bastare. In due modi può succedere questa diradazione dell' aria: o per effetto di una colonna d' aria ascendente, che si porta a notabile altezza, come supponevano già altri dopo che Dalton fe' conoscere che quella rarefazione è efficacissima causa di freddo, ma in questa ipotesi non si possono supporre gocce d' acqua che cadano in uno strato inferiore più freddo, come ho posto per principio necessario della grandine: ovvero può aver luogo questo straordinario e parziale aumento di volume dell'aria vaporosa sotto la medesima pressione atmosferica per una forza espansiva di quel fluido elettrico che in ogni temporale più che mai si manifesta.

Gay Lussac (*Annales de Chim. et Phys.* T. IX, 1818, p. 305) fu indotto a conchiudere che la dilatazione dei fluidi aeriformi come mezzo frigorifico sia evidentemente molto superiore al cangiamento di stato dei solidi e dei liquidi, ed essere incontrastabile che col mezzo della loro dilatazione si possa produrre un freddo illimitato. Navier negli stessi Annali (Agosto 1821, T. IX, p. 378) asserisce anch' esso, che quanto al freddo prodotto per la dilatazione dei fluidi aeriformi non vi si può assegnare alcun limite. (Vedi anche *Annales de Chimie et Phys.* Avril 1822, p. 436. — *Bibl. Univ.* Mai 1822, p. 65. Avril 1823, p. 265).

Non è mio scopo il dimostrare come si formi la pioggia, perchè oramai da tutti i fisici si conviene intorno alla sua formazione, ma bensì mi resta a provare come l' elettricità possa essere la causa immediata del freddo generatore della grandine, e nel modo che io suppongo, cioè coll'espandere e rarefare quella massa d'aria vaporosa che investe.

Se nella spiegazione dei fenomeni naturali l' osservazione e l' esperienza ci devono sempre servire di sicura guida, io confido che l'una e l'altra concordi mirabilmente a stabilire che la vera causa di questo freddo straordinario sia

quella da me addottata. E per cominciare dalle osservazioni, quantunque i temporali sieno pur troppo frequenti per cui ciascuno può seguirne coll' occhio indagatore i diversi fenomeni che presentano, pure acciò nessuno mi possa accusare d' avere osservato colla mente preocupata, io non farò che citare alcuni dei principali osservatori, i quali pienamente confermano quanto fino dalla più rimota antichità era stato scritto, cioè che nei temporali massime grandinosi si ravvisa bene spesso una espansione ed una contrazione notabile e straordinaria in alcune nubi, specialmente allorquando mostrano di essere fortemente elettrizzate.

Cominciando dalla Bibbia (*Eccles.* Cap. XXXII, v. 14), e passando a Virgilio (*Georgic.* Lib. I, v. 417) e Tito Lucrezio (*De rerum natura.* Lib. VI, v. 113, 231, 454) a Bacone di Verulamio (*Prognostica ventorum,* N.° 55) fino a Musschenbroek (*Introductio ad Phil. natur. De Meteoris aqueis*) e da questi al padre Beccaria, la di cui celebrità sarebbe ancora molto grande se non fosse stata ecclissata da quella del Volta; tutti convengono di queste rapide espansioni delle nubi temporalesche. L' ultimo poi nella sua opera, che quasi tutta versa sui temporali (*Elettricismo atmosferico,* anno 1758), dice espressamente al §. 92: « Ecco un' altra osservazione che pare arrechi certezza ed evidenza. « Gli effetti del fulmine mostran che dove essi scoppiano fanno quasi istanta- « neamente un grande voto nell'aria. I pulmoni degli animali fulminati, flaccidi « e voti d'aria, senza mentovare molti altri effetti, ne sono una prova sufficiente. « Ora se le ampie scintille elettriche delle nuvole fanno un ampio voto, e per- « chè le piccole scintille elettriche non faranno un piccolo voto? Anzi e perchè « i piccoli fili di vapore elettrico che insensibilmente trascorre da uno in un « altro corpo, non faranno essi pure alcun piccolissimo voto dell'aria?

§. 93. « Ed ecco che quasi contro voglia mi vedo condotto a dover pure « azzardare qualche cosa intorno al modo con che operando il vapor elettrico « sull'aria, può cagionare gli accostamenti de' corpi inegualmente elettrici. « Imperocchè se il vapore diffondendosi da *A* che ne ha più in *B* che ne ha « meno, discaccia l'aria che è tra *A* e *B* ecc.

§. 108. « Ho osservato i nuvoli temporaleschi, che senza soffio di vento sen- « sibile, questi sorgono assai velocemente e a grande altezza, e che si vanno in « certo modo gonfiando.

§. 110. « Molte volte io ho veduto espandersi e addensarsi moltissimo, e « molto subitamente il ramo del nembo, senza che si unissero ad esso altri « estranei ed attuali nuvoli.

§. 114. « Merita di essere diligentemente osservato certo molto regolarissi- « mo sfilacciamento che avviene spessissimo nel nuvolo temporalesco, massime « verso il lembo di esso.

§. 116. « Allora il ramo del nembo pare si abbassi oltremodo, tutto il cielo « ampiamente si oscura; l' osservatore immerso nel nembo altro più non di- « scerne che pioggia, grandine, lampi, saette e tuoni.

§. 120. « Molte volte io ho veduto insorgere, a cielo bastantemente oscuro, i

« nuvoli arcuati apportatori de' temporali; ed in tale tempo io vedeva in essi « molto chiarissimamente, e il principio che internamente li moveva, e l'azione « del principio medesimo; vedeva frequentissimi lampi, e in niun conto stre- « pitosi, espandersi ampiamente per il loro corpo, e tutto internamente illumi- « narlo. Proporzionatamente alla vivezza maggiore e frequenza di tali lampi, « vedeva sollevarsi più velocemente que' nuvoloni, crescere di volume, in « certo modo gonfiarsi ed espandere, nel modo altrove descritto, sopra gli ag- « giacenti e lontani paesi. A proporzione che questi rami si espandevano io « vedeva abbujarsi la base di que' nuvoloni, e formarvisi il nembo e spandersi « più vivi e più frequenti lampi....

§. 133. « Ma inoltre dalla somma delle mie osservazioni, raccolgo alcun « lume intorno alla varia velocità con che si fanno i cambiamenti di elettricità; « imperciocchè talora la elettricità comincia a scemare gradatamente, poi manca « affatto per alcun tempo sensibile, poi compare cambiata in contrario, e va « crescendo gradatamente: per l'opposto altre volte in un' istante è vivissima « per eccesso, e nel seguente istante si fa vivissima per difetto o viceversa.... « Nè tacerò che qualche volta badando allo stato de' nuvoli nel tempo che « l'elettricità scemava e mancava per cambiarsi gradatamente, ho notato in « essi alcuna assai sensibile alterazione, vale a dire, ho talora osservato che in « tali circostanze i nuvoli pareva che si diradassero alquanto; ma avvivandosi « la elettricità contraria assai forte, i nuvoli come prima si abbujavano.

§. 138. « Non esservi alcuno che non fosse persuaso che la copia del fluido « elettrico in un temporale anche semplicissimo non fosse incredibilmente « grande.... D'altronde, questo che fuoco elettrico anche s'appella, non eser- « cita per sè stesso nella sua diffusione per l'atmosfera alcun calore sensibile, « anzi, come vedremo, tende in alcuni casi a diminuirlo.

§. 170. « Si propongono esperimenti più sensibili e diversi, dai quali si ve- « de, e come l'aria è spinta via dal luogo per cui attraversa una scintilla, e co- « me è spinta via per ogni verso.

§. 188. « I nuvoloni apportatori de' temporali, anche quando primamente « insorgono, si vedono a lampeggiare frequentemente, e si vedono a moversi, a « gonfiarsi, ad espandersi corrispondentemente alla forza, alla frequenza ed alla « direzione degli interiori loro lampi, cioè corrispondentemente al fuoco elet- « trico che entro ad essi discorre. »

Finalmente, per tacere di altri paragrafi, la Proposizione IX ha per oggetto di dimostrare che il *fuoco elettrico è desso che variamente addensa i nuvoli temporaleschi, è desso che convenientemente alla nativa sua forza di espandere esse particelle negli spazj egualmente elettrici dirada i nuvoli suddetti.*

Sentiamo per ultimo, e che fa per tutti, il celeberrimo Volta, il quale dopo avere confermata nella sua *Memoria sopra la grandine*, che in forza dell' elettricità *le nubi si gonfieranno soffrendo come una specie di flusso*; nella Parte I.ª così si fa a ragionare: « Concepiscansi i nuvoli temporaleschi dotati, « come lo sono effettivamente, e ne dan segni più o meno strepitosi di una

« poderosissima elettricità; eglino dovranno in virtù di questa repellere forte-
« mente le parti loro esterne: da ciò viene che siffatti nuvoloni ci presentano
« sovente i loro bordi come stracciati o a frangie, e gonfia la superficie in più
« luoghi, e per molte gobbe e prominenze, irregolare, per nulla dire de' brani
« che si prolungano in fuori, si staccano e vengono visibilmente rigettati dal
« corpo della nuvola medesima. Altre volte compajono anzi raccolti e conden-
« sati cotai nuvoloni nella parte inferiore, verisimilmente perchè cotesta su-
« perficie molto meno elettrizzata o elettrizzata in senso contrario della faccia
« superiore, viene da essa attratta: come succede appunto in certe nostre spe-
« rienze (fatte per imitare alcuni fenomeni dell' elettricità atmosferica) che la
« parte inferiore di un volume di cotone elettrizzato, ove venga spogliata in
« qualche modo ex. gr. con una punta dell' elettricità che aveva comune col
« resto, o meglio si faccia passare all'elettricità contraria, tosto da rara e sfioc-
« cata che era, si raggruppa e si serra addosso alle parti interne ed alle supe-
« riori, in cui vige più forte l'elettricità primiera. È questa, a mio credere, una
« delle principali cagioni per cui siffatti nuvoli si fanno più densi e scuri degli
« altri. Comunque sia, ve ne hanno al certo ne' forti temporali che dispie-
« gano una prepotente elettricità sulla faccia superiore. »

Tre cause possono contribuire in generale all' aumento del volume di una nube ossia alla sua rarefazione o espansione: 1.° l'aumento di temperatura, ma questo non è il nostro caso, anzi è tutto all'opposto; 2.° la diminuzione di pressione; 3.° la comunicazione del fluido elettrico. Considero la seconda come causa meccanica, e la terza come causa fisica, ed ambedue queste devono produrre un freddo proporzionale.

Veduto pertanto come l' elettricità sia atta ad espandere le nubi, passiamo ai fatti che provano esser questa espansione elettrica atta a produrre in quella massa d'aria vaporosa un considerabile grado di freddo, appoggiandomi a sperienze già conosciute.

Nell'*Istruzione sui Parafulmini* adottata dall'Accademia Reale delle Scienze di Parigi, nell'anno 1823, si premette « che le molecole della materia elettrica
« sono dotate di una forza repulsiva in virtù della quale esse tendono a fug-
« girsi e a diffondersi nello spazio ed a portarsi verso la superficie dei corpi, e
« non vi sono ritenute che per la pressione dell' aria, la quale anch' essa eser-
« cita a vicenda una contraria pressione proporzionale. I vapori vescicolari
« sono pure elastici in forza dell'elettricità che investe ogni punto, ossia glo-
« betto. Quando la materia elettrica attraversa l'aria, ella separa le sue parti, e
« allontanando l'aria forma un vôto che è anch'esso un conduttore, e si forma
« il tuono.... La materia elettrica, in virtù della ripulsione delle sue molecole,
« è dotata di una forza meccanica che può fargli superare la pressione dell'aria
« o dei liquidi e spezzare i corpi solidi non conduttori. »

L'effetto refrigerante che io suppongo, non è in contraddizione colla proprietà che ha la materia fulminea di condensare, arroventare, fondere, volatilizzare ed incendiare per una rapida e veemente compressione dell'aria interposta,

o dei corpi stessi dai quali sprigiona il calorico specifico e latente. Abbiamo un esempio di due opposti effetti nell'aria compressa in un recipiente, che comunicando con un altro, ivi aumenta la temperatura, mentre si raffredda nel primo.

Le più recenti ed esatte sperienze di Gay Lussac e Welter (*Mecanique céleste par Laplace* T. V, p. 125) mostrano corrispondere nell'aria un raffreddamento di un grado del termometro centigrado per una diminuzione di $\frac{1}{106}$ nella densità. Se può aver luogo pertanto nell'atmosfera una grande espansione è manifesto che in virtù del volume grandissimo su cui si opera, e della poca conducibilità pel calorico dell'aria e dei vapori, debba quella temperatura cotanto diminuita in un dato spazio, lungamente continuare, ossia lentamente scemare, se non v'intervenga o un'elettricità contraria che ne distrugga l'azione, condensando la nube, ossia quella massa d'aria e vapori; o la perdita della sua propria elettricità; o un vento che dissipi e disperda quella massa vaporosa.

Ma se è provato che rarefacendosi o condensandosi l'aria sotto la macchina pneumatica, si raffredda essa o si riscalda in proporzione; da questa esperienza direttamente, e per induzione anche dalla propagazione del suono si è tirata la conseguenza, che anche per minore pressione atmosferica l'aria diradandosi, e perciò occupando maggior spazio, dovesse acquistare una più bassa temperatura senza nulla perdere della quantità di calorico che essa avea prima in egual massa: ora ci resta a vedere se si possa fare un analoga applicazione colle nostre macchine elettriche alle espansioni frigorifiche delle nubi temporalesche.

Oltre le sperienze sopra riferite, e per tacere di tant'altre, è fatto notissimo che cominciando dall'elettricità più debole sufficiente appena ad allontanare due pallottole leggerissime o due sottili pagliette dell'elettrometro fino alla più forte del fulmine che spezza i corpi più duri, fra i quali s'apre un passaggio e ne slancia lontano le parti; era ben naturale il supporre che questo stesso agente imponderabile non operasse diversamente nella sua difusione fra le nubi, come l'apparenza già lo manifestava. L'aumento però di volume che può acquistare una nube elettrizzata succede in un modo diverso da quello che potrebbe derivare da una semplice sottrazione di pressione atmosferica, quantunque l'effetto frigorifico possa risultare il medesimo. L'aria asciutta indipendentemente dalla temperatura non è permeabile dall'elettrico, poco lo è il vapore invisibile, e non molto lo è quello detto vescicolare, ossia quello che propriamente costituisce le nubi. Ma questo vapore visibile non si potrebbe isolare ne' nostri recipienti troppo limitati come si trova libero nell'atmosfera, perchè le pareti di quelli coprendosi di un velo liquido continuato per quanto sottilissimo di quella stessa umidità, assorbono e trasmettono tutta l'elettricità che si vorrebbe in qualunque siasi modo comunicare permanentemente a quel vapore o aria vaporosa; e per cui non venendo elettrizata non si espande, e non espandendosi non si raffredda. Ma già anche prima che l'umidità diventi visibile nell'aria, ossia anche quando reputiamo l'aria abbastanza asciutta, le

superficie dei nostri recipienti e dei nostri sostegni isolanti, più o meno conservano aderente quel velo umido che toglie, o diminuisce l'isolamento stesso.

De Luc supponeva che le nubi fossero perfetti conduttori dell'elettricità, perchè una macchina elettrica nell'aria umidissima non può accumulare elettricità (*Bibl. Brit.* T. XLVIII, p. 98): eppure è costretto a confessare che fra le valli di que' monti, dove le nubi toccavano da una parte e l'altra il suolo umido, sortivano frequentemente dei lampi, per cui se difficile era per lui il poter spiegare come tanta elettricità aveva potuto accumularsi, più difficile gli riesciva di comprendere la possibilità della sua conservazione in quelle masse vaporose, e tanto, secondo lui, conduttrici. Fu dunque indotto a credere che la produzione della grandine (pag. 189) fosse una prova diretta di decomposizioni improvvise di certe sostanze nelle nubi elettriche, e della composizione simultanea d'altre sostanze: ipotesi priva d'ogni fondamento. Nel T. LVI dello stesso Giornale di Ginevra alla pag. 15 si trovano le sperienze di Leslie comprovanti la facoltà del vetro di coprirsi di un velo umido prima che l'igrometro indichi un'umidità massima; ed alla pag. 326 (*Elementi di elettricità di Singer*) si prova che la perfezione dell'isolamento è costantemente diminuito dalla deposizione dell'umidità atmosferica alla superficie dei corpi destinati a produrlo.

Gay Lussac fra i molti altri che potrei citare (*Annal. de Chim. et Phys.* T. XXI, pag. 92. *Sulla sospensione delle nubi*) afferma che molte sperienze provano l'affinità specialmente del vetro per l'acqua esser tale da togliere all'aria una parte della sua acqua igrometrica.

Lo stesso Gay Lussac parlando della lunghezza della scintilla che produce il lampo, aggiunge (*Annal. de Chim. et Phys.* T. XXIX pag. 106). « L'elettricità pri-
« mitivamente sparsa nello spazio occupato dalla nube temporalesca non riunen-
« dosi in uno strato sottile che poco a poco, diventa difficile nella teoria del Volta
« di attribuirgli la formazione della grandine in pezzi così considerevoli come
« quelli che si osservano talora; ma il fenomeno è ben sicuramente legato all'elet-
« tricità atmosferica, e sebbene ignoriamo ancora tutte le circostanze che ci aju-
« terebbero a concepirlo, non possiamo respingere una causa da che ci sembrasse
« di non avere un'intensità proporzionata agli effetti che noi vogliamo spiegare.»

Già in quegli stessi Annali dell'anno 1818 il medesimo insigne Fisico aveva premesso « che l'elettricità va a distribuirsi in un temporale tutta all'intorno di « quelle sferette che costituiscono detti vapori vescicolari, e si sperimenta in « questo caso una tensione elettrica. » Ma per quanto que' vapori si trovassero più ravvicinati per cui si aumentasse la densità della nube, l'elettricità allora di queste sferette o vapori vescicolari, non potrà mai a mio avviso, distribuirsi totalmente, e quasi istantaneamente alla superficie della nube come vorrebbe quell'insigne Fisico, perchè que' vapori per quanto si considerino vicini fra di loro ed ingrossati, non potranno mai formare un tutto continuato, essendo sempre di gran lunga maggiore lo spazio unicamente occupato dall'aria interposta, e non è tanto, come si sa, la conducibilità dell'aria umida che spoglia le nostre macchine dell'elettricità, quanto quel velo umido continuato

aderente alle medesime. La rarefazione pertanto della massa vaporosa sarà in ragione diretta della quantità di fluido elettrico comunicato e del suo isolamento, e inversa della pressione atmosferica a quell'altezza in cui succede l'espansione: delle quali espansioni ognun vede che il barometro poco o nulla deve darne indizio, sebbene sieno valevoli a produrre venti irregolari.

Sulla formazione delle nubi temporalesche lo stesso Gay Lussac (*Annal. de Chim. et Phys.* T. VIII) suppone un raffreddamento nella massa vaporosa di molte leghe d'estensione in altezza prodotto per una causa qualunque, e che deve ben essere considerevole. Quello che quindi si soggiunge di strati concentrici si può ben applicare alle singole molecole del vapore formanti la nube tempestosa: « se si concepisse una serie di strati d'aria sferici, concentrici, « elettrizzati; gli strati esteriori non eserciteranno alcuna azione sugli strati « interiori, mentre che questi al contrario, respingeranno gli strati esteriori « fino a tanto ch'essi trovino un ostacolo al loro movimento. Questo è quanto « risulta dalle belle ricerche di Poisson sull'elettricità. »

Io considero dunque una nube come un ammasso di minime goccioline pensili nell'aria, o se si voglia, di vescichette acquee, ciascuna delle quali può essere investita da una piccola atmosfera elettrica in mezzo all'aria più o meno isolante: ciascuna molecola di queste deve dunque respingere la molecola vicina dotata anch'essa di elettricità omologa; ma a ciascuna di queste molecole acquee restando aderente uno strato d'aria, ossia un'altra atmosfera aerea, come da infinite sperienze tanto sui corpi solidi quanto liquidi si è riconosciuto; ne viene di conseguenza che da quelle infinite e minime repulsioni la massa totale formante la nube elettrizzata debba espandersi, ossia aumentare di volume, sia che questa elettricità si manifesti in quella direttamente o indirettamente, e rispetto alle altre nubi circostanti e alla terra secondo lo stato elettrico in cui si trovano.

Trovandosi ciascuna molecola d'acqua isolata nell'aria la conducibilità e permeabilità della nube rispetto al fluido elettrico non sarà più come d'acqua tutta concreta; e per cui non si porterà quello tutto alla superficie come succederebbe nell'acqua e nei corpi solidi, ma rimarranno tutte quelle molecole di vapore come altrettanti corpi staccati, e poco deferenti.

L'elettricità luminosa che si distribuisce nel corpo della nube è ben meno rapida a difondersi per quanto si può scorgere, anche al dire di Beccaria, del baleno che vi appare alla superficie, o del fulmine che vi guizza per entro, o trascorre da una nube all'altra, o dalla nube alla terra.

Quella specie di lentezza che prova la materia elettrica a difondersi in una nube e distribuirsi su tutte le molecole di vapore viene accresciuta quando è costretta a sortirne sì per l'allontanamento maggiore seguito da molecola a molecola vaporosa, come per essersi queste stesse molecole agghiacciate, e resesi più isolanti. La così detta aura elettrica che produciamo colle nostre macchine, e che nasce da una forza espansiva e repellente, avrà luogo egualmente ed in più alto grado fra quelle molecole vaporose: nella guisa che formandosi il

vapore elastico espande l'aria e la raffredda, partecipandogli della sua tensione e della sua temperatura.

Dalla estrema divisione dell'acqua nelle nubi risulta un contatto moltiplicatissimo dell'aria con quest'acqua suscettibile di essere elettrizzata, e quello che Fresnel diceva a proposito del calorico comunicato ad esse nubi (*Sull'ascensione delle nubi nell'atmosfera.* Bibl. Univ. T. XXI, e *Annal. de Chim et Phys.* T. XXI, p. 260) io lo applico all'elettricità. « Or egli risulta egualmente dalla « nostra ipotesi sull'estrema divisione della materia della nube, che le particelle « che la compongono possono esser molto ravvicinate fra loro, non lasciando « fra mezzo che de' piccoli intervalli, e non ostante essere ancora esse medesime « finissime relativamente a questi intervalli di modo che il peso totale dell'acqua « contenuta nella nube sia una piccola frazione del peso totale dell'aria che « comprende, e abbastanza piccola perchè, la differenza di densità fra l'aria « della nube e l'aria circostante compensa e al di là l'aumento di peso che « risulta dalla presenza dell'acqua liquida o solida.... Le nubi non devono « abbassarsi che lentissimamente ancorchè più pesanti in grazia dell'immensa « estensione della loro superficie relativamente al loro peso. » E viceversa succederebbe se fossero meno pesanti, cioè innalzandosi.

Un analogo modo di considerare la distribuzione della materia nei corpi si è usato dai Fisici parlandosi della loro porosità in riguardo al loro peso e durezza ecc. Se dunque anche secondo Fresnel le nubi devono muoversi lentissimamente nell'atmosfera, quando la loro gravità specifica diventa maggiore o minore, per diminuzione o aumeuto di temperatura; egualmente dovrà succedere pel cambiamento di gravità specifica operato dal fluido elettrico; come pure lentamente succederanno le attrazioni o ripulsioni elettriche tra nube e nube.

Quella imperfetta conducibilità della nube è la causa dei frequenti baleni, che alla superficie della stessa nube compajono a dati intervalli, trasportandosi con certa lentezza il fluido elettrico dall'interno alla superficie della massa totale vaporosa. Vediamo diffatti, che l'elettrometro anche nelle nebbie basse dà indizj manifesti di elettricità, sebbene quel vapore che punto non è diverso da quello che forma le nubi, si trovi in contatto col suolo, e con tutti i corpi circostanti; eppure può ritenere una certa qual dose di elettricità. Ma quanto più l'elettricità è forte, anche i cattivi conduttori, ossia i semi-coibenti diventano atti a trasmetterla; ed è per questo che sulle montagne anche in grembo a nubi temporalesche non si hanno mai segni di una elettricità proporzionale per essere quelle in comunicazione colla terra che le può spogliare dell'elettrico eccedente, o può somministrarne a quelle mancanti; essendo propriamente la terra il ricettacolo universale dell'elettrico, immenso e inesauribile rispetto all'atmosfera.

Dunque se in contatto colla terra la nube si scarica dell'esuberante, o ne riprende da quella se mancante; o in altri termini se il passaggio, e lo scambio del fluido elettrico succede facilmente fra la nube e la terra nelle forti cariche, si deve questa azione estendere a qualche distanza nella nube stessa; per cui,

come dissi, non si possono ottenere in sommo grado sui monti involti nel temporale quegli effetti di elettricità positiva o negativa, vitrea o resinosa che ad una certa distanza dal suolo in quella nube medesima tanto si manifestano.

Effetto di un grande sbilancio elettrico io riguardo pertanto l'espansione della nube, e conseguenza di questa espansione il freddo che si deve manifestare in proporzione del volume aumentato senza aumento di massa; ma siccome gli strati vaporosi dell'atmosfera in vicinanza e in contatto colla montagna non possono partecipare pienamente di quel medesimo eccesso o difetto, così non potranno soffrire tutto quell'abbassamento di temperatura, e comunicarlo al suolo ed ai corpi circostanti.

De Luc (§. 607) aveva misurato salendo la montagna di Saleve che un solo nuvolo aveva l'altezza di piedi 1400. Quando un nuvolo è di grandissima estensione tutto continuato, non fa più bisogno di suppor molti nuvoli fra loro isolati per produrre un temporale con grandine, perchè essendo debole il suo potere deferente, potrà in un dato spazio rarefarsi e condensarsi in un altro.

In tutte le altre ipotesi e fra queste specialmente in quella del Volta in cui si supponeva che la sede principale del temporale si trovasse ad altezze minori delle alte montagne, e dove si ammetteva un freddo intensissimo e duraturo anche per molte ore, non si sarebbe potuto spiegare come mai su quelle montagne dove aveva avuto principio e fine un temporale con grandine, pure eccettuato quel freddo comunicato direttamente dalla grandine, come succederebbe nelle pianure, mai non si sia provato dagli abitatori di que'alti luoghi un grado di freddo così straordinario ed improvviso, nè siano rimaste vestigia anche in assenza di spettatori nei vegetabili che a molti gradi sotto zero anche per breve tempo non potrebbero resistere, sia col far agghiacciare i ruscelli che discendono da quelle falde, e uccidere insetti ed altri animali che sarebbero scampati dai colpi della grandine.

Anche la grandine deve essere più piccola sui monti, se l'azione espansiva della nube viene ivi diminuita dall'influenza della terra più vicina che non nelle pianure; oltre allo strato della nube grandinosa meno alto rispetto al suolo sottoposto quanto più si accosta alla cima del monte.

Beccaria al §. 395, dietro anche la testimonianza di Scheukzerio, Fromond e Musschenbroek, dice essere osservazione anche molto comune presso i montagnuoli che nelle montagne più alte d'ordinario la grandine cade più piccola. Se la grandine si formasse negli strati dell'atmosfera più alti dei monti, dovrebbe cadere anzi più grossa su questi che non nelle valli o nelle pianure, perchè nell'attraversare gli strati inferiori come più caldi, e venendo al contatto con tanti vapori dovrebbe piuttosto diminuire di volume per la fusione procurata dal calorico libero di quelli strati, e del latente dei vapori che vi si precipitano.

Per buona sorte fra i pochi coraggiosi cultori delle scienze naturali che si sieno volontariamente esposti in mezzo ad un temporale per esplorarne più da vicino i fenomeni, ve n'ha uno de'più celebri, voglio dire lo Spallanzani. Que-

sti in una *Relazione su' diversi oggetti fossili e montani* scritta nel 1784, e pubblicata nelle Memorie della Società Italiana T. II, P. II, e nel T. VIII degli Opuscoli scelti. Milano 1785, al §. IX, descrivendo il temporale in cui si trovò involto, quando dalla parte di Parma superò il giogo dell'Appenino per recarsi a Porto-Venere, dice fra le altre cose. « Ma il fenomeno più bello e più gran-
« dioso che mi si offrì fu sul giogo altissimo di quell'Alpe. Un miglio e mezzo
« prima di giungervi mi trovai nascosto fra un ammasso di nuvole, che veni-
« vano da libeccio. Proseguendo il cammino all'insù dopo d'aver fatto un
« quarto di miglio, cominciai a sentire qualche colpo di tuono, che mi parve
« vicinissimo. Andando più alto, e sempre in mezzo alle nuvole mi soprappre-
« se la pioggia con vento, e da tuoni novelli che attorno a me romoreggia-
« vano, e dai vivissimi lampi che qua e là vedeva guizzare, m'accorsi non
« senza ribrezzo d'essere attorniato dal temporale.... e in poco d'ora giunsi
« alla sospirata cima chiamata Cisa. Quivi la pioggia era più rimessa, ma il
« vento più forte, e l'aer freddissimo.... Colassù adunque discese il termo-
« metro in pochi istanti sino a gradi 7 $^3/_4$ R.^{r}, quando alle radici della monta-
« gna marcava i gradi 25 sopra lo zero.... Uscendo fuor di cammino, la Cisa
« s'innalzava dolcemente verso quel luogo dove veniva il chiarore.....
« A mano a mano che io saliva colassù diradavansi i nuvoli che mi attorniavano,
« cresceva il chiarore, veniva meno la pioggia, *scemava il freddo*, e continuando
« sempre più in alto il cammino, a poco andò che svelata mi apparve la bella
« faccia del sole, trovandomi già tutto fuori del temporale, anzi vedendolo
« aggirarsi sotto a miei piedi.... Standomi dunque su quella cresta di monte,
« mi appariva il sottoposto temporale in sembianza di un immenso lago nuo-
« tante nell'aria, irraggiato dal sole, e tutto in tempesta. Soffiando laggiù un
« forte libeccio, si vedevano correr le nubi all'opposta parte piene d'incre-
« spamenti, di onde; ed oltre a quel moto di rapimento e comune ne avevano
« altri particolari ed uno distintamente di rotazione per cui s'ingeneravano in
« esse qua e là molti vortici, ed a vicenda si distruggevano, somiglianti a quelli
« che veggiamo in piccolo nell'acque correnti de' canali de' fiumi.... I tuoni
« e i lampi proseguendo ad esser frequenti mi determinai d'intraprendere qual-
« che riflessiva osservazione su di essi.... Soprattutto stava attento per vedere
« come producevasi il lampo, se da una elettrica scintilla slanciantesi da un
« nuvolo nell'altro vicino, come vogliono i più de' moderni Fisici, allorchè il
« primo abbonda di elettricità, e ne scarseggia il secondo. Ma nulla in ciò di
« preciso, nulla di distinto mi fu dato di poter vedere per formare quell'im-
« menso aggregato di vapori un tutto unito, e come un nuvolo solo. A volta
« a volta vedeva soltanto rompere dal seno di que' vapori una capace scintilla,
« ora semplice, ora divisa in più rami, che in un attimo scorreva un amplissi-
« mo spazio, e per lo più non diritta, ma a varj angoli e a svolte composta, o
« a zigzag come direbbono i Francesi, e perciò similissima alle elettriche scin-
« tille che schizzano da una macchina assai poderosa. Un momento appresso
« mi feriva l'orecchio il romore del tuono, o piuttosto del fulmine, ma questi

« fulmini che ad ogni balenar di scintilla scoppiavano, erano piuttosto picco-
« li.... Alle cose fin qui notate ne debbo aggiunger *due* altre, l'una che du-
« rante il temporale in que'siti più bassi, era colassù il vento sommamente
« rimesso, l'altra che minore sentivasi il freddo, mentre il termometro che
« nel luogo del temporale marcava, come già dissi, il grado 7 $^3/_4$, su quella cima
« era asceso all'ombra al grado 12.... Quando io mi trovava presso le Panie,
« rari eran que'giorni che non insorgesse qualche temporale verso le loro
« sommità, più volte appostatamente ho cercato che mi si rinnovasse la sce-
« na che aperta mi si era sopra la Cisa ma sempre inutilmente, posciachè
« giunto io a quelle cime, o il temporale era omai svanito, o si era recato al-
« trove, o le nuvole temporalesche si erano sollevate a segno che più non
« toccavano la montagna. Privo di questo spettacolo, non me ne mancò un
« altro analogo.... riguardava esso la formazione dei temporali.... Intanto
« la nuvola si faceva più estesa e più densa, varj ondeggiamenti e moti verti-
« ginosi a somiglianza d'un aspo nascevano dentro di lei, e cominciava ella
« ben tosto a lampeggiare e a tuonare. Era regola che io non ho mai trovata
« soggetta ad eccezioni, che su le prime quando il temporale era nascente, le
« scintille elettriche erano cortissime e brevissime, e piccolissimi i tuoni. In
« ragione poi che cresceva il temporale, quelle si facevan più lunghe e questi
« più rumorosi e di maggior durata. Aggranditosi così il temporale, cominciava
« a versar acqua o gragnuola, ed ora esso finiva su que'deserti, dove era nato,
« ora abbandonate le Panie veniva dal vento recato sopra altri paesi. Sebbene
« questo vento pareva che avesse la primiera sua origine dalla nube tempora-
« lesca. Quantunque io non abbia mai avuto il piacere di trovarmi sulle Panie
« dentro al temporale, mi sono però abbattuto più d'una volta ai suoi lembi,
« e quivi il vento soffiava gagliardamente, e aveva tutte le apparenze di venir
« proprio dal seno della nuvola tempestosa. Osservava di più che scioltasi que-
« sta, oppure allontanatasi, quello altresì andava a finire. »

Da questa relazione si possono ricavare alcuni fatti: 1.° viene confermata l'opinione generale che si possono formare i temporali d'estate anche molto al dissotto del limite delle nevi perpetue, sebbene quello qui osservato non fosse stato accompagnato da grandine; 2.° che nei temporali si trovano alcuni strati di nubi inferiori più freddi dei superiori; 3.° che i fenomeni elettrici atmosferici in vicinanza e al contatto del suolo sono poco sensibili, per cui anche le attrazioni, e le ripulsioni ed i gradi di freddo che ne dovrebbero derivare per l'espansione della porzione di nube in vicinanza o al contatto del suolo saranno sempre minori; 4.° che dominano venti vorticosi e violentissimi, nati come in seno alla nube stessa, forse in grazia della espansione, i quali possono ritardare la caduta, e permettere l'ingrossamento della grandine.

Il sig. barone Hombres de Firmas membro di diverse Accademie ecc. maire di Alais, nelle scienze naturali versatissimo, come molte sue dotte Memorie pubblicate lo dimostrano, nella Bibl. Univ. Sett. 1828, descrivendo un terribile temporale, fra le altre circostanze accenna che le nubi basse rotolavano le une

sulle altre senza confondersi insieme e sembravano gonfiarsi insieme e comprimersi. Assicura poi in una nota in fine d'avere attraversata una nube temporalesca nelle alpi, aver veduto il lampo e sentito il tuono sotto i piedi, ed era sereno sulla sommità dove arrivò, mentre che grandinava nella valle. E già prima di questi il celebre sig. Giorgio Shuckburg membro della Società Reale di Londra nelle sue *Osservazioni fatte in Savoja ad oggetto di determinare l'altezza delle montagne per mezzo del barometro*, negli anni 1775 e 1776, diceva « che sulla sommità della montagna di Saleve alcune nuvole erano al dissotto « di me, ed in quel tempo mi si presentò un singolare fenomeno del tuono che « rumoreggiava sotto ai miei piedi ai 20 d'agosto. »

Pare dunque indubitato da quanto si è finora esposto che le nubi possano trovarsi in uno stato tale di elettrica tensione, d'aumentare considerabilmente di volume, superando la pressione atmosferica, già molto diminuita a quelle altezze dove si forma la grandine; e nella guisa che il calorico altro fluido imponderabile potrebbe rarefarle, se a quell'ammasso vaporoso fosse in opportuna proporzione comunicato: colla differenza che nel primo caso la temperatura sarebbe d'altrettanto abbassata, di quanto verrebbe innalzata nel secondo caso. Ma per le proprietà medesime di questa non ancora ben distinta sostanza o semplice modificazione de' corpi che chiamiamo elettrico, di cui ignoriamo ancora come si propaghi e si comunichi ai corpi, non si potrà forse mai giungere a poterne in terra imitare in piccolo alcuni di quei fenomeni, che in grande possono succedere nell'atmosfera; siccome ancora è dubbia l'origine dell'elettricità stessa atmosferica, non ostante le opinioni di Volta, Gay Lussac e Pouillet; e per cui non si potrà forse mai misurare il grado di freddo prodotto da questa espansione elettrica, come si misura quello che per sola rarefazione dell'aria si ottiene colla macchina pneumatica. « Ma anche per una siffata deter- « minazione, dirò ancor io col ch. prof. Belli (*Corso di Fisica* §. 445), riescono « inutili i termometri comuni posti entro a recipienti ove l'aria si dilati o si « condensi, comunque essi sieno pronti nelle loro indicazioni. Perciocchè se a « cagion d'esempio l'aria si dilata e si raffredda, appena incomincia il termo- « metro ad abbassarsi, che l'aria ha già quasi interamente ripigliata la tempe- « ratura primitiva; essendo ella infatti di una piccolissima massa per grande « che sia il vaso, ed avendo un assai piccola capacità totale pel calorico, le « basta di questo una pochissima quantità per ritornare alla temperatura pri- « mitiva; e questa tenue quantità può prenderla quasi tutta in un brevissimo « tempo alle pareti del vaso. Di qui è che se in grazia della dilatazione l'aria « si raffreda anche di 15 o di 20 gradi, il termometro non indica al più che « un grado o due. » Il termometro prontissimo di Breguet sarebbe in parte valevole per indicare questo raffreddamento indicando più di 20 gradi di freddo per la rarefazione dell'aria sotto una campana (*Annales de Chimie et Phys.* T. V, pag. 312); ma non sarebbe sufficiente per indicare il cambiamento di temperatura cagionato da una elettrica espansione nell'aria contenuta in una campana in cui si potesse espandere liberamente comunicando col resto

dell'atmosfera, perchè oltre alla quasi impossibilità di potere in così piccolo spazio quale è quello di un recipiente qualunque, conservare per un dato tempo i vapori vescicolari sospesi nell'aria; siccome quest'aria in ogni caso si dovrebbe ammettere come umida in eccesso, così uno strato acqueo essendone già aderente alle interne pareti, a questo a preferenza si porterà l'elettricità artificialmente comunicata. A me basta però di partire dal principio inconcusso che dove in un fluido aeriforme vi è aumento di volume senza nuova aggiunta di calorico, vi deve essere aumento di freddo più o meno durevole.

Ora se questa espansione elettrica dell'aria libera e vaporosa ha luogo, deve seguirne un freddo proporzionale. Gay Lussac diceva a proposito della formazione delle nubi temporalesche (*Annal. de Chim. et Phys.* T. VIII, pag. 158). « Quando i fenomeni sono poco accessibili alle nostre ricerche, bisogna ben « ricorrere a conghietture per scoprire la verità; ma però si deve sempre la- « sciarsi dirigere da principj certi, o almeno da analogie verisimili. Senza ciò « sarebbe una temerità di volere penetrare i secreti della natura e non si tar- « derebbe a smarrirsi. » Pouillet (*Élémens de Phys.* T. II. P. II. pag. 806) oltre tante altre testimonianze, afferma che « si vedono le nubi temporalesche aggi- « rarsi rapidamente sopra se stesse, come se il vento che le trasporta non « fosse egli stesso che un vasto vortice. Gli ammassi di vapori che costituiscono « le nubi non sono già dei corpi conduttori come le masse metalliche; e senza « sapere come l'elettricità si distribuisca in questi conduttori imperfetti che « hanno sovente molte leghe di superficie, è evidente che non basterebbe « metterli un'istante in contatto col suolo per iscaricarle completamente; ed è « impossibile per conseguenza che una sola scintilla li metta allo stato natura- « le, per cui nel seno di una stessa nube si vedranno successivamente brillare « molti lampi (e a pag. 108). Quando la scarica di una semplice bottiglia di « Leiden passa attraverso di un gas, tutto il fluido n'è scarso, e vi è aumento « di volume, come si può scorgere col termometro di Kinnersley. »

Fu questo strumento inventato fino dal 1761; e si trova descritto nel I.° Tomo della *Storia dell' elettricità* di Priestley, nel Dizionario di Gehler ecc.; ma questo strumento non indica propriamente che l'espansione dell'aria mediante la scintilla elettrica, e non già il grado di temperatura come il vocabolo lo farebbe supporre, essendo piuttosto un manometro. Dubito poi che introducendo in questo strumento anche il termometro di Breguet, potesse indicare il freddo sorvenuto all' atto dell' esplosione elettrica, non ostante un residuo d'espansione che rimane per qualche tempo dopo in quell'aria elettrizzata; per essere troppo piccolo lo spazio, e troppo piccoli i mezzi che possiamo impiegare.

Del resto se si elettrizza comunque dell'aria asciutta, allora l'espansione è piccola, e non è più quale dovrebbe succedere nelle masse vaporose; o l'aria è molto umida, e allora l'elettricità si disperde troppo rapidamente: nè basta l'aria umida per imitare le nubi, ma si richiede una vera nebbia, ossia vapori acquei sospesi nell'aria allo stato di lenta precipitazione, isolati e lontani dal contatto o dalla vicinanza di qualunque altro estraneo corpo.

La rapidità con cui una scintilla espande l'aria attraversandola è maggiore di quella che le vibrazioni del suono esercitano sulle molecole dell'aria, la temperatura delle quali però col solo calcolo ha potuto Laplace determinare, e che neppure il termometro di Breguet sarebbe valevole ad indicare anche in minima parte.

Forse anche nella guisa che il fenomeno dell'ebollizione dell'acqua non comincia che ad una determinata temperatura sotto una data pressione atmosferica; siccome anche tanti altri fenomeni di composizioni e decomposizioni di corpi non hanno luogo che sotto determinate pressioni; così forse l'espansione frigorifica dell'elettricità difusa nella nube non potrà succedere almeno in modo notabile e permanente che sotto una data minore resistenza di pressione atmosferica; essendo ben noto che i temporali si formano sempre a notabili altezze. Secondo Pouillet (pag. 808) una nube tempestosa si trova all'altezza del piano d'ordinario fra 2000 a 6000 metri; e la cima del Monte Bianco è secondo l'*Annuaire pour l'an* 1828 di 4775, e secondo l'altro *pour l'an* 1831 di 4810 metri sopra il livello del mare; e secondo Gay Lussac (*Annales de Chim. et Phys.* T. XXI, pag. 59) l'altezza delle nubi ordinarie è di 1500 a 2500 metri.

Io non ripeterò già in appoggio della mia opinione sul potere refrigerante dell'elettricità ossia della materia fulminea quanto disse Seneca, sebbene nella narrazione di semplici fatti sia di eguale autorità un antico, come un moderno autore (*Natural Quæst.* Lib. II. Cap. 31). *Stat fracto dolio vinum, nec ultra triduum rigor ille durat.* (Cap. 52) *Vinum gelat, ferrum et æs fundit.* (Cap. 53) *Illud mirum, quod vinum fulmine gelatum, cum ad priorem abitum redit, potum aut exanimat, aut dementes facit* ecc.

Vige bensì ancora la volgare opinione che il tuono faccia diventar matto il vino, ma non già chi lo beve come supponeva Seneca. Non deve far meraviglia che questi od altri parlino soltanto degli effetti del fulmine di far gelare il vino, e non l'acqua, perchè il fenomeno del vino era più singolare, mentre della congelazione dell'acqua se ne aveva già una prova troppo convincente nella grandine stessa. I Commentatori dell'edizione recente di Torino dell'Opera sopra citata, fanno rimarcare, che essendo soliti i Romani a conservare i loro vini molto densi e generosi in recipienti di terra cotta sopra il solaro invece di riporli in cantina, diventava più facile l'esserne investiti dal fulmine, in qualunque modo poi ciò avvenisse.

Nella Geografia fisica di Kant (*Delle Meteore*, T. VI) si legge che la cagione stessa per cui le masse di capelli, i pennacchi e la bambagia diventano specificamente più leggieri dopo essere state fortemente elettrizzate (cioè per l'espansione dell'aria aderente), fa gonfiare le nuvole, ecc. e a pag. 114 « Quinquet « mediante l'elettricità, ha cangiato realmente le gocce d'acqua in grandine, « e questi sperimenti sono stati ripetuti felicemente anche in Germania. » Ma se di questa esperienza non se n'è più parlato, si è ben riprodotto anche recentemente quell'altro fatto di congelazione di notabile quantità d'acqua avvenuta

in cantina col mezzo di una naturale scarica elettrica, e chi l'ha narrato, oltre all'essere persona degnissima di tutta fede (seppure non fu ingannata dalla preesistenza di quel ghiaccio d'altrove ivi recato), è tanto celebre nelle scienze naturali, che basta solo nominarla, Chaptal (*Élémens de Chimie.* 3.me édit. Paris 1796, pag. 138).

Le 29 octobre il tomba quatre pouces d'eau à Montpellier; un violent coup de tonnerre, qu'on entendit vers les quatre heures du soir, et qui éclata très-bas, décida un chûte de grèle épouvantable; un droguiste, qui était occupé dans sa cave à rémedier ou à prévenir les dégats occasionnés par la transsudation de l'eau à travers le mur, fut très-étonné en voyant que tout à coup l'eau qui suintoit sur la muraille tomboit en glaçons . . . je fus visiter ce lieu un quart d'heure après, et trouvai dix livres de glace amoncelée au pied du mur.

Trovo questo fatto importantissimo riferito da altri con qualche variazione: io ho tolto il testo sopra accennato da un Opuscolo estratto dal Calendario Georgico della Reale Società Agraria di Torino per l'anno 1827 intitolato *Cenno storico critico sui Paragrandini* del prof. Giacinto Carena nel seguito della nota alla pag. 12; ma in un altro Opuscolo (*Rapport sur l'essai du Paragrélage* ecc. Chambéry 1825 par M. M. Saint Martin et Lacoste, pag. 20) trovo quanto segue, che nel fondo dice lo stesso. *M. le comte Chaptal cite un fait qu'il a constaté personnellement: pendant une pluie d'orage, au milieu du mois d'août un négociant épicier de Montpellier était dans sa cave à détourner l'eau qui sourdait à travers les lézardes de la muraille: il vit subitement cette eau se convertir en glace sous l'influence d'un violent coup de tonnerre qui ébranla la maison. M. le docteur Gouvert a entendu raconter ce fait par M. Chaptal.*

Io non reco questi esempj per dimostrare che egualmente operi l'elettricità nelle nubi; ma soltanto per far vedere ammesso il fatto, come il fluido elettrico condensatissimo quale si trova nel fulmine possa produrre congelazioni istantanee di masse notabilissime di liquido che invano si tenterebbe forse d'imitare anche in piccolo colle nostre più formidabili batterie. Molti dei fenomeni naturali non possono succedere che in alcune circostanze, e con certe determinate forze: se quelle cambiano, o queste vengono meno anche in piccola parte, il fenomeno non ha più luogo nè in grande nè in piccolo. Prendiamo per esempio la congelazione stessa dell'acqua: se la temperatura non è giunta precisamente allo zero del termometro, non potrà mai quella succedere, mancasse solo anche per un centesimo, o un millesimo di grado, e fosse sopra una minima stilla d'acqua e continuasse quella temperatura per un tempo indefinito. Così vi potranno benissimo essere dei casi in cui a produrre quella privazione di calorico in grandi o piccole masse d'acqua o di vino, bisognerà che concorra una corrente elettrica di una determinata intensità, la quale poi agisce egualmente sopra una molecola, come sopra tutta la massa; lo che coll'arte non si potrebbe forse giammai imitare.

Un obbjezione si potrebbe fare a questa mia ipotesi, cioè come mai se il fluido elettrico espande, dirada e comunica una forza repulsiva alle molecole vaporose, queste non si allontanano sempre più fra di loro, e non si dissipano e disperdono nell'atmosfera circostante. Ma la pressione stessa dell'atmosfera si oppone a questa rapida dispersione senza però poterla impedire del tutto; e ne abbiamo una prova nel §. 114 già accennato del Beccaria *di certo molto regolarissimo sfilacciamento che avviene spessissimo nel nuvolo temporalesco massime verso il lembo di esso;* ed al §. 116 aveva rimarcato *che sotto il nembo compare grande numero di nuvoli ascitizj, i quali d'ordinario non si discerne come si formino e d'onde procedano: sono essi cenciosi e laceri e appajono violentissimamente e rapidamente agitati qua e là con direzione incerta, ma orizzontale.* Al §. 396 soggiungeva: *sebbene tutti i nuvoli temporaleschi si muovono con ammiranda rapidità, è poi affatto rapidissimo il movimento con che si agitano i nuvoli più bassi e secondarj, nel momento massimamente che la gragnuola è imminente. . . . Tali bassi, laceri, informi nuvoli, agitatissimi nel loro moto, incostantissimi nella figura loro, certamente sono siccome i mezzani tra i nuvoli più alti e grandinosi e la terra; similmente che una foglia metallica va discorrendo tra il piatto e la catena* (1). Ne abbiamo anche una conferma nella testimonianza già citata dal Volta medesimo *dei nuvoli temporaleschi dotati di una poderosissima elettricità in virtù della quale dovranno repellere fortemente le parti loro esterne, presentando i loro bordi come stracciati o a frangie, per nulla dire dei brani che si prolungano in fuori, si staccano e vengono visibilmente rigettati dal corpo della nuvola medesima.*

---

(1) Questo paragone annunziato per la prima volta dal Beccaria (oltre ad altri confronti che si potrebber fare quantunque non venga mai nominato) avrà forse dato origine alla prima idea del Volta sulla formazione della grandine, quando faceva riflettere nella sua *Memoria* « che impiegando un largo piatto si può infondervi una vigorosa elettricità e avere il « vago spettacolo di veder levarsi in aria e sostenervi corpicelli anche non legerissimi, cioè non « solo delle piume, de' fiocchetti di seta o di cotone, delle fogliette d'oro battuto, ma delle « pallottole di carta, di sovero ed altre ancora più pesantelle. La quale sperienza, fatta così più « in grande, rappresenta meglio e in più bella maniera i grani di grandine sospesi, com'io « immagino, al di sopra del telone nuvoloso, certamente non meno elettrico del nostro qui « descritto. Facendo attenzione a tale sperienza, osserveremo che que' fiocchetti, quelle pallotto- « le, ecc. non si tengono già là immobili e costantemente al medesimo intervallo sopra il piatto « elettrizzato, bensì in una specie di oscillazione sempre fluttuanti: si alzano, si abbassano « alternativamente... Potremo rappresentarci questi grani non solamente sospesi e fluttuanti, « ma in una viva agitazione, saltellanti e come ballottanti, spinti cioè e rispinti dallo strato di « nuvole elettrico *in più* all'altro elettrico *in meno*: nella guisa che de' corpicelli leggeri di « ogni specie, e fin delle pallottole di sovero non leggerissime, danzano e saltellano tra due « piatti nelle sperienze elettriche de' nostri gabinetti, qual è quella che in francese chiamasi « *danse des pantins.* »

ARTICOLO IV.

Applicazione delle cause assegnate alla formazione ed all'ingrossamento della grandine.

Considero dunque il fluido elettrico come causa, non come effetto della grandine, perchè riguardandolo come causa, ne scorgo l'immediata azione, mentre chi lo attribuisce ad effetto o a fenomeno concomitante, non sa poi rendere che vaghe spiegazioni, le quali egualmente si possono applicare a qualunque temporale senza grandine ed anzi ad ogni pioggia, e fors'anche ad ogni formazione di nubi: non essendo credibile che uno dei più grandi agenti della natura, qual è il fluido elettrico che in un temporale si manifesta in tutta la sua intensità, abbia poi a rimanervi inoperoso e passivo; cosa che non pare s'accordi col metodo generale d'operare della natura medesima.

Sia poi questa elettricità atmosferica prodotta, come voleva Volta, o come ha modificato Pouillet (*Ann. de Chim. et Phys.* T. XXXV, p. 401, e T. XXXVI, pag. 5), o come supponeva Gay Lussac (*Sullo sviluppo dell'elettricità mediante i vapori. Annales de Chimie et Physique*, T. VIII, p. 158), oppure come opinava il prof. Barlocci, derivare dalla luce solare (*Congetture sulla origine dell'elettricità atmosferica*, Roma 1830), ovvero come ultimamente il prof. De La Rive vorrebbe trarne l'origine dalla distribuzione ineguale della temperatura nell'atmosfera (*Bibl. Univ.* T. LIII, 1813, p. 123), per me basta figurarmi un temporale già formato, e per conseguenza che alcuni nuvoli o parti dei medesimi si trovino dotati dell'una o dell'altra elettricità, in eccesso o di quella in difetto, per cui tendendo all'equilibrio e passando da una nube all'altra, per questo passaggio, ossia per questo nuovo stato elettrico della massa vaporosa, debba in essa, come avevano già notato Beccaria, Volta ed altri, succedere un aumento o una diminuzione di volume.

Supponiamo ora che una nuvola ossia una massa vaporosa venga investita dal fluido elettrico, sia vitreo o in più, sia resinoso o in meno: aumenterà questa di volume per una ripulsione reale o apparente impressa a tutte le molecole componenti la massa vaporosa, qualunque ne sia la spiegazione del modo, come succede nelle due pallottoline di un elettrometro che si respingono, o in cumulo di crusca, che elettrizzato, una molecola si allontana dall'altra, si solleva e si disperde.

Ma l'aumento di volume in un fluido aeriforme non si produce senza una contemporanea e proporzionata quantità di freddo; per cui supposta per termine medio la temperatura della zona atmosferica in cui si trovano le nubi temporalesche nel mezzo dell'atmosfera medesima, cioè lontane anche dall'irradiamento calorifico che può essere causato dalle montagne sebbene altissime; supposta dico al punto della congelazione, perchè anche l'irradiazione e l'evaporazione degli strati superiori, e la mescolanza di venti molto freddi possono influire, e ritenuta la legge trovata da Gay Lussac e Welter, ancorchè il vo-

lume della massa vaporosa non aumentasse che d'un quinto in totalità, si avrebbero prossimamente 25 gradi di freddo sotto il termine della congelazione, prescindendo dalla temperatura che venisse in piccola parte aumentata dal calorico latente che si sviluppa dai pochi nuovi vapori che a quella bassa temperatura da aeriformi si riducono vescicolari o liquidi, e della congelazione di questi e di quelli già in maggior quantità esistenti in forma visibile e che avevano già perduto tutto il calorico gasificante. Il vapore visibile, ossia allo stato di precipitazione per quanto si supponga denso nell'aria formando quelle nubi così opache e oscure, trovasi sempre in piccola quantità rispetto al resto del volume occupato dall'aria, di modo che si potrebbe calcolare ad $\frac{1}{100000}$ circa. Suppongo anche che a questa temperatura di tanto abbassata, e in questi tremori dell'aria succeda la congelazione di detti vapori; non perchè sia condizione indispensabile potendo anche rimanere allo stato liquido molti gradi sotto zero, ma perchè supponendo diggià gelato questo vapore, più pronta sarà la successiva congelazione delle gocciole d'acqua. Devono dunque questi vapori rimaner sospesi nell'aria stessa, come prima, anzi essendo aumentati di volume per la congelazione si trovano anche specificamente meno pesanti che non nello stato liquido o vescicolare: anzi in questo supposto stato vescicolare ossia di palloncini, come opinava particolarmente De Saussure, rimane più facile l'immaginare come il fluido elettrico li possa gonfiare in certa guisa e far gelare in seguito.

Quella massa vaporosa sebbene raffreddata, pure essendo aumentata di volume, sarebbe diventata specificamente più leggiera di prima rispetto alle nubi circostanti, o allo strato d'aria in cui si trovava; ma sia per attrazioni o ripulsioni di quelle nubi circostanti, o di altri strati superiori o inferiori, e in forza dell'influenza della terra stessa, che anche a quelle distanze può efficacemente agire, quell'immenso volume di vapori, o non salirà che lentamente attesa la resistenza che prova nello scacciare dal suo luogo un volume corrispondente d'aria, ed allora si dovrà raffreddare anche di più per la nuova espansione che proverà causata dalla minor pressione atmosferica; o potrà anche venir respinto verso il basso ed essere dalla terra stessa attratto, ma impedito dalla sua gravità specifica minore, rimanere però per un certo tempo in billico: fare in somma come succederebbe in qualunque altra nube in occasione di temporale che può venire attratta e respinta da altre nubi o dalla terra stessa senza che perciò si veda quella nube elettrizzata discendere molto bassa, e molto meno fino al contatto del suolo nelle pianure o nelle basse valli, perchè non è che sui monti dove le nubi si vedono accostarsi e soggiornarvi, perchè è anche a quelle altezze che si formano.

Del che poi non mi occuperò qui a rintracciar le cagioni; una fra le quali, almeno d'estate, sarebbe la temperatura degli strati inferiori dell'atmosfera che come più caldi possono disciogliere quei vapori che si abbassassero, anche per azione elettrica, troppo vicino a terra; oltre al calore che si svolgerebbe da

quell' ammasso vaporoso ridotto a minor volume dall' aumentata pressione atmosferica; e un' altra cagione sarebbe questa, cioè che quella nube che si accostasse alla terra, potrebbe, giunta ad una certa distanza, scaricare la sua elettricità contro terra o da questa riceverne, come in alto succede fra nube e nube. Anzi nel nostro caso abbiamo una circostanza più favorevole, perchè se la nube elettrizzata ed espansa venisse da altre nubi respinta verso la terra, o dalla terra venisse attratta, la sua specifica gravità minore ossia la sua forza ascensiva acquistata, sarebbe d'ostacolo a questo abbassamento fino ad un certo punto, come si disse.

In ogni modo pare che l' aumento di volume acquistato dalla nube se succede nell'ultimo strato più vicino a terra e perciò visibile, debba di preferenza espandersi dall'alto al basso, o dal basso all'alto che non dai lati; nei rapporti elettrici rispettivi fra l'atmosfera e la terra.

In questo caso riuscirà meno sensibile alla vista l' aumento prodotto nel volume della nube osservata dal sotto in su; che se succedesse negli strati intermedj del nembo temporalesco, si toglierebbe del tutto al nostro sguardo, e soltanto il lampo più o meno offuscato ne potrebbe dare indizio.

Inoltre que' gonfiamenti reali possono venire mascherati dalle apparenti mutazioni di volume dipendenti dall'allontanamento e dal movimento in tutte le direzioni proprio delle nubi temporalesche.

Anzi, può ben anche l'elettricità espandere più o meno una porzione sola di quello strato continuato, o nero telone che si presenta talvolta nei temporali, attesa la poca conducibilità che si disse esistere nei vapori sparsi nell' aria, nè in un' istante deve succedere quella espansione, nè una sola scarica elettrica io suppongo, ma una seconda, una terza, ecc. come di fatti vediamo a dati intervalli partire il torrente elettrico, da un punto per trasportarsi nell' altro; ossia a saettarsi a vicenda le nubi; e per cui anche l'espansione potrà succedere poco per volta e ad intervalli.

Ma questi vapori sieno liquidi o gelati non possono riunirsi fra loro finchè sono dotati d' una forza ripulsiva e formar pioggia o grandine; o se cadessero dall' alto perderebbero troppo presto la loro fredda temperatura attraversando così suddivisi gli strati d'atmosfera sempre più caldi; per cui perduto il freddo e la elettricità loro propria, potrebbero durante la caduta riunirsi soltanto in gocce di pioggia. Che se mentre questo ammasso vaporoso e tanto raffreddato, rimane sospeso nell'aria, o che lentamente s'innalzi o s'abbassi, un'altra nube o un altro ammasso vaporoso per dissopra si disciolga in acqua, per quella qualunque siasi causa che produce le pioggie ordinarie, o sia anche per cessazione della tensione elettrica, o per una elettricità comunicata in senso contrario, per cui le molecole vaporose s' accostino, e la temperatura aumenti pel diminuito volume, quelle gocciole d' acqua che suppongo di poco superiori al termine della congelazione attraversando nella loro caduta quell' altra massa di vapori gelati, ed incorporandosi con questi, diverranno anch'esse piccole masse di ghiaccio sulle quali altre gocce cadendo ed altri vapori gelati riunendovisi,

sia per il solo effetto della velocità della caduta dei gravi, sia per moti vorticosi di venti impetuosissimi che vi dominano bene spesso, avrà tempo sufficiente quella prima grandine di coprirsi di nuovi strati, e ingrossarsi; o di riunirsi più grani, e formare una sola massa. A questa riunione possono fors'anche contribuire le attrazioni elettriche, come il Beccaria aveva già preveduto (§. 394): « Gli strati distinti e le discernibilissime vesti di ghiaccio che com-
« pongono il grano della gragnuola sono formate successivamente, mentre il
« nocciolo sta cadendo. Imperocchè e come penseremo mai che un grano di
« gragnuola sia formato in un'istante in uno stesso punto di luogo e di tem-
« po?... E finalmente ella è cosa siccome necessaria, che cadendo la gra-
« gnuola da grande altezza tragga a se grande copia di vapori dai successivi
« più bassi strati, i quali solo che si consideri la loro successiva maggiore vici-
« nanza alla terra, si vede che debbono avere una successiva graduazione di
« elettricità ineguale, e però il nocciolo cadente dagli strati più alti incontrerà
« in ciascun successivo strato un grado di elettricità ineguale; e mentre in
« ciascuno strato equilibrerà l'elettricità sua con l'elettricità di quello di
« ciascuno strato trarrà attorno a se altri ed altri vapori, e così successiva-
« mente e gradatamente ingrandirà il suo volume per grande spazio della sua
« caduta, giacchè i vapori che successivamente raccorrà parte per il freddo
« loro proprio, parte per il freddo che troveranno nel nocciolo eccedente il
« grado della congelazione, tostamente essi pure si agghiaccieranno. »

Quell'intonaco bianchiccio e farinoso che involge talvolta esteriormente i grani della grandine è, come si disse, quell'ultimo vapore che vi si è gelato sopra nell'attraversare il resto dell'atmosfera vicino a terra quando cade la grandine asciutta cioè non mista d'acqua, mentre prima quell'istesso intonaco serviva a separare i diversi strati provenienti dalle gocce d'acqua sovrapposte. Se le gocce d'acqua cadono frammischiate colla grandine, questa generalmente non è molto grossa, anzi talvolta cade in istato di fusione già incominciata nell'aria, e quelle gocce d'acqua frammiste se dallo stesso grembo sono partite, o saranno sfuggite alla congelazione perchè non egualmente raffreddata in tutte le parti quella massa vaporosa, o non ritenute in aria per sufficiente tempo dai venti turbinosi, oppure in parte gelate si saranno nuovamente fuse nel tragitto fino a terra; oppure possono anche provenire da altre nubi laterali che colpi di venti mescolano e confondono colla grandine nella precipitazione; o sarà stata un'altra pioggia di altra nube inferiore allo strato raffreddato.

Con ciò si spiega facilmente quell'avvicendarsi della grandine e della pioggia: come limitato e circoscritto e saltuario sia il sito percosso dalla grandine: come più generale e copiosa sia la pioggia venendo a mancare quelle circostanze essenziali per la sua congelazione: come la diffusione della elettricità annunziata dal tuono sia seguita da scrosci alternativi d'acqua o di grandine: e come bene spesso per nostra fortuna in mezzo a frequenti lampi e tuoni, e coll'aspetto il più minaccioso, non cada che una copiosa pioggia ristoratrice dell'arso terreno. Talvolta viene preceduta la grandine, ma quasi sempre è

seguitata dalla pioggia; perchè la nube generatrice di quella se non è rianimata da altro fluido elettrico, e perde questo, e perde quel suo freddo che ha dovuto comunicare a tant' acqua che l' attraversava e si convertiva in ghiaccio. Nè la durata, nè l'estensione notabile di questo flagello mi fa ostacolo, perchè i mezzi che impiego nella mia ipotesi non sono meno efficaci e pronti; ed erano ben illusi coloro che pretendevano di spogliare le nubi di quell' agente così portentoso con mezzi cotanto piccoli e deboli: potremo ben preservare le nostre abitazioni dal danno del fulmine, ma non giammai le nostre campagne da quello della grandine.

Volta, nella sua *Memoria sulla formazione della grandine*, diceva: « Non può « dunque dubitarsi, ripeto, che esistono in siffatti temporali de' nuvoli dotati di « contrarie elettricità, se perfino ne abbiamo segni non equivoci all'elettrometro, « oltre gl' indizj che ne danno i lampi e le saette che veggiam trascorrere per « entro a que' campi de' nuvoli, quali congregati, quali segregati, e che altro « sicuramente non sono che scariche elettriche onde si bersagliano l'un l'altro.» E al caso mio fa anche quest' altra riflessione che aggiunge poco dopo: « Ma sia pur quella qualunque disposizione che si ricerca, difficile ad incon- « trarsi, e rara, difficilissimo anzi il concorso di tutte le circostanze favorevoli, « secondo me, alla formazione della grandine e ad un insigne ingrossamento « de' suoi grani; che perciò? Rari anche sono i casi in cui cade copiosa gran- « dine e grossa, nè è dessa un appanaggio di tutti i temporali, ma di alcuni « solamente, e per nostra fortuna di pochi, in mezzo al gran numero che ne ab- « biamo qui ogni anno; appunto perchè o l'una o l'altra o molte di tali circo- « stanze mancano per lo più, e solo per disgrazia e fatalità si combinano alcuna « volta tutte a segno di portarci una di quelle grosse gragnuole di cui parliamo.

« Se a taluno non pare possibile che sì grande debba essere la forza elettrica « delle nubi; consideri che esse estendono la loro sfera d'attività a molte leghe « di distanza; quale debba essere dico la forza tanto attrattiva che repulsiva « sui corpi vicini: a norma dello stato in cui si trovano questi o di niuna o di « omologa o di contraria elettricità. » Riguardo a ciò Beccaria aveva già premesso (e mi si perdoni se ripetutamente cito a preferenza questi Padri dell'elettricità atmosferica) al §. 191. « Del resto chiunque sa che l'elettricità per di- « fetto eccita i medesimi movimenti che la elettricità per eccesso, e che il fuoco « elettrico rappresenta e produce tutti gli stessissimi fenomeni qualunque sia « la direzione secondo cui esso si muove ecc. ecc. »

In somma per produrre la grandine bisogna che una nube piova in seno d'un altra, la quale col suo freddo poco prima acquistato ne agghiacci le gocce cadenti. Se la stagione e le ore più favorevoli alla formazione della grandine sono quando regna maggiore temperatura nell'atmosfera, non è perciò che queste circostanze abbiano diretta relazione colla grandine, perchè, come abbiamo veduto in altri paesi più settentrionali e montuosi, grandina talvolta più frequentemente d'inverno: dunque unicamente quelle giornate e quelle ore più calde influiscono sulla formazione delle nubi temporalesche e della suc-

cessiva pioggia; perchè diffatti in molte estati seguitano a formarsi temporali i più minacciosi e con sviluppo immenso di elettricità, senza che cada un grano di grandine. In altre stagioni avremo il freddo necessario, ma ci manca l'elettricità sufficiente o quella disposizione voluta nei diversi strati a diversa temperatura. Con quale altra ipotesi appoggiata a principj certi di fisica si potrebbero spiegare tutte le variazioni ed accidenti della grandine che in un temporale ci si presentano?

Anche il Volta suppone nella *Seconda Parte* che « talvolta ancora delle « piccole gocce d'una pioggia straniera, portatavi sibbene da un vento o ver- « satavi da una nube superiore per avventura men fredda, traggon seco la « congelazione delle vescichette freddissime che incontrano, le quali senza di « ciò rimarrebbero nello stato in cui sono » e più innanzi soggiunge « ritor- « nando al nucleo nevoso non voglio dissimulare che sovente i granelli di « neve gelata (*grésil*) di cui ho già parlato, e alcune volte pur anche i grani « più considerabili d'una vera grandine, si mostrano senza l'indicato nucleo « o corpicciuolo bianco centrale, come ne ho già fatto cenno.

« Questi grani che costituiscono una specie particolare di gragnuola, io li « credo col sig. De Luc juniore, prodotti originariamente da gocce vere di « pioggia, cadenti da una nuvola superiore che si sono agghiacciate nell'attra- « versar indi uno strato di nuvole inferiore freddissimo.

« Questo fisico e naturalista illuminato, osservator non meno attento e sagace « del suo fratello maggiore, ha notato molto bene le circostanze del fenomeno « rimarcabile di cui si tratta; e si è assicurato un giorno (era verso la fine di » autunno) che cadeva a Ginevra una grandine di tale specie; si è, dissi, assicu- « rato che lo strato di nubi superiore che distillava una piccola pioggia, non « era tanto freddo quanto lo strato inferiore; trovandosi questo effettivamente « di alcuni gradi sotto il termine della congelazione, mentre l'altro superiore « aveva una temperatura di qualche grado sopra tal punto. »

Io attribuirei piuttosto il *grésil* ossia nevischio a vapori congelati appunto a guisa di neve che dall'azione elettrica e dal moto meccanico vorticoso dell'aria si siano riuniti in pallottoline che avranno potuto giungere al basso anche con moto meno accelerato della grandine perchè più soffici senza fondersi per istrada, essendo la temperatura dell'atmosfera in quella stagione meno calda, e per cui il detto *grésil* ossia nevischio, compare nei nostri climi unicamente nella primavera o nell'autunno. La seconda qualità di grandine indicata dal Volta, io l'attribuirei a molte gocciolette d'acqua gelata e insieme confusamente conglomerate col freddissimo vapore in grembo alla sottoposta nube, appunto perchè opache; e di queste grandini se ne trovano bene spesso anche d'estate cadere di qualunque grossezza o sole o miste a quelle grandini col distinto nucleo e strato trasparente.

Non è dunque questa qualità di grandine così rara come si supponeva dal Volta e da altri, e me ne appello a chi con occhio indagatore ha esaminato molte e molte volte la grandine e ne ha fatto in certa guisa l'analisi. Nè raro

sarà il caso della combinazione di un vento freddo inferiore ad un altro che lo sia meno; ossia non sarà raro il caso che un vento freddo s'insinui ed attraversi uno strato atmosferico più caldo, come probabilmente può succedere anche in senso opposto, perchè appunto la pioggia ha origine dalla mescolanza delle due arie vaporose di diversa temperatura. Or dunque quando cade nevischio o grandine nei paesi più settentrionali durante la fredda stagione o in tutto l'anno sugli altissimi monti nelle zone più temperate e calde anche senza segni notabili di elettricità; sembra che la stessa causa assegnata da Volta e da De Luc vi debba necessariamente intervenire. Ma se coi soli vapori gelati non si può ottenere che del nevischio e non mai una vera grandine nè opaca nè a strati come mi sembra di avere dimostrato; e se già si è conceduto che incontrandosi l'acqua cadere in una massa d'aria più fredda, possa convertirsi in vera grandine, perchè non si dovrà concedere che sempre questa ne sia l'unica e vera origine, sia che questo freddo straordinario derivato fosse da correnti d'aria ascitizie come nei casi sopra nominati, sia che prodotto fosse da quell'elettricità stessa che nei temporali estivi gagliardissima si manifesta e sulla quale ho finora insistito? Io mi attengo all'assioma di Newton di non ammettere più cause, se non quelle che sono necessarie e sufficienti alla spiegazione dei fenomeni. Finalmente anche nell'ipotesi del Volta si suppongono basse le nubi grandinose e raffreddate più delle superiori e più di quanto comporterebbe la loro altezza assoluta, per cui non manca che a far piovere da queste in quelle per ottenersi la grandine.

Anzi se non fosse per dilungarmi di troppo, e se necessario credessi di dover con altri argomenti confutare le supposizioni che a questo riguardo si fanno dal Volta stesso, ne potrei provare la erroneità; ma già abbastanza è stato comprovato che la ipotesi del Volta seducente per la bella, elegante e vivace maniera con cui fu esposta e imponente pel nome celeberrimo di cui era insignita, era basata sopra il falso e contradditorio principio d'un freddo straordinario prodotto dall'azione riscaldante del sole e della sospensione e dal trascorrimento da una nube all'altra dei grani gia formati ecc. ecc. Che se mancasse ancora a comprovarne la poca verosimiglianza, basterebbe il voto del primo corpo scientifico del mondo, l'Istituto di Francia, che ha nuovamente e per la seconda volta posto al concorso la spiegazione della grandine.

Sebbene la grandine si formi ad un grado molto al dissotto della congelazione, pure la temperatura di quella non potrà molto abbassarsi per lo sviluppo del calorico latente nella successiva congelazione delle gocciole d'acqua; stantechè sebbene cadesse raffreddata di alcuni gradi sotto lo zero attraversando gli altri strati dell'atmosfera meno freddi, farebbe precipitare sulla sua superficie e congelarvisi altrettanti vapori già esistenti nello stato visibile o di quelli ancora aeriformi in proporzione della diversità di temperatura e della saturazione dell'aria circostante, e così molto si scemerebbe il suo freddo.

Da ciò deriva evidente l'errore di chi supponeva che l'ingrossamento della grandine provenisse dal freddo d'evaporazione in essa prodotto nella discesa

fra gli strati inferiori dell'atmosfera più secchi per cui vi si precipitassero nuovi vapori essendo in contraddizione diminuzione per evaporazione ed aumento al tempo stesso per precipitazione di nuovi vapori.

Nell'ipotesi del Volta bisognava ammettere che tali strati e tali nuvoli si mantenessero alle debite distanze animati da una determinata elettricità per ore intere affine di dar luogo alla formazione completa e all'ingrossamento della grandine per mezzo d'incrostazioni successive; di maniera che bisognava supporre la durata per tanto tempo della medesima elettricità, delle medesime distanze fra gli strati nuvolosi, del medesimo freddo e della continuata sospensione di quelli strati sebbene diventati specificamente più pesanti pel supposto freddo intensissimo concepito, di gran lunga superiore a quello proprio di quella altezza, in quella stagione e in quelle ore: e tutto ciò in mezzo ai frequenti passaggi di elettricità contrarie tra nube e nube che il Volta stesso conveniva d'avere sempre osservati e in mezzo ai venti i più impetuosi e in tutte le direzioni. Per me invece basta che la nube rimanga elettrizzata per quel tempo che dura la caduta della grandine che nel suo grembo si genera e s'ingrossa durante cioè il breve tempo ch'essa grandine impiega ad attraversarla. Anzi siccome la grandine a differenza della pioggia cade a scrosci ed a riprese, così la nube stessa o altre poste nelle medesime circostanze potranno soffrire una consimile espansione a più riprese per far proseguire la conversione della pioggia in grandine.

Se sono più frequenti i temporali di giorno che non di notte qualunque poi siasi la causa, deve anche la grandine di necessità mostrarsi più frequente di giorno. Ma nell'ipotesi del Volta o di quegli altri che attribuiscono la grandine a colonne d'aria innalzate nelle regioni superiori dal calore diurno, si dura difficoltà a poter ammettere come possa protrarsi fino a notte avanzata o al successivo mattino la formazione e la caduta di quella grandine o venirvi anche recata bella e formata ben da lontano quando il cielo nel giorno antecedente si mostrava sereno fin dove l'occhio poteva discernere sull'orizzonte; mentre per me sia di giorno o di notte si forma sempre la grandine durante il temporale; anzi all'istante medesimo che si forma quella, comincia a cadere.

Potrà forse qualche volta anche nei nostri climi cader piccola grandine senza scoppio sensibile di tuono o vista di lampo per la troppa lontananza della nube grandinosa, e perchè altre dense nubi impediscono lo splendore, o per essere l'elettricità meno forte.

Nè sempre in occasione di grandine si potranno distinguere chiaramente quelle nubi grandinose aumentare di volume sì per le agitazioni e i movimenti di cui le nubi temporalesche continuamente sono animate, come già si disse; sì pel continuo cambiamento di forme e di luogo, sì per la generazione di altre nubi o per l'allontanamento o il concorso di altre, ma specialmente perchè quelle nubi grandinose da che acquistano l'aumento di volume, quando altre cause non si oppongano, come abbiamo veduto, devono tendere ad innalzarsi per minore gravità specifica ed a togliersi dalla nostra vista limitata a quella buja volta che copre il resto dell'atmosfera dove si forma e la pioggia e la grandine.

Pure non rare volte si osservano quelle nubi grandinose presentare quei fenomeni sopra descritti e su quali specialmente il Beccaria tanto insisteva per quelle protuberanze e prominenze grandissime, o appendici ed espansioni che apparivano rivolte verso terra e ch'egli frequentemente chiama col nome di mammelle (§. 113) « Comunemente si osservano in alcuna molta ampia parte « di esso nembo certe asprezze e prominenze rovesciate verso la terra, le « quali mi pajono molto degne di tutta la più scrupolosa attenzione. (§. 116) « Ma si vogliono particolarmente avvertire i fenomeni che appajono nel nembo « quando già molto si avvicina sopra la testa dell'osservatore o a meglio dire « quando sopra essa verticalmente si trova. Allora il ramo del nembo pare che « si abbassi oltremodo e che si abuii e che sotto esso compare grande numero « di nuvoli ascitizj, i quali d'ordinario non si discerne come si formino e « donde procedano; sono essi cenciosi e laceri e appajono violentissimamente e « rapidamente agitati qua e là con direzione incerta ma orizzontale. Poco « dopo cadono rovesci di pioggia, e molte volte, massime quando i suddetti « nuvoli sono agitati più violentemente, suole anche cadere della gragnuola. » E il Volta osservava « soprattutto nei temporali tempestosi dei nuvolotti meno « lontani da terra che ora rimangono immobili, ora scorrono e s'agitano sotto « ad altri nuvoli estesi più elevati.... Le nubi apportatrici di gragnuola non « compajono già molto alte, anzi sembrano essere delle più basse e che ravvi- « sansi qualche tempo prima della fatale scarica, di un colore cenericcio tirante « più o meno al chiaro, andar vagando e come raminghe sotto il telone scuro « delle altre nubi che coprono il cielo. Tali nuvole cenericce e funeste sa ben « distinguerle il contadino, attento osservatore de' tempi e dinotarle per quel « che sono, per un ammasso cioè di grandine bella e formata. »

Sebben la nube grandinosa aumenti di volume, per cui dovrebbe comparire meno buja, perchè meno densa, pure si deve considerare che la quantità reale de' vapori è anzi aumentata perchè raffreddandosi la stessa nube in proporzione dell'aumento di volume altri vapori che prima erano invisibili si riuniscono ai primi e tutti poi si trovano probabilmente allo stato di congelazione; e siccome generalmente si osserva il temporale dal basso all'alto, e nel caso che quella nube si trovasse nello strato inferiore a noi visibile, la quantità di luce che resterebbe intercettata sarebbe prossimamente eguale, massime, se come si disse, l'espansione succedesse a preferenza dal sotto in su che non dai lati. Ma ad accrescere quel bujo e quella apparente densità vi concorre quella causa medesima che ha dato origine alla formazione delle prime nubi temporalesche, e che seguita a produrne altre ed altre durante il temporale che va crescendo per successive decomposizioni di vapori invisibili e per cui siccome la quantità d'elettricità che si sviluppa in quelle circostanze è in ragione dell'estensione del temporale stesso, così la causa espansiva delle nubi sarà dipendente dall'aumento di quelle nubi medesime.

Quando poi queste nubi o porzioni delle medesime sono spinte da elettriche attrazioni verso terra, o per ripulsioni d'altre nubi verso la terra medesima, e si

staccano dall'oscura volta che vi sovrasta, allora appajono difatto più chiare e cenericce, e come stracciate e fatte a brani al dire di Beccaria e Volta; o come falde di lana a cui le rassomigliavano gli antichi (*Virgil. Georg.* Lib. I. *Lucretius.* Lib. VI, v. 503. *Bacon. Histor. Vent. prognostica*, N.° 48); e da moti intestini e straordinarj agitate, ed è di là che il pratico osservatore attende tremante la grandine vicina; ed un fumo o una nebbia che verso terra si prolunga indica la precipitazione di nuovi vapori in quell'aria sottostante e prima trasparente, pel nuovo freddo in essa occasionato dal passaggio della grandine stessa che già cade a terra e percuote, ed il di cui strepito confusamente già si ode da lontano prima che essa ci arrivi minacciosa sul capo; strepito che alcuni hanno voluto attribuire ai reciproci urti dei grani stessi della grandine agitati dai venti vorticosi anche qualche tempo prima della caduta, lo che essendo vero indicherebbe la vicinanza della sua sede, se si giunge a sentirne il rumore; sebbene quando corpi estranei si muovono nello stesso mezzo debba in generale essere poco considerevole questa collisione.

Pare piuttosto che in generale la grandine debba acquistare un moto rotatorio nella sua caduta, dal quale deriva in gran parte la sua rotondità per gli urti qualunque siano che riceve da altri grani o da gocciole d'acqua i quali non passano pel centro della massa.

La grandine, come osserva anche Arago (*Annuaire pour l'an* 1828) non viene quasi mai dopo una pioggia specialmente di qualche durata in un temporale, perchè la pioggia cadendo impedisce di mano in mano alle sottoposte nubi di potersi raffreddare per successive espansioni derivanti da successive scariche elettriche; oltre di che continuando il temporale l'elettricità continua a mettersi in equilibrio in quell'ammasso nuvoloso, ed a scemare d'intensità. Potrà bensì per lo contrario succedere che dopo diversi giorni continuati o interpolati di temporali e di sola acqua, ve ne sia un susseguito da grandine più o meno notabile (V. Gazzetta di Milano 17 novembre 1832, sopra una grandine spessa e grossa caduta verso la mezza notte del 8 novembre 1832 in Roma dopo più giorni di dirotte pioggie).

Durante un estesa pioggia temporalesca negli strati superiori, potendo una sottoposta nube raffreddata dall'espansione elettrica esser trasportata dal vento, la grandine formata da quella pioggia che gli cade in grembo seguirà il suo cammino; oppur anche l'elettricità espansiva si può comunicare successivamente a diverse parti di un continuato strato nuvoloso sottoposto al primo. Di qui il successivo trasportarsi che fa la grandine da un luogo all'altro del paese ch'ella devasta.

Se secondo il Volta in ogni temporale è tanto frequente fra le nubi il passaggio da un'elettricità all'altra, per comunicazione o per pressione; come poi si potrà supporre che i due teloni nuvolosi elettrizzati in senso contrario, e fra i quali la grandine viene slanciata dall'uno all'altro (quantunque dal Volta stesso non mai si dica a quale distanza vicendevole supponga trovarsi questi due teloni) possano rimanere nello stesso stato elettrico per delle ore continue prima che cominci a cadere la grandine; e conservarsi a quel grado straordinario di freddo, specialmente di notte, quando la supposta causa frigorifica prin-

cipale, che è il sole, più non esiste? Al primo indebolirsi o al primo cambiarsi dell'elettricità in uno dei due teloni, o nel loro accostamento, la grandine sospesa dovrebbe tutta precipitare in un medesimo tempo; e la prima a cadere dovrebbe sempre essere la più grossa: mentre nella mia ipotesi cessando lo stato di tensione elettrica, cessa la grandine dal formarsi e dal cadere; diminuendo quella, diminuisce questa e viceversa; ed a seconda anche dell'estensione che occupa la nube grandinosa dove irregolarmente l'elettricità si può distribuire.

Secondo il Volta le nubi grandinose sono le più vicine a terra, sebbene per le cause da esso assegnate dovrebbero le nubi superiori essere a preferenza le generatrici della grandine per trovarsi le più raffreddate in faccia al sole e dominate dai venti; ma in ogni modo dovrebbero tanto gli strati superiori, come gl'inferiori trovarsi almeno sotto il termine della congelazione, perchè diversamente dal ballottamento dei vapori dell'uno all'altro strato, ossia dall'alternativa di vapori gelati e diddiacciati, non mai ne potrebbe risultar grandine. Ora se questi diversi strati si devono supporre almeno al termine della congelazione, se non più sotto, come potrà succedere quello che comunemente si osserva di cader cioè la grandine mista colla pioggia? In vece nella mia ipotesi può piovere tanto sopra, e allora convertirsi in grandine; quanto sotto la nube raffreddata, e rimanere nello stato di pioggia. De Saussure (§. 2073) stando sulla montagna detta il Collo del Gigante aveva veduto grandine soltanto allorchè si vedevano delle nubi sovrapposte ad altre, con venti procellosi e con elettricità o senza; e non mai quando era un unico strato nuvoloso per quanto denso ed oscuro apparisse; ma a me sembra che in questo caso sarebbe stato impossibile il poter determinare che non esistessero altri strati superiori; quantunque alla formazione della grandine, come dissi, può bastare anche un solo strato, ma di grande estensione, in cui e l'elettricità e la temperatura non uniformemente vi si possa trovare distribuita.

Pouillet (T. II. P. II., pag. 838) ha sperimentato che la grandine talvolta all'atto della caduta sul suolo riteneva la temperatura di 3 o 4 gradi al dissotto dello zero: dunque questo freddo poteva contribuire a riunire mediante la pioggia o il vapore interposto, in una sol massa molti grani di grandine da far credere a quelle grandini mostruose che si narrano (1).

---

(1) A Yverdun ai 28 luglio è caduta grandine del diametro di 4 a 5 pollici di spessezza, ossia come ivi si dice *ammassi di grandine* (*Bibl. Univ.* T. XLIV, 1830, pag. 336). In Monza ai 27 di giugno 1833 a ore 3 $^1/_2$ pomeridiane è caduta una grandine rara ma grossissima e senz'acqua preceduta da vento impetuosissimo, i di cui grani erano della grossezza delle uova di gallina e dei limoni a superficie irregolare e stellata somigliante alla figura data da Delcross nella *Bibl. Univ.* T. XIII, pag. 154, per quanto dalle relazioni ho potuto raccogliere: a Desio e Seregno fu quella grandine non meno grossa, ma più fitta, senza vento, e susseguita da acqua abbondantissima. Appena cominciata con qualche raro e grosso grano fu sospesa per meno di un minuto, per quindi ripigliare con tutta l'energia. Anche in Milano ai 15 di settembre 1832 alle ore 3 pomeridiane vi fu una grandine senz'acqua della quale alcuni grani dei più rotondi da me misurati erano di un pollice e mezzo di diametro: alcuni a strati concentrici ben distinti, altri poco, ma i più grossi sembravano formati almeno sull'ultimo strato esterno di altri grani minori aglomerati intorno al nucleo principale.

La paura che fa talvolta esagerare sulle dimensioni di que' grani, fa anche reputare maggiore la durata della caduta e la quantità della grandine: il vento può talvolta spingerla ed ammassarla in alcuni siti, o quella può venir trasportata ed accumulata dall'acqua scorrente sul terreno.

È bensì vero che nei temporali le nubi si estendono molto più in altezza che non nelle altre circostanze, e si trovano come isolate perchè il temporale è sempre un fenomeno locale; per cui in un piccolo spazio cade qualche volta più d'acqua fra pioggia e grandine in alcuni minuti durante un temporale, che non in altre pioggie di più giorni continuati (Gay Lussac. *Annal.* T. VIII).

CONCLUSIONE

Le condizioni volute nel programma della Società Reale delle Scienze di Parigi pel premio proposto sulla formazione della grandine, sono una teoria appoggiata sopra esperienze positive e sopra osservazioni variate, sulla costituzione fisica e sul volume della grandine, quanto alle stagioni dell'anno ed alle epoche del giorno nelle quali si osserva ordinariamente: su di che vorrei lusingarmi d'avere sufficientemente risposto. Ma poi si soggiunge essere indispensabile di seguire le conseguenze della teoria che si sarà adottata fino alle applicazioni numeriche, sia che questa teoria metti solamente in opera le proprietà diggià conosciute del calore e dell' elettricità, sia che essa si fondi su delle proprietà nuove risultanti da sperienze incontrastabili.

La teoria ch'io ho adottata appoggiandosi intieramente sopra proprietà diggià conosciute del calore e dell'elettricità mi sarebbe stato facile di seguirne le conseguenze fino alle *applicazioni numeriche*; ma siccome per quanto riguarda il calorico e l' elettricità nel modo che gli ho fatti giuocare nella formazione della grandine, si trovano già in tante opere classiche calcolate le applicazioni da me proposte, come ho in molti luoghi accennato; e d' altronde trattandosi della quantità il freddo che nasce dalla rarefazione dell'aria o dei vapori, e del calorico che si rende libero nel passaggio di questi vapori dallo stato liquido al solido, stava in mio arbitrio l'aumentare la forza dell'elettrico agente e l'estensione dello spazio raffreddato in proporzione degli effetti che si vogliono ottenere, così ho stimato di abbreviare il lavoro attenendomi ai soli punti essenziali.

Devo però far riflettere: 1.° che per quanto denso si supponga il vapore visibile formante le nubi, è sempre maggiore lo spazio occupato dall'aria, per cui avendo già quel vapore perduto il calorico gasificante rimane di poca entità quello che di nuovo si rende libero per la nuova quantità di vapore reso visibile in proporzione della diminuita temperatura della nube elettrizzata ed espansa; 2.° che siccome la proporzione del calorico che si rende libero nel passaggio del vapore acqueo dallo stato aeriforme al liquido, è di gran lunga più considerevole che non quello che si sprigiona dallo stato liquido al solido, stando come 550 a 75; così nella mia ipotesi la proporzione di calorico che si dovrebbe sviluppare nella congelazione di una data quantità d' acqua conver-

tita in grandine, sarebbe la minore; 3.° oltre al grado di freddo più o meno intenso, prodotto negli spazj vaporosi più o meno estesi, i venti turbinosi contribuiranno a ritardare la caduta della grandine permettendone l'ingrossamento. Io ho provato che introdotta dell' acqua pura in una bolla di vetro sottile del diametro di due centimetri fino ad occuparne quattro quinti dello spazio, per lasciar luogo all'aumento che acquista l'acqua gelando, ed immersa questa bolla mediante l' annesso tubo capillare a guisa di un termometro in una miscela frigorifica di sale e neve da produrre 15 gradi sotto zero; in meno di un minuto primo si aveva la completa congelazione. È vero che la miscela frigorifica essendo più densa dell'aria vaporosa, supposta all'egual grado di freddo, toccando in più parti la bolla, ed anche come più conduttrice del calorico, dovrebbe nell'egual tempo raffreddare di più una data massa d'acqua, ma si noti che in questa sperienza l' acqua non era in contatto immediato col mezzo frigorifico, perchè il vetro, per quanto sottile, è sempre cattivo conduttore del calore; inoltre io posso supporre ancor più fredda la nube elettrizzata che non la miscela frigorifica adoperata; di più, i vapori già preesistenti gelati nella nube, a quel grado di freddo, incorporandosi colla goccia d' acqua cadente, e ne accrescono il volume, e ne agevolano la congelazione. S'aggiunga che la velocità acquistata dalla goccia nella caduta, il moto rapidissimo che vi può imprimere il vento, colla rinnovazione ad ogni istante delle superficie in contatto fra la goccia e la nube, potranno ben supplire alla maggiore densità e conducibilità della miscela frigorifica. Per ultimo io ho supposto che la goccia d'acqua, ossia il grano di grandine, fosse prossimamente del volume di due centimetri; ma se quella è più piccola, come suppongo che sia in origine, agghiacciandosi molto più prontamente per non avere una grossa crosta di ghiaccio che ritardi l'interno raffreddamento, se a questa prima goccia una seconda e una terza, oltre ai vapori gelati già preesistenti, vi si applichi e vi si congeli, come suppongo succedere per lo più, formando un secondo e terzo strato; allora la congelazione del totale producente un grano di due centimetri di diametro succederà più prontamente che non la congelazione della stessa massa tutta riunita in una sola volta; siccome il raziocinio e l' esperienza lo possono dimostrare.

Se dunque alla celebrità del Volta si sono concedute delle ore per ingrossar la sua grandine, alla mia mediocrità si conceda almeno qualche minuto, e mi basta.

Nella mia ipotesi suppongo che quasi tutto il vapore che si converte in pioggia o in grandine in un temporale, abbia già perduto e dissipato qualche tempo prima tutto il calorico resosi libero nel passaggio dallo stato invisibile al visibile, o per una perdita locale, o per correnti d' aria che vi trasportano le nubi già altrove formate; perchè il voler ammettere che tutta quella quantità d'acqua che cade, oltre ai vapori ancora rimasti sospesi nell' atmosfera dopo il temporale, derivassero da vapori aeriformi che tutto avessero reso libero il loro calorico gasificante nel circoscritto limite del temporale, sarebbe allora troppo difficile di poter assegnare una causa bastantemente frigorifica per convertire quella gran massa di vapori in ghiaccio, ossia in grandine.

Una data massa d'acqua passando dallo stato liquido al solido, svolge di solo calorico latente quanto sarebbe sufficiente ad innalzare la temperatura di tutta quella quantità d'acqua da zero a 60 gradi di R.r, ossia a 75° centigradi; e si sa d'altronde che la capacità dell'aria pel calorico è piccola in proporzione. Ora se si ammettesse che la grandine s'ingrossasse d'altrettanto fuori della nube che l'ha prodotta, congelandosi attorno i vapori o le gocce d'acqua che incontrasse nell'attraversare il resto dell'atmosfera, bisognerebbe che il grano di grandine cadesse con un grado di freddo eguale a 75° sotto zero. Ma siccome dovrebbe anche produrre la precipitazione dei vapori invisibili, attesa la sua temperatura tanto bassa, e sapendosi d'altronde che il calorico in questi latente sarebbe eguale a 550° gradi, ai quali aggiungendo i 75°, dovrebbe il vapore invisibile essere raffreddato da 625° gradi sotto il termine della congelazione. Si è fatta astrazione in questo semplice calcolo della somma della temperatura dell'acqua, del vapore e dell'aria superiore a zero, che serve ad accrescere la difficoltà.

È noto che la temperatura decresce più rapidamente negli strati superiori dell'atmosfera quanto più si trovano isolati, cioè lontani dall'influenza del calore solare accumulato nelle montagne; anzi neppure in queste quando vi si assegna il limite delle nevi perpetue, non vuol già dire che sempre vi domini una temperatura costante sotto il termine della congelazione nell'aria ambiente; ma s'intende un termine medio che risulta da gradi di freddo maggiore durante specialmente la notte, e per irradiamento, e per l'evaporazione resa più rapida a quelle grandi altezze; e da gradi di freddo minore durante il giorno, o per sole o per cielo nuvoloso, o per correnti d'aria calda. Potrà dunque in alcune circostanze piovere anche a quelle altezze, dove per termine medio si suppone la temperatura a zero. Anche nei nostri climi talvolta nel cuor dell'inverno è più freddo il suolo che non l'atmosfera fino all'altezza delle nubi, dalle quali piove, e la pioggia toccando terra si congela.

Se l'acqua nei nostri recipienti può arrivare e mantenersi tuttavia liquida molti gradi sotto il termine della congelazione, e se si considerano i vapori visibili formanti le nubi piuttosto come minime goccioline d'acqua, che non come palloncini, posso ben anche supporre che alcuni temporali si formino ad altezze superiori alle più elevate montagne dove la temperatura anche d'estate è di molti gradi sotto lo zero: per cui que' vapori si conservano allo stato di liquidità pel rispettivo isolamento d'ogni molecola lontana dal contatto d'ogni altra, specialmente se si considera ciascuna circondata da un atmosfera elettrica. Se avvenga però che questi vapori comincino a gelare (sapendosi già che il contatto di una sola molecola di ghiaccio determina tosto la congelazione in tutta una massa d'acqua per quanto almeno lo comporta il suo grado di freddo in confronto del calorico latente che si rende libero) nascerebbe pei moltiplicati contatti una precipitazione di gran parte di quel vapore riunito in masse solide più o meno rotonde ma opache, e non a strati, per una confusa e rapida congelazione, siccome in alcuni temporali si osserva. Ma io assegnerei piuttosto questa causa a quella specie di grandine che suole cadere, come dissi, d'inverno nei climi più

freddi dentro però la zona temperata, o sopra le più alte montagne nella calda stagione, senza indizj di fenomeni elettrici; perchè, a dir vero, non saprei concepire come potessero quei vapori conservarsi allo stato liquido per molto tempo, e per molti gradi sotto il termine della congelazione, in mezzo a quelle rapide e vorticose agitazioni dell'aria, e molto più nelle vibrazioni e nei tremiti che si comunicano a tutta quell'atmosfera producenti il tuono; i quali contatti e moti sono tanto valevoli a determinare la congelazione dell'acqua, o la solidificazione dello zolfo, del fosforo, ecc., o la cristallizzazione di alcuni sali nelle nostre sperienze.

Siccome però quando le nubi non vengono nelle correnti d'aria trasportate già belle e formate, non possono prodursi in luogo che per freddo avventiccio, o per aumentata pressione atmosferica; ma molto più per la mescolanza di due arie molto sature di umidità e di diversa temperatura, come bene aveva distinto anche M.r Gasparin, parlando della *Causa della pioggia* (*Bibl. Univ.* Agosto 1828), l'osservazione ha confermato l'esistenza di queste correnti d'aria calda negli strati superiori dell'atmosfera anche nella fredda stagione (*Bibl. Univ.* T. XLVI, pag. 352); le quali possono produrre una pioggia che attraversando strati più freddi si convertisse in grandine o *grésil*. A questo innalzamento di temperatura degli strati superiori contribuisce anche il calorico latente che nella decomposizione del vapore si rende libero, ed io aggiungerei la diminuzione di volume di quell'ammasso stesso di aria e acqua costituenti le nubi per diminuita elettricità, o per elettricità contraria.

Se anche secondo Gay Lussac (*Sulla formazione delle nubi temporalesche. Annal. de Chimie et Phys.* T. VIII, pag. 172) *i venti che accompagnano i temporali sono evidentemente il risultato del vôto occasionato nell'aria per la condensazione dell'acqueo vapore*; potranno ben anch'essere il risultato di un antecedente espansione elettrica dei vapori medesimi, come sembra anche da quanto Spallanzani aveva fatto rimarcare nel luogo da me già citato. Che se questa espansione e questo gonfiamento delle nubi tempestose non è sempre appariscente, oltre quanto già dissi, basterà in prova il considerare, che neppur quando le nubi si struggono in dirotta pioggia si scorge talvolta la loro diminuzione, come anche nei temporali con grandine: eppure devono scemar rapidamente quelle nubi di volume, se senza venir dal vento altrove trasportate, ritorna il cielo sereno.

Finisco pertanto col dire che ho voluto pubblicare questa mia ipotesi sulla formazione della grandine, prima che l'Istituto di Francia decida in quest'anno sul merito delle Memorie che gli saranno pervenute sul medesimo argomento; perchè quando mai avvenisse, che già per la seconda volta nulla fosse stato presentato meritevole di premio, io prenderò animo, in mancanza di meglio, a convalidare questa mia ipotesi di altre prove, e specialmente col dimostrare l'insufficienza delle altre ipotesi finora state proposte.

PARTE SECONDA

AVVERTIMENTO

Essendosi cominciato a pubblicare in questa collezione alcune Memorie del sig. Cauchy *che contengono formole prese dal* Calcolo dei residui*: ed anche per soddisfare al desiderio di qualcuno, crediamo di non differire più oltre la pubblicazione del seguente articolo. Interrompiamo così per questa volta il* Trattato sugli integrali definiti *che riprenderemo nel fascicolo venturo.*

SUI PRINCIPJ E SUGLI USI
DEL CALCOLO DEI RESIDUI

(*DA VARIE MEMORIE DEL SIG.* A. L. CAUCHY)

DI GABRIO PIOLA

Cercherò in questo articolo di mettere le teoriche d'analisi spettanti al calcolo dei residui sotto quel punto di vista che a me sembra più chiaro, attaccando le nuove considerazioni ad altre universalmente ricevute e insegnate nelle scuole italiane.

[1]. Il calcolo delle funzioni analitiche può prendere un'assai grande estensione se s'immagina che dopo le derivazioni le variabili assumano valori particolari, e si considerano le derivate dopo questa sostituzione. Le $f'(x)$, $f''(x)$, ecc. derivate di $f(x)$, sono funzioni della stessa variabile x: ma se a derivazioni eseguite la x si pone eguale ad a, le $f'(a)$, $f''(a)$, ecc. sono quantità che sentono insieme e della derivazione e della sostituzione. In esse è sparita la lettera per cui si è derivato, e può essere anche cambiata la forma della funzione quando la a ha un valore particolare (per esempio lo zero o un numero) ovvero è una lettera, che esistendo di già fra le costanti della funzione, viene con esse a mischiarsi. La considerazione di queste derivate in cui la variabile prende un valore particolare occorre in varie occasioni. Così la serie che esprime una funzione $f(x)$ di x per le potenze ascendenti della medesima ha i coefficienti formati colle derivate nelle quali a derivazioni eseguite si pone $x=0$: la teorica dei contatti delle linee e superficie presenta frequentemente la stessa idea: e altre questioni d'analisi, d'alcuna delle quali faremo menzione in progresso. Ma siamo ben lungi dall'aver tirato da questo principio tutte le conseguenze di cui può essere fecondo; pare anzi che per esso si possano richiamare alle funzioni analitiche varie recenti invenzioni d'analisi: in particolare gran parte di quelle che formano l'oggetto del calcolo dei residui, siccome mi propongo di mostrare in questo scritto.

[2]. Ma prima mi è necessario conciliarmi l'indulgenza dei lettori per qualche novità introdotta nelle ordinarie notazioni. Sarebbe tempo (giacchè l'evidenza della ragione dovrebbe alla per fine vincerla sulla forza contraria dell'abitudine) sarebbe tempo che i geometri si risolvessero a sbarazzare le formole differenziali (sono parole di Lagrange (*)) da quella moltitudine di d che le

(*) *Résol. des équations* (2.e édit.) pag. 198.

allungano e le sfigurano. Ritengasi, come è di pratica, la notazione cogli apici tanto utile per provvedere alla brevità; ma siccome essa pure ha i suoi difetti, le si associi invece dell'antica quell'altra semplicissima, già usata da alcuni geometri, di esprimere colla lettera d posta innanzi a una funzione non il suo differenziale, ma la sua derivata, mettendo (ove sia conveniente per evitare un'equivoco) al piede della d la lettera per cui si intende eseguita la derivazione. Così saranno equivalenti le espressioni

$$d_x \cdot f(x) = \frac{d f(x)}{d x}; \qquad d_x^n \cdot f(x) = \frac{d^n f(x)}{d x^n}$$

$$d_x d_y \cdot f(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx\, dy}; \qquad d_x^n d_y^m \cdot f(x) = \frac{d^{m+n} f(x)}{dx^n\, dy^n}$$

$$d_x d_y d_z \cdot f(x) = \frac{d^3 f(x)}{dx dy dz}; \quad d_x^n d_y^m d_z^p \cdot f(x) = \frac{d^{m+n+p} f(x)}{dx^n\, dy^m\, dz^p}$$

ecc. ecc.

È poi tanto più ragionevole una tale notazione in quanto essa è perfettamente corrispondente a quella adottata nel calcolo delle differenze finite (*).

Io però non insisterei su questo cambiamento se non si trattasse, come in questo scritto, di derivate nelle quali ad operazioni finite le variabili debbono farsi eguali ad altre quantità. In tal caso la notazione ora proposta con leggierissima aggiunta presenta così fatti vantaggi sopra d'ogni altra, che per non rinunciarvi mi sono trovato sforzato ad abbracciarla, superando ogni contrario riguardo. Scrivo io pertanto

$$d_{x=a}^n \cdot f(x)$$

per significare la derivata *(n)esima* di $f(x)$ presa per riguardo ad x, fatta ad operazione finita $x=a$. Scrivo

$$d_{x=a}^n d_{y=b}^m \cdot f(x, y)$$

a fine di esprimere la derivata parziale *(m)esima* per y ed *(n)esima* per x, fatta $y=b$ dopo le derivazioni per y, ed $x=a$ dopo quelle per x; ecc.

Ho parlato di vantaggi: le prove di fatto sogliono essere le migliori. Prendasi il teorema di Laplace per l'espressione del coefficiente q_n di α^n nello sviluppo secondo le potenze di α di una funzione $u[\alpha, x(\alpha)]$ ove la funzione implicita $x(\alpha)$ è data da una equazione $\varphi(x, \alpha) = 0$ il cui primo membro riducesi alla forma $(x-a)^i A$ quando $\alpha = 0$ (**); avremo

$$q_n = \frac{1}{1 \cdot 2 \cdots n} d_{\alpha=0}^n \cdot u - \frac{n}{(1 \cdot 2 \cdots n)^2 i} d_{x=a}^{n-1} \cdot \left\{ (x-a)^n d_{\alpha=0}^n \cdot \left(1 . \varphi(x, \alpha) d_x u \right) \right\}.$$

Confrontando questa espressione con quella recata nel luogo citato ognuno può vedere quanto è meno complicata: e notisi che in essa *è scritto tutto*, talchè non

(*) Lacroix. *Traité du Calcul.* T. III, pag. 51.

(**) *Mémoires de l'Académie des sciences.* Année 1777, pag. 121. Il teorema è dimostrato anche in questi Opuscoli T. II.° pag. 31.

abbisognano quelle parole indispensabili in aggiunta della formola di Laplace, *ritenendo di supporre* $\alpha=0$ *dopo le differenziazioni relative ad* α, *ed* $x=a$ *dopo tutte le differenziazioni.*

I geometri hanno ormai generalmente abbracciata la notazione di Fourier per gl'integrali definiti a motivo che con essa si vedono nella formola stessa espressi i limiti, e si risparmia di aggiungere ad ogni integrale quelle parole, *definito fra i limiti tale, e tale*; una ragione affatto simile dovrebbe persuadere la notazione che io qui propongo. Ad ogni modo chieggo che mi sia permesso farne uso almeno in questo scritto: e forse, superato il primo senso di novità e consideratone il comodo, potrebbe altri seguire l'esempio.

[3]. Sembra che si dovrebbe cominciare dal dare la definizione del *residuo*, e dal chiarire la nuova notazione introdotta dal sig. Cauchy: ma io penso che sia meglio differire queste spiegazioni, giacchè esse da principio pajono arbitrarie e senza scopo. Io ritengo che la miglior maniera d'interessare il lettore nello studio del nuovo calcolo sia quella di fissar prima bene l'indole delle ricerche analitiche che vi si trattano senza far uso di nuovi simboli. Vedesi allora nel seguito la ragione che ha determinato l'Autore a fermare particolarmente l'attenzione sopra quantità che si producono tutte allo stesso modo, e a stabilire una nuova definizione e una nuova notazione.

Il fondamento di tutto è una trasformazione che può farsi di una funzione $f(x)$ la quale diventa infinita per alcuni valori particolari della variabile. Sia

$$(1) \qquad f(x)=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n},$$

dove $\varphi(x)$ non contiene il fattore $x-a$ ed n è numero intero positivo: dico che $\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}$ può scomporsi in due parti A, X, talchè l'equazione

$$(2) \qquad \frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}=A+X$$

sia identica, e le A, X abbiano le seguenti proprietà. Deve la A per $x=a$ diventare infinita, e diventar zero per $x=\infty$: e invece la X deve per $x=a$ assumere un valore finito. Mettasi dentro $\varphi(x)$ $a+x-a$ in luogo di x e svolgasi $\varphi(a+x-a)$ secondo le potenze di $x-a$ arrestando lo sviluppo dopo l'(n) *esimo* termine; avremo primieramente una somma di termini frazionarii che ci presentano nei denominatori diverse potenze di $x-a$, e sono quelli la cui somma si è voluta indicare colla A: il resto è espresso con X. È dunque (*)

$$(3) \quad A=\frac{\varphi(a)}{(x-a)^n}+\frac{\varphi'(a)}{(x-a)^{n-1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi''(a)}{(x-a)^{n-2}}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\cdot\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{x-a}$$

$$(4) \quad X=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)}\int_0^1 dt\cdot t^{n-1}\,\varphi^{(n)}\big(x-(x-a)t\big).$$

(*) Vedi il Tomo I.° de' presenti Opuscoli, pag. 85, formola (h).

Che questa A goda delle due proprietà summentovate, è cosa evidente: la Y per $x=a$ prende il valore finito $\frac{\varphi^{(n)}(a)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$.

[4]. Noteremo, perchè ci è necessario nel progresso, che se aggiungasi o sottraggasi alla $\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}$ una funzione $\chi(x)$ che non diventa infinita per $x=a$, e della $\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n}+\chi(x)$ intendasi fatta la scomposizione come nella (2), la parte A rimane come prima, e non resta alterata che la X.

[5]. Il sig. Cauchy ha osservato un bel teorema per mezzo del quale la quantità A che nella (3) è sotto forma polinomia può scriversi compendiosamente così

$$(5)\qquad A=\frac{1}{\Gamma(n)}\,d^{n-1}_{z=a}\cdot\frac{\varphi(z)}{x-z}$$

dove z è una nuova lettera sostituita dentro la φ al posto della x, e questa che entra solo nel denominatore, è trattata come una costante mentre si prendono le derivate per z. La $\Gamma(n)$, essendo n numero intero, ha il valore $1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)$ quando $n>1$, ed ha il valore 1 quando $n=1$ (*).

Dimostrazione. Osservisi che la derivata $(n-1)$ *esima* di $\frac{\varphi(z)}{x-z}$ presa per z, indicando cogli apici le derivazioni per z, può scriversi dietro formola nota

$$\left(\frac{\varphi(z)}{x-z}\right)^{(n-1)}=\varphi(z)\left(\frac{1}{x-z}\right)^{(n-1)}+(n-1)\varphi'(z)\left(\frac{1}{x-z}\right)^{(n-2)}+(n-1)\frac{(n-2)}{2}\varphi''(z)\left(\frac{1}{x-z}\right)^{(n-3)}$$
$$+\cdots+(n-1)\,\varphi^{(n-2)}(z)\left(\frac{1}{x-z}\right)'+\varphi^{(n-1)}(z)\,\frac{1}{x-z}$$

la quale a motivo della formola generale

$$\left(\frac{1}{x-z}\right)^{(m)}=\frac{2\cdot 3\cdots m}{(x-z)^{m+1}}$$

si trasforma in un'altra che divisa per $1\cdot 2\cdot 3\cdots(n-1)$ riesce

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\left(\frac{\varphi(z)}{x-z}\right)^{(n-1)}=\frac{\varphi(z)}{(x-z)^n}+\frac{\varphi'(z)}{(x-z)^{n-1}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\varphi''(z)}{(x-z)^{n-2}}$$
$$+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-2)}\cdot\frac{\varphi^{(n-2)}(z)}{(x-z)^2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdots(n-1)}\cdot\frac{\varphi^{(n-1)}(z)}{x-z}.$$

Se ora in questa facciasi $z=a$, le due quantità eguali sono evidentemente i secondi membri delle (3), (5).

[6]. L'espressione (5) si può mettere sotto la seguente forma

$$(6)\qquad A=\frac{1}{\Gamma(n)}\,d^{n-1}_{z=a}\cdot\frac{f(z)(z-a)^n}{x-z}$$

(*) Vedi il Tomo I.° de' presenti Opuscoli pag. 186, formola (*i*); pag. 185, formola (*d*).

avendo sostituito a $\varphi(z)$ l'espressione equivalente per la (1). Questa (6) si adopera piu utilmente della (5) in quanto vi è in essa la stessa forma f della funzione originariamente proposta; il numeratore della frazione posta sotto il segno differenziale, quantunque paja più complicato che nella (5), non lo è realmente, come vedesi in tutte le applicazioni, perchè il fattore $(z-a)^n$ elimina un egual divisore, e rimane una funzione di z più semplice della stessa $f(z)$.

[7]. Presentemente abbia la $f(x)$ la seguente forma

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n(x-b)^p}$$

per cui essa diventi infinita tanto per $x=a$, quanto per $x=b$. Potremo mediante il principio stabilito nella (2) scomporla in due parti

$$(7)\qquad \frac{\varphi(x)}{(x-a)^n(x-b)^p}=A+X$$

essendo (equazione (5))

$$A=\frac{1}{\Gamma(n)}\,d^{n-1}_{z=a}\cdot\frac{\varphi(z)}{(x-z)(z-b)^p}=\frac{1}{\Gamma(n)}\,d^{n-1}_{z=a}\cdot\frac{f(z)(z-a)^n}{x-z}.$$

Questa A, per l'ispezione della (3), si vede avere la proprietà rimarcabile che diventa infinita per $x=a$, ma non per $x=b$, nè per nessun altro valore di x. La X poi non diventa infinita per $x=a$, ma lo diventa per $x=b$. Se ne cavi il valore dalla precedente (7):

$$(8)\qquad X=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n(x-b)^p}-A=\frac{\varphi(x)-A(x-a)^n(x-b)^p}{(x-a)^n(x-b)^p};$$

e dovremo conchiudere che in quest'ultima espressione le quantità del numeratore si combineranno di maniera che ne emerga un fattore $(x-a)^n$ capace da eliminare quello eguale del denominatore.

Siccome poi X è una funzione di x che diventa infinita per $x=b$, si può, dietro lo stesso principio della equazione (2), domandare di estrarne la parte B che diventa infinita per $x=b$, e zero per $x=\infty$, aggiungendovi un resto $\varpi(x)$. Osservando la prima espressione di X nelle (8), e rammentandoci il detto al num. [4], siccome A non diventa infinita per $x=b$, la parte B sarà quella che cavasi dal solo primo termine del valore di X, sarà cioè

$$B=\frac{1}{\Gamma(p)}\,d^{p-1}_{z=b}\cdot\frac{\varphi(z)}{(x-z)(z-a)^n}=\frac{1}{\Gamma(p)}\,d^{p-1}_{z=b}\cdot\frac{f(z)(z-b)^p}{x-z}.$$

Il resto $\varpi(x)$ sarà una funzione che non diventa infinita per $x=b$. Ma, siccome si è detto, tutta la quantità $B+\varpi(x)$ non diventa infinita per $x=a$, e nemmeno la sola B, come scorgesi dall'ispezione del suo valore. Dunque $\varpi(x)$ è tal funzione di x che non diventa infinita nè per $x=a$, nè per $x=b$. Sostituendo nella (7) ad X la quantità equivalente di cui ora si è parlato, abbiamo l'equazione identica

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}\,d^{n-1}_{z=a}\cdot\frac{f(z)(z-a)^n}{x-z}+\frac{1}{\Gamma(p)}\,d^{p-1}_{z=b}\cdot\frac{f(z)(z-b)^p}{x-z}+\varpi(x).$$

[8]. Non è difficile estendere il precedente ragionamento al caso in cui $f(x)$ diventi infinita anche per un altro valore $x=c$: e così conchiudere il seguente teorema generale.

Potendosi dare alla $f(x)$ la forma

$$(9) \qquad f(x)=\frac{\varphi(x)}{(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q\cdots},$$

ove $n, p, q, \cdots$ sono numeri interi positivi, e $\varphi(x)$ non è più divisibile per alcuno dei fattori $x-a$, $x-b$, $x-c$, $\cdots$ del denominatore; avremo una importantissima trasformazione espressa dalla equazione identica

$$(10) \qquad f(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}\,d^{n-1}_{z=a}\cdot\frac{f(z)(z-a)^n}{x-z}+\frac{1}{\Gamma(p)}\,d^{p-1}_{z=b}\cdot\frac{f(z)(z-b)^p}{x-z}$$
$$+\frac{1}{\Gamma(q)}\,d^{q-1}_{z=c}\cdot\frac{f(z)(z-c)^q}{x-z}+\cdots+\varpi(x),$$

essendo $\varpi(x)$ una funzione di x, che in generale non conosciamo se non dipendentemente dalla stessa equazione, ma di cui sappiamo che non diventa infinita per nessun valore particolare di x espresso dalle $a, b, c \cdots$.

Così la $f(x)$ che diventa infinita per $x=a$, $x=b$, $x=c$, ecc. è scomposta in varie parti di cui la prima diventa infinita per $x=a$, e non lo diventa per nessun altro valore di x, la seconda per $x=b$ e non per alcun altro valore di x, ecc. Vi è poi un resto che non diventa infinito per nessuno di detti valori.

Osserviamo che nella (10) i numeratori delle frazioni sotto i segni differenziali sono funzioni più semplici della stessa $f(z)$ secondo il già detto al num. [6]: osserviamo di più che ad ogni termine di quella (10) si può cambiare la lettera z in un'altra qualunque, giacchè essa vi entra solo istrumentalmente ed è destinata a svanire.

[9]. Nel caso in cui $n=p=q=\cdots=1$, ossia quando la (9) diventa

$$f(x)=\frac{\varphi(x)}{(x-a)(x-b)(x-c)\cdots},$$

la precedente (10) ci dà

$$(11) \quad f(x)=d^0_{z=a}\cdot\frac{f(z)(z-a)}{x-z}+d^0_{z=b}\cdot\frac{f(z)(z-b)}{x-z}+d^0_{z=c}\cdot\frac{f(z)(z-c)}{x-z}+\cdots+\varpi(x).$$

Adunque non si fa allora alcuna operazione di derivazione, ma spogliata $f(z)$ nel suo denominatore del fattore $z-a$, vi si pone $z=a$: e si divide per $x-a$; spogliata del fattor simile $z-b$, vi si pone $z=b$ e si divide per $x-b$, ecc; la somma di tutti i termini risultanti, aggiuntovi (se non è zero) il resto $\varpi(x)$ è la trasformata di $f(x)$.

Ciò che ora si è detto può anche servire a mostrare come debbasi interpretare alcuno dei termini della (10) quando alcuno soltanto dei numeri $n, p, q \cdots$ nella (9) è l'unità.

[10]. Abbiamo accennata pel resto $\varpi(x)$ la possibilità di diventar zero. Quantunque questa funzione $\varpi(x)$ in generale non si conosca, si danno circostanze per le quali si prova zero con ragionamenti particolari.

Prima di tutto è essenziale distinguere nella (9) due casi: quando $f(x)$ che diventa infinita per $x=a$, $x=b$, $x=c$, ---, può diventarlo per altri valori particolari di x oltre gli accennati, valori che renderanno infinito il numeratore $\varphi(x)$: e quando si sono contemplati nella (9) *tutti* i valori di x che rendono infinita $f(x)$, talchè non è possibile assegnarne altri. In ambi i casi sta la formola (10) che nel primo è composta di un numero minore di termini che nel secondo: la $\varpi(x)$ è poi molto differente nei due casi.

Sia il secondo caso: sia cioè la (9) tale che il numeratore $\varphi(x)$ non possa diventare infinita per nessun valore particolare e finito di x. Le funzioni sin.x, cos.x, e simili, e tutte le funzioni razionali intere sono manifestamente dell'indicata natura.

Suppongasi

$$(12) \qquad f(x)=\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$$

essendo $\varphi(x)$, $\psi(x)$ due funzioni razionali intere di x: la $\psi(x)$ non potrà differire dal prodotto $(x-a)^n(x-b)^p(x-c)^q$ --- se non per qualche fattore costante. Ecco un importante teorema.

Se il grado della $\varphi(x)$ è minore anche solo di un'unità del grado di $\psi(x)$, il resto $\varpi(x)$ è sempre zero: se i gradi di $\varphi(x)$, $\psi(x)$ sono eguali, il resto $\varpi(x)$ non può essere che una costante.

Dimostrazione. Se $\varpi(x)$ vi fosse, non potrebbe essere che una funzione razionale, giacchè tali sono tutte le altre funzioni di x nell'equazione identica (10). Dunque potrebbe mettersi sotto la forma $\frac{\theta(x)}{\chi(x)}$, essendo $\theta(x)$, $\chi(x)$ funzioni intere. Ma è manifesto che $\varpi(x)$ non può essere una funzione fratta come la precedente, perchè allora la proposta $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ diventerebbe infinita anche pei valori particolari di x radici dell'equazione $\chi(x)=0$, i quali, stante la proprietà di $\varpi(x)$ (num. [8]) non sarebbero fra i contemplati; dunque non sarebbe più vero che siansi esauriti per formare i termini del 2.° membro della (10) tutti i valori particolari di x che rendono $f(x)$ infinita, il che è contro l'ipotesi. Resta che $\varpi(x)$ sia una funzione intera: ma si prova subito che nemmeno tale può essere, perchè diventerebbe infinita per $x=\infty$, mentre per tal valore di x il primo membro della (10) è zero nel primo caso del teorema e una quantità finita nel secondo, e tutti gli altri termini sono zero. È quindi manifesta la conclusione comprovante il teorema.

[11]. La (10) ove nel primo membro sostituiscasi ad $f(x)$ la $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ (equazione (12)), e intendendosi contemplate tutte le radici diseguali della $\psi(x)=0$,

sia pel teorema antecedente $\varpi(x)=0$, è una formola che contiene varie importanti teoriche d'analisi.

E primieramente tutta la teorica della scomposizione delle frazioni razionali. Ecco l'esempio recato dal sig. Cauchy.

Si suppone

$$f(x)=\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}.$$

Abbiamo $a=-1$, $b=1$; quindi subito dalla (10)

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}=d^0_{z=-1}\cdot\frac{1}{(x-z)(z-1)^2}+d^1_{z=1}\cdot\frac{1}{(x-z)(z+1)}.$$

Il primo termine del secondo membro ove non havvi alcuna derivazione a fare, ma solo la sostituzione di -1 a z, dà immediatamente $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}$; il secondo, eseguita la derivazione per z, presenta i due termini

$$\frac{1}{z+1}\cdot\frac{1}{(x-z)^2}-\frac{1}{x-z}\cdot\frac{1}{(z+1)^2},$$

che, fatta $z=1$, diventano $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}$. Adunque

$$\frac{1}{(x+1)(x-1)^2}=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{(x-1)^2}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{x-1}.$$

Il lettore converrà forse con noi che questa teorica è così ridotta alla sua perfezione.

[12]. Suppongasi

$$\psi(x)=(x-a)(x-b)(x-c)\cdots(x-h);$$

dalla (10), ovvero dalla (11) avremo subito un'equazione che moltiplicata tutta per $(x-a)(x-b)\cdots(x-h)$ dà

$$\varphi(x)=\frac{(x-b)(x-c)\cdots(x-h)}{(a-b)(a-c)\cdots(a-h)}\varphi(a)+\frac{(x-a)(x-c)\cdots(x-h)}{(b-a)(b-c)\cdots(b-h)}\varphi(b)$$
$$+\cdots+\frac{(x-a)(x-c)\cdots(x-g)}{(h-a)(h-b)\cdots(h-g)}\varphi(h)$$

che è la formola d'interpolazione trovata da Lagrange (*). Essa è rigorosamente esatta, quando come qui si è supposto, $\varphi(x)$ è funzione intera di x di grado minore di $(x-a)(x-b)\cdots(x-h)$. Quando $\varphi(x)$ è incognita, ma si conoscono i suoi valori $\varphi(a), \varphi(b), \cdots \varphi(h)$ corrispondenti ai valori $a, b, c \cdots h$ di x, essa dà spesso il valore di $\varphi(x)$ con grande approssimazione. È fuori del mio assunto il trattenermi qui a indicare le condizioni che debbono essere soddisfatte perchè ciò si verifichi.

(*) Lacroix. *Traité du Calcul.* T. III, pag. 36.

[13]. Il ragionamento del num. [10] può estendersi al caso in cui $f(x)$ non è una funzione razionale come la (12) ma una funzione tale che diventa zero per $x=\infty$, essendo della forma $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ dove $\psi(x)$ diventa infinita per x infinita. Anche in tal caso deve necessariamente $\varpi(x)$ essere zero. Infatti supponiamo che vi fosse: dovrebbe diventar zero per $x=\infty$, tali diventando per supposizione e per dimostrazione il primo membro e tutti gli altri termini della (10). Ma l'equazione $\varpi(\infty)=0$, considerata la natura di tutti gli altri termini della (10), non potrebbe essere soddisfatta se $\varpi(x)$ non fosse della forma $\frac{\theta(x)}{\chi(x)}$, dove $\chi(x)$ diventasse infinita per x infinita. Supposta pertanto a $\varpi(x)$ una tal forma, ne verrebbe di conseguenza che $f(x)$ diventerebbe infinita anche per valori di x radici della equazione $\chi(x)=0$, e non sarebbe più vero che nella formazione del secondo membro della (10) si fossero contemplati tutti i casi in cui $f(x)$ diventa infinita; il che è contro l'ipotesi.

In tal maniera crescono a dismisura le applicazioni della formola (10), e se ne cava la somma di un gran numero di serie infinite. Sia per esempio

$$f(x)=\frac{1}{e^x-e^{-x}}$$

funzione che diventa zero per $x=\infty$. A cercare tutti i casi in cui $f(x)$ diventa infinita bisogna trovare tutte le radici della equazione

$$e^x-e^{-x}=0;$$

e queste sono di numero infinito; cioè

$$x=0;\ \pi\sqrt{-1},\ -\pi\sqrt{-1};\ 2\pi\sqrt{-1},\ -2\pi\sqrt{-1};\ 3\pi\sqrt{-1},\ -3\pi\sqrt{-1};\ \text{ecc.},$$

talchè

$$e^x-e^{-x}=Ax(x-\pi\sqrt{-1})(x+\pi\sqrt{-1})(x-2\pi\sqrt{-1})(x+2\pi\sqrt{-1})\cdots$$

essendo A un coefficiente indipendente da x. Per l'applicazione della (10), o piuttosto della (11) (giacchè nel presente caso ogni radice non occorre che una sol volta) osserviamo essere

$$f(z)z=\frac{z}{e^z-e^{-z}};\ f(z)(z-\pi\sqrt{-1})=\frac{z-\pi\sqrt{-1}}{e^z-e^{-z}};\ \cdots f(z)(z\pm n\pi\sqrt{-1})=\frac{z\pm n\pi\sqrt{-1}}{e^z-e^{-z}},$$

che rispettivamente (mediante la nota regola) si provano avere per $z=0,\ \pi\sqrt{-1},\ \cdots \mp n\pi\sqrt{-1}$ i valori

$$\frac{1}{2};\ -\frac{1}{2};\ \cdots \frac{1}{2\cos.n\pi};$$

Quindi la (11) dà subito

$$\frac{1}{e^x-e^{-x}}=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x-\pi\sqrt{-1}}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+\pi\sqrt{-1}}-\cdots$$

$$+\frac{1}{2\cos.n\pi}\left\{\frac{1}{x-n\pi\sqrt{-1}}+\frac{1}{x+n\pi\sqrt{-1}}\right\}+\text{ecc.}$$

ossia

$$(13)\qquad \frac{1}{e^x-e^{-x}}=\frac{1}{2x}-x\left\{\frac{1}{x^2+\pi^2}-\frac{1}{x^2+4\pi^2}+\frac{1}{x^2+9\pi^2}-\text{ecc.}\right\}$$

espressione nota, e dovuta ad Eulero.

Similmente se prendasi

$$f(x)=\frac{1}{e^x+e^{-x}}$$

che pure diventa zero per $x=\infty$; troveremo che le radici della equazione

$$e^x+e^{-x}=0$$

sono di numero infinito, cioè

$$x=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1},\ -\frac{\pi}{2}\sqrt{-1};\ \frac{3\pi}{2}\sqrt{-1},\ -\frac{3\pi}{2}\sqrt{-1};\ \cdots\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\sqrt{-1};\ -\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\sqrt{-1};\ \text{ecc.}$$

talchè

$$e^x+e^{-x}=A\left(x-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\right)\left(x+\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\right)\left(x-\frac{3\pi}{2}\sqrt{-1}\right)\left(x+\frac{3\pi}{2}\sqrt{-1}\right)\cdots$$

essendo A un coefficiente indipendente da x. In seguito per l'applicazione della formola (11) converrà trovare i valori di

$$f(z)\left(z-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}\right)=\frac{z-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}{e^z+e^{-z}};\ \cdots f(z)\left(z\mp\frac{2n+1}{2}\pi\sqrt{-1}\right)=\frac{z\mp\frac{2n+1}{2}\pi\sqrt{-1}}{e^z+e^{-z}}$$

corrispondentemente ai valori di

$$z=\frac{\pi}{2}\sqrt{-1},\ -\frac{\pi}{2}\sqrt{-1};\ \cdots\pm\frac{2n+1}{2}\pi\sqrt{-1};$$

e si avranno (per la nota regola) espressi da

$$\frac{1}{2\sqrt{-1}},\ -\frac{1}{2\sqrt{-1}};\ \cdots\pm\frac{1}{2\sqrt{-1}\cos.n\pi}.$$

Laonde la (11) darà

$$\frac{1}{e^x+e^{-x}}=\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{x-\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{x+\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}$$

$$-\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{x-\frac{3\pi}{2}\sqrt{-1}}+\frac{1}{2\sqrt{-1}}\cdot\frac{1}{x+\frac{3\pi}{2}\sqrt{-1}}+\text{ecc.}$$

ossia

$$(14)\qquad \frac{1}{e^x+e^{-x}}=2\pi\left\{\frac{1}{4x^2+\pi^2}-\frac{3}{4x^2+9\pi^2}+\frac{5}{4x^2+25\pi^2}-\text{ecc.}\right\}$$

espressione parimenti nota. Le (13), (14) sono comprese nella prima e nella quarta delle formole (*ii*) date al num. 136 del *Trattato sugli integrali definiti* (*): basta porvi $a=0$, $b=1$.

(*) Vedi questi Opuscoli T. II.° pag. 117.

[14]. Anche ad altri casi può estendersi l'uso della formola (10): ma i soli fin qui adotti bastano a convincerci esservi in quella trasformazione un importante principio d'analisi; con questa assicurazione ci sentiremo più disposti ad accettare i nuovi simboli del Cauchy.

Abbiasi il caso in cui $\varpi(x)$ nella (10) sia zero per essere $f(x)$ una funzione che diventa zero per $x=\infty$: la $xf(x)$ potrà anch'essa essere zero per $x=\infty$, e potrà anche avere un valore finito che chiamo F; così nella supposizione della (12) ha luogo il primo caso se delle due funzioni intere $\varphi(x)$, $\psi(x)$ il grado della prima è minor di due unità di quello della seconda, ed ha luogo il secondo se i due gradi diversificano solo di un'unità.

Si moltiplichi la (10) per x: dico che l'equazione identica

$$(15)\qquad xf(x)=\frac{x}{\Gamma(n)}\,d^{n-1}_{z=a}\cdot\frac{f(z)(z-a)^n}{x-z}+\frac{x}{\Gamma(p)}\,d^{p-1}_{z=b}\cdot\frac{f(z)(z-b)^p}{x-z}$$
$$+\frac{x}{\Gamma(q)}\,d^{q-1}_{z=c}\cdot\frac{f(z)(z-c)^q}{x-z}+\text{ecc.}$$

riducesi per $x=\infty$ alla

$$(16)\qquad F=\frac{1}{\Gamma(n)}\,d^{n-1}_{z=a}\cdot f(z)(z-a)^n+\frac{1}{\Gamma(p)}\,d^{p-1}_{z=b}\cdot f(z)(z-b)^p$$
$$+\frac{1}{\Gamma(q)}\,d^{q-1}_{z=c}\cdot f(z)(z-c)^q+\text{ecc.}$$

Ciò potrebbe provarsi trasportando nei successivi termini della (15) la x dal coefficiente sotto il segno differenziale relativo ad altra variabile, ed osservando che la frazione $\frac{x}{x-z}$ ha il valore 1 quando $x=\infty$. Se a qualcuno non aggrada questo modo di dimostrazione, richiami l'equazione (3), e capirà per essa potersi la quantità $\frac{x}{\Gamma(n)}\,d^{n-1}_{z=a}\cdot\frac{f(z)(z-a)^n}{x-z}$ scrivere come segue

$$\frac{x}{(x-a)^n}d^0_{z=a}\cdot f(z)(z-a)^n+\frac{x}{(x-a)^{n-1}}d^1_{z=a}\cdot f(z)(z-a)^n+\frac{1}{2}\cdot\frac{x}{(x-a)^{n-2}}d^2_{z=a}\cdot f(z)(z-a)^n+\cdots$$
$$\cdots+\frac{1}{1\cdot2\cdots(n-2)}\cdot\frac{x}{(x-a)^2}d^{n-2}_{z=a}\cdot f(z)(z-a)^n+\frac{1}{1\cdot2\cdots(n-1)}\cdot\frac{x}{x-a}d^{n-1}_{z=a}\cdot f(z)(z-a)^n.$$

Qui è manifesto che per $x=\infty$ tutti i termini sono zero tranne l'ultimo che diventa come sopra si è detto: dicasi a un di presso degli altri termini della (15) per passare alla (16).

[15]. Questo restare del solo ultimo termine della precedente espressione è stato probabilmente il motivo per cui il sig. Cauchy fermò una particolare attenzione sull'ultimo termine della (3), e fatta astrazione dal denominatore $x-a$, lo chiamò il *residuo parziale della* f(x) *preso per* x=a. Ritengasi adunque.

« Scomposta una funzione $f(x)$ nei due fattori $\varphi(x)$, $\frac{1}{(x-a)^n}$ il primo dei « quali non diventa infinito per $x=a$, e il secondo sì, l'espressione

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\,d^{n-1}_{z=a}\cdot f(z)(z-a)^n,\quad\text{ovvero}\quad\frac{\varphi^{(n-1)}(x)}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)}$$

« ove la variabile prenda il valore particolare a che rende infinito il secondo « fattore, chiamasi il residuo parziale della $f(x)$ per $x=a$. »

[16]. La somma di tutti i termini che costituiscono il secondo membro della (16) è la somma di tutti i residui parziali della $f(x)$ pei diversi valori di x che la rendono infinita, reali e immaginarj, *nessuno escluso*; questa somma chiamasi dal sig. Cauchy *il residuo integrale della* f(x), e si indica colla notazione

$$\mathcal{E}\left(\left(f(x)\right)\right)$$

talchè si ha

$$(17) \qquad \mathcal{E}\left(\left(f(x)\right)\right)$$

$$=\frac{1}{\Gamma(n)}\,d^{n-1}_{z=a}\cdot f(z)\,(z-a)^n+\frac{1}{\Gamma(p)}\,d^{p-1}_{z=b}\cdot f(z)\,(z-b)^p+\frac{1}{\Gamma(q)}\,d^{q-1}_{z=c}\cdot f(z)\,(z-c)^q+\cdots.$$

ove si sarebbe potuto senza inconvenienti mettere dappertutto x in luogo della lettera z.

Ripeteremo con questo modo di scrivere il teorema della equazione (16). Se $f(x)$ è una funzione che diventa zero per $x=\infty$, ed F è il valore di $xf(x)$ per $x=\infty$: abbiamo

$$(18) \qquad F=\mathcal{E}\left(\left(f(x)\right)\right).$$

[17]. È da notarsi la maniera colla quale l'Autore indica una somma che non è il residuo integrale, ma è però la somma complessiva di molti residui parziali. Presentando $f(x)$ come prodotto di due fattori $\varphi(x)$, $\psi(x)$, talchè $f(x)=\varphi(x)\,\psi(x)$, l'espressione $\mathcal{E}\left(\left(f(x)\right)\right)$, ovvero $\mathcal{E}\left(\left(\varphi(x)\,\psi(x)\right)\right)$ direbbe un residuo integrale che si estenderebbe a tutte le radici disuguali della

$$\frac{1}{\varphi(x)\,\psi(x)}=0$$

cioè tanto alle radici disuguali della $\frac{1}{\varphi(x)}=0$, quanto a quelle della $\frac{1}{\psi(x)}=0$. Scrivendo invece $\mathcal{E}\varphi(x)\left(\left(\psi(x)\right)\right)$, dove le doppie parentesi circondano soltanto il secondo fattore, vuolsi esprimere la somma dei residui parziali relativi alle radici disuguali della sola equazione $\frac{1}{\psi(x)}=0$. Notisi che in questo caso il primo fattore $\varphi(x)$ non entra a somministrar termini per accrescere la somma dei residui parziali, ma figura però diversamente da quanto farebbe una costante, giacchè anche sopra di esso cadono le derivazioni che vedonsi espresse nella (17).

Ciò ben compreso, non si avrà difficoltà a capire che l'equazione (15) può scriversi

$$(19) \qquad xf(x)=\mathcal{E}\,\frac{x}{x-z}\left(\left(f(z)\right)\right)$$

e la (10), nel caso del residuo integrale,

$$(20) \qquad f(x)=\mathcal{E}\,\frac{\left(\left(f(z)\right)\right)}{x-z}+\varpi(x).$$

Si osservi che in quest'ultima le parentesi non circondano il fattore $\frac{1}{x-z}$, perchè la somma dei residui parziali non comprende quello relativo a $z=x$, valore particolare di z, che rende $\frac{f(z)}{x-z}$ infinita, il qual residuo (rivedi il num. [15]) sarebbe $-f(x)$. Adunque abbiamo l'equazione

$$\mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)}{x-z}\right)\right)=\mathcal{E}\frac{((f(z)))}{x-z}-f(x)$$

e la precedente formola (20) può scriversi

$$(21)\qquad \mathcal{E}\left(\left(\frac{f(z)}{x-z}\right)\right)+\varpi(x)=0.$$

[18]. L'Autore adotta anche un'altra notazione per significare una somma di residui parziali che non è il residuo integrale (17) ma contiene molti termini di esso, esclusi dalla somma alcuni altri. Abbiamo espresso con a, b, c, --- le diverse radici della

$$(22)\qquad \frac{1}{f(x)}=0\,;$$

ora queste radici saranno molte volte immaginarie, e ciò non toglie che anche per esse sussista l'equazione (10) e se ne possa far uso, siccome vedemmo negli esempj recati sotto il num. [13]. A fine di abbracciare la maggiore generalità conviene denotare quelle radici per

$$(23)\qquad a_1+b_1\sqrt{-1};\ a_2+b_2\sqrt{-1};\ a_3+b_3\sqrt{-1};\ \text{ecc.}$$

Se le radici della (22) sono reali, i b coefficienti del $\sqrt{-1}$ nelle (23) sono rispettivamente zero, e non lo sono nel caso opposto. Ciò premesso: il signor Cauchy scrive

$$(24)\qquad {}_{\alpha}^{\beta}\mathcal{E}_{m}^{n}\left(\left(f(x)\right)\right)$$

per indicare una somma di residui parziali, che non contiene tutti i temini del secondo membro della (17) ma *quelli soli nei quali la corrispondente radice della* (22) *ha la parte reale compresa fra i limiti* α, β; *e il coefficiente del* $\sqrt{-1}$ *compreso fra i limiti* m, n. Adunque una tal somma di residui parziali è sempre composta di un minor numero di termini che non il residuo integrale, tranne il solo caso in cui $\alpha=-\infty$, $\beta=\infty$; $m=-\infty$, $n=\infty$; allora

$$\mathcal{E}\left(\left(f(x)\right)\right)={}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{-\infty}^{\infty}\left(\left(f(x)\right)\right);$$

giacchè è evidente che con tali limiti non può essere esclusa alcuna radice.

[19]. Assunte le espressioni (23) per denotare le diverse radici della (22), la (10) si scrive

$$(25)\qquad f(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}\,d^{n-1}_{z=a_1+b_1\sqrt{-1}}\cdot\frac{f(z)(z-a_1-b_1\sqrt{-1})^n}{x-z}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(p)}\,d^{p-1}_{z=a_2+b_2\sqrt{-1}}\cdot\frac{f(z)(z-a_2-b_2\sqrt{-1})^p}{x-z}+\cdots+\varpi(x).$$

Siccome poi con leggiera attenzione si riconosce essere in generale

$$(26)\qquad d^h_{z=a+b\sqrt{-1}}\cdot\psi(z)=d^h_{z=a}\cdot\psi(z+b\sqrt{-1});$$

la precedente può presentarsi sotto la forma

$$(27)\qquad f(x)=\frac{1}{\Gamma(n)}\,d^{n-1}_{z=a_1}\cdot\frac{f(z+b_1\sqrt{-1})(z-a_1)^n}{x-z-b_1\sqrt{-1}}$$

$$+\frac{1}{\Gamma(p)}\,d^{p-1}_{z=a_2}\cdot\frac{f(z+b_2\sqrt{-1})(z-a_2)^p}{x-z-b_2\sqrt{-1}}+\cdots+\varpi(x)$$

la quale riprende l'aspetto della (10) quando facciansi zero tutti i coefficienti b_1, b_2, b_3 --- del $\sqrt{-1}$.

[20]. L'inventore del calcolo de' residui ne ha particolarmente mostrato l'uso per la determinazione dei valori di un gran numero d'integrali definiti; ma tante sono le formole, anche solamente le generali, dirette a questo scopo, e tante le avvertenze da farsi per ognuna a fine di evitare i casi di eccezione, che è al tutto impossibile in un articolo come il presente lo stenderne un' adequata informazione. Non volendo per altra parte tralasciare di esporre almeno un'idea di simili applicazioni; nel mentre sono costretto a rimettere il lettore alle memorie originali inserite nel primo tomo degli *Esercizj di Matematica*, arrischierò qui una formola dello stesso genere, che è veramente meno generale di taluna del nostro Autore, ma parmi di più facile dimostrazione, e meno soggetta ad anomalie.

Per tale oggetto mi conviene premettere il principio che integrando per x i due membri della formola (10) si può nel secondo passare ad integrare le quantità sottoposte ai segni di derivazione presa per tutt' altra lettera. Ce ne persuaderemo osservando, che supposto vero quanto si è asserito, il primo termine del secondo membro nell'equazione risultante sarebbe

$$\frac{1}{\Gamma(n)}\,d^{n-1}_{z=a}\cdot\varphi(z)\int dx\cdot\frac{1}{x-z}$$

avendo posto $\varphi(z)$ in luogo di $f(z)(z-a)^n$ per la (1). Se si svolga la derivata $(n-1)$ *esima* per z della quantità $\varphi(z)\int dx\cdot\frac{1}{x-z}$ considerata come il prodotto di due funzioni di z mediante una nota formola già usata anche al numero [5], e poi a derivazioni eseguite facciasi $z=a$ trovasi l'espressione

$$-\frac{\varphi(a)}{(n-1)(x-a)^{n-1}}-\frac{\varphi'(a)}{(n-2)(x-a)^{n-2}}-\frac{\varphi''(a)}{2(n-3)(x-a)^{n-3}}-\cdots$$

$$-\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{1\cdot2\cdot3\cdots(n-2)(x-a)}+\frac{\varphi^{(n-1)}(a)}{\Gamma(n)}\int dx\cdot\frac{1}{x-a}$$

la quale è quella stessa che si ottiene integrando per x la quantità equivalente al primo termine del secondo membro della (10), e scritta sotto forma polinomia giusta la (3).

Adunque è lecito passare integrando sotto i segni di derivazione: e se è lecito nella (10) lo è anche nella (25) che in fondo è la medesima: quindi anche nella (27) che non differisce dalla (25) se non per una diversa posizione di quantità costanti. Chi trovasse alquanto oscura quest'ultima conclusione eseguisca immediatamente sulla (27) lo stesso genere di verificazione esposta per la (10).

[21]. Integrando per x la (27) e definendo l'integrazione fra i limiti $-\infty$, ∞, convien fare attenzione a due casi: quando alcune delle radici della (22) sono tutte reali, e quando non si hanno che radici immaginarie. Nel primo caso la funzione $f(x)$ passa per l'infinito per uno o più valori di x compresi fra i limiti; epperò siamo nelle circostanze altrove discusse (*) della convenienza di cercare piuttosto il valore della quantità $S_{-\infty}^{\infty} dx \cdot f(x)$ che quello dell'integrale definito $\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot f(x)$. Nel secondo caso non havvi alcun valore di x fra quei limiti che renda $f(x)$ infinita, supponendosi, come già si suppone, sempre reale il corso della variabile. Però cercheremo dietro la (27) un valor generale di $S_{-\infty}^{\infty} dx \cdot f(x)$, e questo diverrà quello di $\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot f(x)$ quando la (22) non abbia che radici immaginarie.

Sia $f(x)$ una funzione che prenda il valore zero per $x=\infty$: allora (n.° [13]) $\varpi(x)=0$, e la (27) ci dà

$$(28) \qquad S_{-\infty}^{\infty} dx \cdot f(x) = \frac{1}{\Gamma(n)} d_{z=a_1}^{n-1} \cdot f(z+b_1\sqrt{-1})(z-a_1)^n \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \frac{1}{x-z-b_1\sqrt{-1}} + \text{ecc.}$$

epperò tutto si riduce alla ricerca dell'integrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \frac{1}{x-z-b\sqrt{-1}}$$

che troveremo distinguendo i tre casi di b positiva, di b negativa, e di b zero. Quando b è positiva, essendo

$$\frac{1}{x-z-b\sqrt{-1}} = \frac{x-z}{(x-z)^2+b^2} + b\sqrt{-1}\,\frac{1}{(x-z)^2+b^2}$$

abbiamo

$$(29) \qquad \int dx \cdot \frac{1}{x-z-b\sqrt{-1}} = \frac{1}{2}\log.[(x-z)^2+b^2] + \sqrt{-1}\,\text{Arc.tan.}\,\frac{x-z}{b}$$

e quindi, ritenendo $\frac{\pi}{2}$ l'arco la cui tangente è infinita,

$$(30) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \frac{1}{x-z-b\sqrt{-1}} = \pi\sqrt{-1}.$$

(*) *Opuscoli Matematici e Fisici*. Tomo I.° pag. 359.

Quando b è negativa l'ultimo termine della (29) cambia di segno, e ne risulta

$$(31) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \frac{1}{x-z-b\sqrt{-1}} = -\pi\sqrt{-1}$$

talchè è da notarsi che la quantità b nelle (30), (31) influisce sul valore dell'integrale definito col suo segno e non colla sua grandezza: gli analisti conoscono altri casi simili.

Se b è zero, la funzione sotto l'integrale passa per l'infinito, e conviene, siccome già si disse, calcolare $S_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \frac{1}{x-z}$ e non $\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \frac{1}{x-z}$; ciò che si ottiene usando (*) la

$$S_{-a}^{a}\, dx \cdot \frac{1}{x-z} = \int_{-a}^{z-i} dx \cdot \frac{1}{x-z} + \int_{z+i}^{a} dx \cdot \frac{1}{x-z}$$

dove a indica una qualunque quantità reale. Siccome

$$\int dx \cdot \frac{1}{x-z} = \log.(x-z)$$

avremo per la precedente

$$S_{-a}^{a}\, dx \cdot \frac{1}{x-z} = \log.(-i) - \log.(-a-z) + \log.(a-z) - \log.(i) = \log.\left(\frac{a-z}{a+z}\right)$$

valore che si approssima continuamente a log.1 ossia a zero quanto più a ingrandisce. Conchiuderemo essere

$$S_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \frac{1}{x-z} = 0$$

per cui spariscono dalla (28) tutti i termini dovuti a radici reali. Finalmente osservisi che le (30), (31) non sussistono più quando $b = \pm\infty$, giacchè non reggono allora più le deduzioni fatte dalla (29).

[22]. Raccogliendo le cose fin qui discorse si potrà dare alla (28) l'aspetto come segue

$$(32) \qquad S_{-\infty}^{\infty} dx \cdot f(x) = \pi\sqrt{-1} \times$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\Gamma(n)} d_{z=a_1}^{n-1} \cdot f(z+b_1\sqrt{-1})(z-a_1)^n + \frac{1}{\Gamma(p)} d_{z=a_2}^{p-1} \cdot f(z+b_2\sqrt{-1})(z-a_2)^p + \text{ecc.} \\ -\frac{1}{\Gamma(n')} d_{z=a'_1}^{n'-1} \cdot f(z-b'_1\sqrt{-1})(z-a'_1)^{n'} - \frac{1}{\Gamma(p')} d_{z=a'_2}^{p'-1} \cdot f(z-b'_2\sqrt{-1})(z-a'_2)^{p'} - \text{ecc.} \end{array} \right\}$$

dove ho ritenute espresse da

$$a_1 + b_1\sqrt{-1};\ a_2 + b_2\sqrt{-1};\ a_3 + b_3\sqrt{-1};\ \text{ecc.}$$

le radici della (22) nelle quali i coefficienti di $\sqrt{-1}$ sono positivi, e diversi da zero: e da

$$a'_1 - b'_1\sqrt{-1};\ a'_2 - b'_2\sqrt{-1};\ a'_3 - b'_3\sqrt{-1};\ \text{ecc.}$$

(*) Vedi questi Opuscoli T. I.° pag. 359, formola (9).

le radici nelle quali i coefficienti di $\sqrt{-1}$ sono negativi. Ho poi marcati per queste seconde con n', p', ecc. i numeri interi analoghi agli n, p, ecc. per le prime.

Ritengasi che questa (32) sussiste colle due condizioni che la $f(x)$ diventi zero per $x=\infty$, e che niuno dei coefficienti del $\sqrt{-1}$ nelle diverse radici della (22) sia infinito.

Fatta attenzione alla (26) si viene a comprendere che la (32) può anche scriversi

$$(33)\quad S_{-\infty}^{\infty} dx \cdot f(x) = \pi\sqrt{-1}\left\{\begin{array}{l} \frac{1}{\Gamma(n)} d^{n-1}_{z=a_1+b_1\sqrt{-1}} \cdot f(z)(z-a_1-b_1\sqrt{-1})^n \\ +\frac{1}{\Gamma(p)} d^{p-1}_{z=a_2+b_2\sqrt{-1}} \cdot f(z)(z-a_2-b_2\sqrt{-1})^p + \text{ecc.} \\ -\frac{1}{\Gamma(n')} d^{n'-1}_{z=a'_1-b'_1\sqrt{-1}} \cdot f(z)(z-a'_1+b'_1\sqrt{-1})^{n'} \\ -\frac{1}{\Gamma(p')} d^{p'-1}_{z=a'_2-b'_2\sqrt{-1}} \cdot f(z)(z-a'_2+b'_2\sqrt{-1})^{p'} - \text{ecc.} \end{array}\right\};$$

alla quale se si adotta la notazione del num. [18] può darsi la forma

$$(34)\qquad S_{-\infty}^{\infty} dx \cdot f(x) = \pi\sqrt{-1}\left\{ {}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{0}^{\infty}\left(\left(f(z)\right)\right) - {}_{-\infty}^{\infty}\mathcal{E}_{-\infty}^{0}\left(\left(f(z)\right)\right)\right\}.$$

[23]. La precedente formola (33) contiene un gran numero d'integrali definiti di noto valore. A darne qualche esempio, vediamo primieramente come in un subito si abbia una formola da noi dimostrata altrove (*). Pongasi

$$f(x) = \frac{\sin. a x}{\sin. b x} \cdot \frac{1}{1+x^2}$$

colla condizione $a < b$. Veggonsi adempite le due condizioni alle quali deve soddisfare la $f(x)$ nella (33): essa diventa zero per $x=\infty$, e non diventa infinita per $x = \pm\infty\sqrt{-1}$, perchè

$$\frac{\sin. a\infty\sqrt{-1}}{\sin. b\infty\sqrt{-1}} = \frac{e^{-a\infty} - e^{a\infty}}{e^{-b\infty} - e^{b\infty}}$$

non è infinita se non nel caso di $a > b$ contro l'ipotesi. Qui la (22) non ha che le due radici

$$x = \sqrt{-1},\ x = -\sqrt{-1};$$

le quali siano utili all'uopo, giacchè le altre di numero infinito

$$x = \frac{\pi}{b},\ \frac{2\pi}{b},\ \frac{3\pi}{b},\ \text{ecc.}$$

$$x = -\frac{\pi}{b},\ -\frac{2\pi}{b},\ -\frac{3\pi}{b},\ \text{ecc.}$$

(*) *Opuscoli Matematici e Fisici*. T. II.° pag. 119.

essendo tutte reali, non possono dare alcun termine nella (33) (riveggasi ciò che si disse sul fine del num. [21]); però nel secondo membro della (33) avranno luogo due soli termini, uno nella linea positiva ed uno nella negativa; cioè quel secondo membro sarà

$$\pi\sqrt{-1}\left\{d^{\circ}_{z=\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sin.az}{\sin.bz}\cdot\frac{1}{z+\sqrt{-1}}-d^{\circ}_{z=-\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sin.az}{\sin.bz}\cdot\frac{1}{z-\sqrt{-1}}\right\},$$

che riducesi

$$\pi\cdot\frac{\sin.a\sqrt{-1}}{\sin.b\sqrt{-1}}.$$

Passando dai seni degli archi immaginarj alle equivalenti espressioni esponenziali, otteniamo

$$S^{\infty}_{-\infty}dx\cdot\frac{\sin.ax}{\sin.bx}\cdot\frac{1}{1+x^2}=\pi\cdot\frac{e^a-e^{-a}}{e^b-e^{-b}}$$

la quale è la stessa formola che vedesi al luogo sopra citato; avuto riguardo all'essere qui l'integrale definito fra $-\infty$, ∞, piuttosto che fra *zero*, ∞; e ad un teorema noto (*).

È importante osservare che la formola (33) dà noto il valore anche quando si prendesse

$$f(x)=\left(\frac{\sin.ax}{\sin.bx}\right)^h\cdot\frac{1}{(1+x^2)^n}$$

essendo h numero qualunque positivo, ed n numero positivo intero: si ha per tal modo una formola che comprende altre moltissime, le quali non mi sembrano ancora state notate.

[24]. Prenderemo per un secondo esempio

$$f(x)=\frac{\sin.ax}{\cos.bx}\cdot\frac{1}{x(1+x^2)}$$

colla condizione $a<b$. Si riconoscerà facilmente dopo il detto nel numero precedente che anche ad una siffatta funzione è applicabile la (33). Rigettate pertanto le infinite radici reali della (22), avremo qui pure le due sole radici utili $x=\sqrt{-1}$, $x=-\sqrt{-1}$, e il secondo membro della (33) diverrà

$$\pi\sqrt{-1}\left\{d^{\circ}_{z=\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sin.az}{\cos.bz}\cdot\frac{1}{z(z+\sqrt{-1})}-d^{\circ}_{z=-\sqrt{-1}}\cdot\frac{\sin.az}{\cos.bz}\cdot\frac{1}{z(z-\sqrt{-1})}\right\}$$

che riducesi

$$-\pi\sqrt{-1}\cdot\frac{\sin.a\sqrt{-1}}{\cos.b\sqrt{-1}}.$$

Quindi la formola

$$S^{\infty}_{-\infty}dx\cdot\frac{\sin.ax}{\cos.bx}\cdot\frac{1}{x(1+x^2)}=\pi\cdot\frac{e^a-e^{-a}}{e^b+e^{-b}}$$

identica colla dimostrata in altro luogo (**).

(*) *Opuscoli Matematici e Fisici* T. I.° pag. 81, n.° 22.
(**) *Ivi* T. II.° pag. 119.

Può qui pure farsi un'osservazione affatto simile a quella or ora notata per generalizzare una formola analoga.

[25]. Sia per terzo esempio

$$f(x) = \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{e^x + 2\cos.\theta + e^{-x}}$$

colla condizione $k < 1$.

Le radici immaginarie della (32) sono infinite di numero e distribuibili in quattro classi, cioè

$$\begin{array}{lll} x = (\pi - \theta)\sqrt{-1}, & (3\pi - \theta)\sqrt{-1}, & (5\pi - \theta)\sqrt{-1}, \text{ ecc.} \\ -(\pi - \theta)\sqrt{-1}, & -(3\pi - \theta)\sqrt{-1}, & -(5\pi - \theta)\sqrt{-1}, \text{ ecc.} \\ (\pi + \theta)\sqrt{-1}, & (3\pi + \theta)\sqrt{-1}, & (5\pi + \theta)\sqrt{-1}, \text{ ecc.} \\ -(\pi + \theta)\sqrt{-1}, & -(3\pi + \theta)\sqrt{-1}, & -(5\pi + \theta)\sqrt{-1}, \text{ ecc.} \end{array}$$

e tutte comprese nelle quattro forme

$$\pm[(2m - 1)\pi - \theta]\sqrt{-1}; \quad \pm[(2m - 1)\pi + \theta]\sqrt{-1}$$

dando ad m tutti i valori numeri interi da 1 all'∞. L'applicazione della (33), richiamando una maniera di notazione da noi adottata altrove (*), dà il valore di

$$\frac{1}{\pi\sqrt{-1}} \int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot \frac{e^{kx} + e^{-kx}}{e^x + 2\cos.\theta + e^{-x}}$$

per mezzo dell'espressione

$$\Sigma_1^\infty \Delta m \cdot d^0_{z=[(2m-1)\pi-\theta]\sqrt{-1}} \cdot \frac{(e^{kz} + e^{-kz})[z - ((2m-1)\pi - \theta)\sqrt{-1}]}{e^z + e^{-z} + 2\cos.\theta}$$

$$+ \Sigma_1^\infty \Delta m \cdot d^0_{z=[(2m-1)\pi+\theta]\sqrt{-1}} \cdot \frac{(e^{kz} + e^{-kz})[z - ((2m-1)\pi + \theta)\sqrt{-1}]}{e^z + e^{-z} + 2\cos.\theta}$$

$$- \Sigma_1^\infty \Delta m \cdot d^0_{z=-[(2m-1)\pi-\theta]\sqrt{-1}} \cdot \frac{(e^{kz} + e^{-kz})[z + ((2m-1)\pi - \theta)\sqrt{-1}]}{e^z + e^{-z} + 2\cos.\theta}$$

$$- \Sigma_1^\infty \Delta m \cdot d^0_{z=-[(2m-1)\pi+\theta]\sqrt{-1}} \cdot \frac{(e^{kz} + e^{-kz})[z + ((2m-1)\pi + \theta)\sqrt{-1}]}{e^z + e^{-z} + 2\cos.\theta}.$$

Il valore della frazione $\frac{z - ((2m-1)\pi - \theta)\sqrt{-1}}{e^z + e^{-z} + 2\cos.\theta}$ per $z = ((2m-1)\pi - \theta)\sqrt{-1}$ si presenta sotto la forma $\frac{0}{0}$, ma colla nota regola si trova dopo facile riduzione $\frac{1}{2\sqrt{-1}\sin.\theta}$, e questo è pure il valore della frazione

$$\frac{z + ((2m-1)\pi + \theta)\sqrt{-1}}{e^z + e^{-z} + 2\cos.\theta} \quad \text{per} \quad z = -((2m-1)\pi + \theta)\sqrt{-1}.$$

(*) *Opuscoli Matematici e Fisici.* T. II.° pag. 106.

Lo stesso valore preso col segno negativo è quello delle due frazioni

$$\frac{z-((2m-1)\pi+\theta)\sqrt{-1}}{e^z+e^{-z}+2\cos.\theta}, \qquad \frac{z+((2m-1)\pi-\theta)\sqrt{-1}}{e^z+e^{-z}+2\cos.\theta}$$

$$\text{per} \quad z=\big((2m-1)\pi+\theta\big)\sqrt{-1}, \qquad z=-\big((2m-1)\pi-\theta\big)\sqrt{-1}.$$

Quindi è che la precedente espressione si compendia nella

$$\frac{2}{\sqrt{-1}\sin.\theta}\,\Sigma_1^\infty\,\Delta m\cdot\Big\{\cos.k\,[(2m-1)\pi-\theta]-\cos.k\,[(2m-1)\pi+\theta]\Big\}$$

ossia nella

$$\frac{4\sin.k\theta}{\sqrt{-1}\sin.\theta}\,\Sigma_1^\infty\,\Delta m\cdot\sin.(2m-1)\,k\pi\,;$$

la quale per una formola nota (*) riducesi

$$\frac{2\sin.k\theta}{\sqrt{-1}\sin.\theta\sin.k\pi}\,.$$

Otteniamo così

$$\int_{-\infty}^{\infty}dx\cdot\frac{e^{kx}+e^{-kx}}{e^x+2\cos.\theta+e^{-x}}=\frac{2\pi\sin.k\theta}{\sin.\theta\sin.k\pi}$$

che combina con una formola da noi altrove dimostrata (**), per cui subitamente si sale ad altra celebre di Eulero.

È manifesto che questi esempj possono moltiplicarsi a piacere: ne abbiamo scelti alcuni che conducendo a risultati altronde noti, servissero a persuadere l'esattezza del nuovo metodo.

[26]. All'oggetto di non ommettere alcuna delle notazioni del sig. Cauchy relative al calcolo dei residui, resta a dire che egli generalizza ancora di più la notazione (24) del num. [18], e scrive

$$(35)\qquad {}_{x=a}^{x=6}\mathcal{E}_{x=m}^{x=n}\big((f(z))\big)$$

per significare una somma di residui parziali raccolti fra quelli costituenti il residuo integrale (17), ma con una legge diversa dalla riferita al n.° [18] per la formazione della quantità (24). La (24), se ben si riflette a ciò che si è detto in quel luogo, si può enunciare *la somma dei residui parziali dovuti alle radici della* (22) *che si possono dedurre dalla forma*

$$(36)\qquad \mathrm{x}+\mathrm{y}\sqrt{-1}$$

dando ad x *valori compresi fra* a, b, *e ad* y *valori compresi fra* m, n. Ora la (35) significa *la somma dei residui parziali dovuti a quelle sole radici della* (22) *che si possono dedurre dalla forma*

$$(37)\qquad \varphi(\mathrm{x},\mathrm{y})+\psi(\mathrm{x},\mathrm{y})\sqrt{-1}$$

(dove φ, ψ sono due forme di funzioni arbitrariamente prese) *dando similmente*

(*) *Opuscoli Matematici e Fisici.* Tomo II.° pag. 109, seconda formola (g).

(**) *Ivi* pag. 131, formola ($\mu\mu$).

alla x *valori fra* α, β, *e alla* y *valori fra* m, n. È evidente che la (24) è un caso particolare della (35) quando la (37) riducesi alla (36) per essere $\varphi(x, y)=x$, $\psi(x, y)=y$.

Diciamo la stessa cosa con altre parole per imprimerne maggiormente l'idea. Rappresentando per $a+b\sqrt{-1}$ una qualunque delle radici (23) della (22), detta radice (per esempio la prima $a_1+b_1\sqrt{-1}$) sarà buona, ossia dovrà ritenersi il residuo parziale corrispondente nella somma (35), se stabilite le due equazioni

$$(38) \qquad \varphi(x, y)=a\,; \quad \psi(x, y)=b$$

(nel caso accennato è $a=a_1$, $b=b_1$) potranno assegnarsi per x, y valori numerici che rendano identiche tali equazioni (38) e siano rispettivamente compresi fra α, β; m, n.

Ancora la stessa cosa sott'altro aspetto. Si riterrà nella (35) il residuo parziale corrispondente alla radice $a+b\sqrt{-1}$ (nel caso individuato alla $a_1+b_1\sqrt{-1}$), se rappresentando per

$$(39) \qquad x=\phi(a, b)\,; \quad y=\psi(a, b)$$

un sistema di equazioni inverse alle (38), e attribuendo ad a, b i valori proprj della radice che si esamina (qui i valori a_1, b_1), i risultanti valori di x, y saranno compresi fra α, β; m, n.

Vedesi che, adottata questa generalizzazione, nella espressione (35) non è detto tutto, ma bisogna accompagnarla colla indicazione della forma (37) chiamata *caratteristica*.

[27]. Un caso particolare delle (37) è dall'Autore marcato con apposita notazione a motivo della sua frequenza ed importanza; quando la (37) è

$$(40) \qquad x\cos.y+x\sin.y\sqrt{-1}.$$

Allora invece della (35) egli scrive

$$(41) \qquad {}^{(\beta)}_{(\alpha)}\mathcal{E}^{(n)}_{(m)}\big((f(z))\big)$$

e intende rappresentare la somma dei residui parziali corrispondenti a quelle (23) radici della (22) per cui la parte reale a e il coefficiente b hanno valori tali da soddisfare alle due equazioni

$$(42) \qquad x\cos.y=a\,; \quad x\sin.y=b$$

ovvero alle due

$$(43) \qquad x=\sqrt{a^2+b^2}, \quad y=\text{Arc.tan.}\frac{b}{a}$$

nelle quali x non riceve che valori compresi fra α, β, ed y che valori compresi fra m, n.

Dopo ciò è visibile che l'espressione

$$(44) \qquad {}^{(\infty)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\big((f(z))\big)$$

equivale al residuo integrale (17); giacchè allora non sarà esclusa alcuna radice della (22): infatti qualunque valore abbiano a, b, la condizione che nelle (43) risulti per x un valore fra *zero*, ∞, e per y un valore fra $-\pi$, π potrà sempre mostrarsi adempita.

Richiamata la teorica dei moduli del nostro Autore da noi altrove esposta (*), l'espressione

$$(45) \qquad {}^{(X)}_{(0)}\mathcal{E}^{(\pi)}_{(-\pi)}\left(\left(f(z)\right)\right)$$

significherà la somma dei residui parziali corrispondenti alle radici della (22) il cui modulo è compreso fra *zero*, X; escluse quelle radici che hanno un modulo fra X e l'infinito.

[28]. Siamo ora in istato di poter riferire alcune importanti formole del calcolo dei residui.

Cerchiamo il valore dell'espressione

$$(46) \qquad \mathcal{E}\frac{F(z)f'(z)}{((f(z)))}$$

ove $f(z)$, $F(z)$ sono due funzioni qualunque di z, e $f'(z)$ è la derivata di $f(z)$ presa per rapporto a z. Giusta l'esposto al num. [17] questa (46) vorrà dire una somma di residui parziali relativi alle radici diseguali della sola equazione

$$(47) \qquad f(z)=0.$$

Se esprimiamo per a, b, c, - - - tali radici e intendiamo che a sia n volte radice della (47), b lo sia p volte, c lo sia q volte ecc.: il valore della (46) sarà

$$\frac{1}{\Gamma(n)}d^{n-1}_{z=a}\cdot\frac{F(z)f'(z)(z-a)^n}{f(z)}+\frac{1}{\Gamma(p)}d^{p-1}_{z=b}\cdot\frac{F(z)f'(z)(z-b)^p}{f(z)}+\text{ecc.}$$

Ora vuolsi dimostrare che, fatte le riduzioni, il primo termine di quest' ultima espressione risulta $nF(a)$, il secondo $pF(b)$, il terzo $qF(c)$, ecc.: è evidente che basterà dimostrare l'identità

$$(48) \qquad nF(a)=\frac{1}{\Gamma(n)}d^{n-1}_{z=a}\cdot\frac{F(z)f'(z)(z-a)^n}{f(z)}.$$

A tale oggetto osserviamo che a essendo n volte radice della (47), potremo sempre supporre $f(z)=(z-a)^n\psi(z)$ dove $\psi(z)$ è una funzione di z che non si annulla per $z=a$: quindi la (48) potrà ridursi

$$nF(a)=\frac{1}{\Gamma(n)}d^{n-1}_{z=a}\cdot F(z)\left[n(z-a)^{n-1}+(z-a)^n\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right].$$

Qui il secondo membro, prescindendo dal coefficiente ed esprimendo con apici le derivate per z, può scriversi

(*) *Opuscoli Matematici e Fisici*. T. II.° pag. 49.

$$F^{(n)}(z)\left[n(z-a)^{n-1}+(z-a)^n\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right]+nF^{(n-1)}(z)\left[n(z-a)^{n-1}+(z-a)^n\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right]'$$
$$+\cdots+F(z)\left[n(z-a)^{n-1}+(z-a)^n\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}\right]^{(n-1)},$$

fatta a derivazioni eseguite $z=a$. È facile vedere che tutte le derivate della quantità $n(z-a)^{n-1}+(z-a)^n\frac{\psi'(z)}{\psi(z)}$ svaniscono quando si fa $z=a$, tranne l'ultima che diventa $n(n-1)(n-2)\cdots 2\cdot 1=n\Gamma(n)$: così riesce provata la (48).

Adunque abbiamo

$$(49)\qquad nF(a)+pF(b)+qF(c)+\cdots=\mathcal{E}\frac{F(z)f'(z)}{((f(z)))}.$$

[29]. Se con $z_1, z_2, z_3, \cdots z_m$ si indicano tutte le m radici della (47), siano queste tutte diseguali o alcune fra loro eguali: è manifesto per la (49) essere sempre

$$(50)\qquad F(z_1)+F(z_2)+F(z_3)+\cdots+F(z_m)=\mathcal{E}\frac{F(z)f'(z)}{((f(z)))};$$

perchè se un numero n delle $z_1, z_2, z_3\cdots$ hanno un valore eguale a, gli n primi termini della (50) si compendiano nel primo $nF(a)$ della (49), eccetera. Questa (50) dà espressa con un residuo la somma delle funzioni simili delle radici di un'equazione qualunque.

[30]. Importa assai di osservare l'indole della dimostrazione della (49) che stabilisce per ogni termine nel primo membro un corrispondente residuo parziale nel secondo: talchè se si escluda un termine nel primo membro e si escluda il corrispondente residuo parziale nel secondo, l'equazione sta egualmente. Conseguenza di questa osservazione si è che dalla (50) potremo dedurre altre formole togliendo alcuni termini del primo membro e ritenendovi i soli che si riferiscono a radici della (47) soddisfacenti a certe condizioni, purchè facciamo analoghe restrizioni nel secondo membro.

Così avrà primieramente luogo la formola

$$(51)\qquad F(z_1)+F(z_2)+\cdots+F(z_m)={}_{\alpha}^{\beta}\mathcal{E}_m^n\frac{F(z)f'(z)}{((f(z)))}$$

intendendo che qui le $z_1, z_2, z_3, \cdots z_m$ non siano tutte le radici della (47) ma quelle sole che possono dedursi dalla forma (36) dando ad x valori compresi fra α, β, e ad y valori compresi fra m, n.

Avrà anche luogo la formola

$$(52)\qquad F(z_1)+F(z_2)+\cdots+F(z_m)={}_{(0)}^{(X)}\mathcal{E}_{(-\pi)}^{(\pi)}\frac{F(z)f'(z)}{((f(z)))}$$

dove le $z_1, z_2, z_3, \cdots z_m$ s'intenderanno (vedi l'espressione (45)) quelle radici della (47) il cui modulo è compreso fra *zero*, X.

[31]. Se nella precedente (52) prendasi il limite X di tal valore che niuno dei valori di z da zero fino ad X renda infinita la quantità

$$(53) \qquad F(z)f'(z)$$

quella formola potrà scriversi

$$(54) \qquad F(z_1)+F(z_2)+\cdots+F(z_m)={}_{(0)}^{(X)}\mathcal{C}_{(-\pi)}^{(\pi)}\left(\left(\frac{F(z).f'(z)}{f(z)}\right)\right).$$

Infatti coll' estendere le doppie parentesi anche al numeratore si viene ad abbracciare nella considerazione delle radici oltre quelle della (47) anche quelle dell' equazione

$$\frac{1}{F(z)f'(z)}=0\,;$$

ma quest'ultime sono nello stesso tempo tutte escluse dall'apposta condizione: niuna di esse può essere compresa fra *zero*, X.

Questa (54) è la formola (46) o (53) riportata senza dimostrazione nella Memoria del sig. Cauchy tradotta e inserita negli *Opuscoli Matematici e Fisici* (*).

Potrei trattenermi a mostrare come per mezzo di alcune trasformazioni praticate nel secondo membro della stessa (54) si giunge in alcuni casi particolari a determinarne altrimenti il valore: il che accadendo, si hanno pel confronto col primo membro varii teoremi analitici. Siccome però questi sono per la maggior parte noti dietro altri principj, rimanderò chi ne è desideroso alla Memoria originale (**).

(*) Tomo II.° pag. 22.

(**) *Exercices de Mathématiques*. T. I.° pag. 359.

PARTE PRIMA

Continuazione e fine della memoria SULLA MECCANICA CELESTE E SOPRA UN NUOVO CALCOLO CHIAMATO CALCOLO DEI LIMITI *di* AGOSTINO LUIGI CAUCHY (*Vedi Fascicolo II.° del Tomo II.° pag.* 133)

§. 4.°

Sopra lo sviluppo della funzione R *in serie convergente.*

La funzione R, come lo abbiamo di già rimarcato, racchiude due specie di termini, cioè termini della forma

$$(1) \qquad P = \frac{m' r \cos.\delta}{r'^2}$$

e termini della forma $-P$, il valore di P essendo

$$(2) \qquad P = \frac{m'}{\sqrt{\left(r^2 - 2 r r' \cos.\delta + r'^2\right)}}.$$

Il valore di P determinato dall'equazione (1) può essere presentato sotto la forma

$$(3) \qquad P = \frac{m' a}{a'^2} \sum_{-\infty}^{\infty} (A_N + B_N)(A'_{N'} + B'_{N'}) \cos.\Delta_{NT,\, N'T'}$$

i valori di A_N, B_N, $A'_{N'}$, $B'_{N'}$ essendo dati dalle formole (91) e (113) del §. 3.° nelle quali gli esponenti n, n' aumentati dell'unità sorpassano sempre i valori numerici di N, N'. Si può pure alle formole (91) e (113) sostituire le formole (100), (102), (105), (108) e determinare immediatamente col mezzo di queste formole i valori di A_N, B_N, $A'_{N'}$, $B'_{N'}$ in funzione di ε, ε'.

In quanto alla funzione P determinata dall'equazione (2) lo sviluppo che abbiamo dato nel terzo paragrafo deve essere impiegato soltanto nel caso in cui il rapporto

$$(4) \qquad \theta = \frac{a}{a'}$$

è sensibilmente inferiore all'unità, essendo le eccentricità ε, ε' esse stesse più piccole di 0,662742 - - - ovvero di circa $\frac{2}{3}$. È altresì necessario che il rapporto

$$(5) \qquad \frac{r}{r'} = \frac{a(1 - \varepsilon \cos.\psi)}{a'(1 - \varepsilon' \cos.\psi')}$$

il cui più gran valore è

$$(6) \qquad \frac{\theta(1 + \varepsilon)}{1 - \varepsilon'}$$

sia inferiore all'unità. Ora quando $\varepsilon = \varepsilon' = \frac{2}{3}$ l'espressione (6) diventa

$$(7) \qquad \frac{\theta\left(1 + \frac{2}{3}\right)}{1 - \frac{2}{3}} = 5\theta\,;$$

è dunque in tal caso necessario che θ resti inferiore ad $\frac{1}{5}$.

Se le eccentricità ε, ε' sono circa $\frac{1}{4}$, come nei piccoli pianeti, l'espressione (6) diverrà

$$\frac{\theta\left(1+\frac{1}{4}\right)}{1-\frac{1}{4}}=\frac{5}{3}\theta$$

e θ dovrà rimanere inferiore a $\frac{3}{5}$. Questa condizione non essendo adempita riguardo ai piccoli pianeti, lo sviluppo di P impiegato nel paragrafo precedente non può esservi applicato.

Per ritrovare in tutti i casi possibili uno sviluppo convergente della funzione P determinata dall'equazione (2) basta decomporre il trinomio

$$(8)\qquad r^2-2rr'\cos.\delta+r'^2=(r-r'\cos.\delta)^2+r'^2\sin.^2\delta$$

che è sempre positivo, in due parti di cui l'una sia positiva ed offra un valore numerico superiore a quello della seconda: indi sviluppare la potenza $-\frac{1}{2}$ del trinomio secondo le potenze ascendenti del rapporto della seconda parte alla prima. Di fatto se si ha

$$r^2-2rr'\cos.\delta+r'^2=\rho_1-\rho_2$$

ρ_1 essendo positivo e $\pm\rho_2<\rho_1$ si troverà

$$(9)\qquad (\rho_1-\rho_2)^{-\frac{1}{2}}=\rho_1^{-\frac{1}{2}}\left\{1+\frac{1}{2}\,\frac{\rho_2}{\rho_1}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^2+\cdots\right\}$$

e la serie compresa nel secondo membro dell'equazione (9) rimarrà convergente fino a che il rapporto $\pm\frac{\rho_2}{\rho_1}$ rimarrà inferiore all'unità. Essa sarà d'altronde tanto più convergente quanto più piccolo sarà il rapporto $\pm\frac{\rho_2}{\rho_1}$.

Affinchè l'integrale $\int Pdt$ possa essere facilmente calcolato è necessario che nello sviluppo di P i coseni non rimangano nel denominatore, e conseguentemente è necessario che $\cos.\delta$ sia compreso nel numeratore ρ_2 della frazione $\frac{\rho_2}{\rho_1}$. Si giungerà a questo decomponendo in due termini il trinomio (8) in uno dei tre seguenti modi

$$r^2+r'^2-2rr'\cos.\delta$$

$$(r+r')^2-2rr'(1+\cos.\delta)$$

$$(r-r')^2+2rr'(1-\cos.\delta)$$

di maniera che si potrà prendere

$$(10)\qquad \rho_1=r^2+r'^2;\qquad \rho_2=2rr'\cos.\delta$$

ovvero

$$(11) \qquad \rho_1 = (r + r')^2; \qquad \rho_2 = 2rr'(1 + \cos.\delta)$$

od anche

$$(12) \qquad \rho_1 = (r - r')^2; \qquad \rho_2 = 2rr'(1 - \cos.\delta).$$

Gli sviluppi corrispondenti di P saranno

$$(13) \quad P = m'\left\{\frac{1}{(r^2 + r'^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\,\frac{2rr'\cos.\delta}{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{(2rr'\cos.\delta)^2}{(r^2 + r'^2)^{\frac{5}{2}}} + \text{ecc.---}\right\}$$

$$(14) \quad P = m'\left\{\frac{1}{r + r'} + \frac{1}{2}\,\frac{2rr'(1 + \cos.\delta)}{(r + r')^3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{[2rr'(1 + \cos.\delta)]^2}{(r + r')^5} + \text{ecc.---}\right\}$$

$$(15) \quad P = \frac{m'}{\sqrt{(r - r')^2}}\left\{1 - \frac{1}{2}\,\frac{2rr'(1 - \cos.\delta)}{(r - r')^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\,\frac{[2rr'(1 - \cos.\delta)]^2}{(r - r')^4} - \text{ecc.---}\right\}.$$

Nel primo caso il rapporto

$$(16) \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2rr'\cos.\delta}{r^2 + r'^2}$$

sarà compreso fra i limiti

$$(17) \qquad -\frac{2rr'}{r^2 + r'^2}; \quad +\frac{2rr'}{r^2 + r'^2}$$

di cui il valor numerico

$$(18) \qquad \frac{2rr'}{r^2 + r'^2} = 1 - \frac{(r' - r)^2}{r^2 + r'^2}$$

non può sorpassare l'unità. Vi è di più: siccome

$$r^2 + r'^2 - 2rr'\cos.\delta = (r + r')^2 - 2rr'(1 + \cos.\delta)$$

è sempre nullo o positivo e non può svanire se i pianeti non s'incontrano, è chiaro che fuor del caso di un urto il valor numerico di $2rr'\cos.\delta$ sarà essenzialmente inferiore a quello di $r^2 + r'^2$ e quello di $2rr'(1 + \cos.\delta)$ a quello di $(r + r')^2$. Dunque, escludendo il caso in cui i pianeti si urtassero, le serie comprese nei secondi membri delle formole (13), (14) saranno sempre convergenti. Aggiungiamo che nella serie (14) il rapporto $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ sarà compreso fra i limiti

$$(19) \qquad 0; \quad \frac{4rr'}{(r + r')^2} = 1 - \frac{(r' - r)^2}{(r' + r)^2}$$

di cui il secondo sorpassa l'espressione (18), poichè $(r + r')^2$ sorpassa $r^2 + r'^2$ e in conseguenza $\frac{(r' - r)^2}{(r' + r)^2}$ è inferiore a $\frac{(r' - r)^2}{r^2 + r'^2}$: dunque per

$$\cos.\delta = 1$$

la serie compresa nella formola (14) convergerà meno rapidamente della serie compresa nella formola (13).

In generale se si ponesse

$$(20) \qquad \rho_1 = r^2 + r'^2 + z, \quad \rho_2 = 2rr'\cos.\delta + z$$

z essendo positivo, si troverebbe

$$(21) \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{2rr'\cos.\delta + z}{r^2 + r'^2 + z} = 1 - \frac{r^2 - 2rr'\cos.\delta + r'^2}{r^2 + r'^2 + z}.$$

Per conseguenza il rapporto $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ che resterebbe positivo per valori positivi di $\cos.\delta$, sarebbe allora più grande di

$$1 - \frac{r^2 - 2rr'\cos.\delta + r'^2}{r^2 + r'^2} = \frac{2rr'\cos.\delta}{r^2 + r'^2};$$

dunque lo sviluppo di P corrispondente ai valori di ρ_1, ρ_2 dati dalle equazioni (20) convergerebbe meno rapidamente per valori positivi di $\cos.\delta$ che la serie compresa nella formola (13).

Supponiamo ora

$$(22) \qquad \rho_1 = r^2 + r'^2 - z, \quad \rho_2 = 2rr'\cos.\delta - z$$

z essendo positivo ma più piccolo di $r^2 + r'^2$. Si avrà

$$(23) \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = 1 - \frac{r^2 - 2rr'\cos.\delta + r'^2}{r^2 + r'^2 - z}$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(24) \qquad -\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{r^2 - 2rr'\cos.\delta + r'^2}{r^2 + r'^2 - z} - 1.$$

Allora per valori negativi di $\cos.\delta$, ρ_2 sarà negativo ed il valor numerico di $\frac{\rho_2}{\rho_1}$ più grande che quello di

$$\frac{r^2 - 2rr'\cos.\delta + r'^2}{r^2 + r'^2} - 1 = -\frac{2rr'\cos.\delta}{r^2 + r'^2}.$$

Dunque lo sviluppo di P corrispondente ai valori di ρ_1, ρ_2 dati dalle equazioni (22) convergerà meno rapidamente per valori negativi di $\cos.\delta$ che la serie compresa nella formola (13).

Osserviamo ancora che il secondo membro dell'equazione (24) sorpasserà l'unità se si ha

$$r^2 - 2rr'\cos.\delta + r'^2 > 2(r^2 + r'^2 - z)$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(25) \qquad z > \frac{r^2 + r'^2 + 2rr'\cos.\delta}{2}.$$

Supponiamo per fissare le idee $z = 2rr'$; le formole (22) s'accorderanno colle formole (12) e la condizione (25) darà

$$2rr'(1 - \cos.\delta) > (r - r')^2$$

$$(26) \qquad \sin.\frac{\delta}{2} > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{(r'-r)^2}{rr'}}\,.$$

Dunque la serie compresa nella formola (15) cesserà d'essere convergente quando l'angolo δ sorpasserà il limite

$$(27) \qquad 2\,\text{Arc.}\sin.\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(r'-r)^2}{rr'}}\,.$$

Siegue da queste osservazioni 1.° che lo sviluppo (13) della funzione P paragonato ad uno qualunque degli sviluppi dello stesso genere converge sempre più rapidamente per certi valori di $\cos.\delta$ che sono i meno favorevoli alla convergenza; 2.° che gli sviluppi (13) e (14) convergono per tutti i valori di $\cos.\delta$; 3.° che lo sviluppo (15) cessa di convergere per certi valori negativi di $\cos.\delta$. Dunque la formola (13) è quella che conviene di più allorchè $\cos.\delta$ resta arbitrario. Ma egli è chiaro che se si impiegassero diversi sviluppi per determinare il valore di P corrispondente a diverse epoche, si potrebbe servirsi con vantaggio della formola (14) allorchè t avesse un valor tale che $-\cos.\delta$ fosse poco differente dall'unità e della formola (15) allorchè $\cos.\delta$ divenisse sensibilmente eguale ad 1.

Facciamo ora vedere come si può sviluppare il secondo membro della formola (13) secondo le potenze intere di ε, ε' ed i seni o coseni degli archi multipli di

$$T = \alpha t + c, \quad T' = \alpha' + c'.$$

Ciò che diremo a questo riguardo sarà egualmente applicabile ai secondi membri delle formole (14), (15).

Se primieramente si suppongono

$$\varepsilon = 0, \quad \varepsilon' = 0$$

la formola (13) diverrà

$$(28) \qquad P = m'\left\{\frac{1}{\left(a^2+a'^2\right)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2}\,\frac{2aa'\cos.\delta}{\left(a^2+a'^2\right)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\,\frac{(2aa'\cos.\delta)^2}{\left(a^2+a'^2\right)^{\frac{5}{2}}} + \text{ecc.}\,---\right\}$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(29) \quad P = m'\{\Theta_0 + \Theta_1\cos.\delta + \Theta_2\cos.^2\delta + \Theta_3\cos.^3\delta + \text{ecc.}\,---\} = m'S_{k=0}^{k=\infty}\,\Theta_k\cos.^k\delta$$

il valore di Θ_k essendo

$$(30) \qquad \Theta_k = \frac{1\cdot 3\,---\,(2k-1)}{2\cdot 4\,---\,2k}\,\frac{(2aa')^k}{\left(a^2+a'^2\right)^{k+\frac{1}{2}}}\,.$$

Nello stesso caso si avrà

$$p - \varpi = \psi = T; \quad p' - \varpi' = \psi' = T'$$

e per conseguenza

$$(31) \qquad \cos.\delta = \cos.\Delta_{T,\,T'}\,.$$

Dunque la formola (29) darà

$$(32) \qquad P = m'S_{k=0}^{k=\infty}\,\Theta_k\cos.^k\Delta_{T,\,T'}\,.$$

Se inoltre si suppongono

$$\tau = 0, \quad \tau' = 0$$

si troverà

$$\delta = p - p' + \varphi - \varphi' = T - T' + \Pi$$

il valore di Π essendo

$$\Pi = \varpi - \varpi' + \varphi - \varphi'.$$

Si avrà d'altronde

$$\cos.^k \delta = \frac{1}{2^k}\left(e^{\delta\sqrt{-1}} + e^{-\delta\sqrt{-1}}\right)^k = \frac{1}{2^k} S(k)_\rho\, e^{(k-2\rho)\delta\sqrt{-1}} = \frac{1}{2^k} S(k)_\rho \cos.(k - 2\rho)\delta$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$\cos.^k \delta = \frac{1}{2^k} S(k)_{\frac{k-N}{2}} \cos. N\delta$$

il segno S estendendosi a tutti i valori positivi o negativi di N che rendono $k - N$ divisibile per 2 da $N = -k$ sino ad $N = k$. Si avrà per conseguenza

$$P = m' S \frac{\Theta_k}{2^k} (k)_{\frac{k-N}{2}} \cos. N(T - T' + \Pi)$$

$$(33) \qquad = m'\left\{\Theta_0 + \Theta_1 \cos.(T - T' + \Pi) + \frac{\Theta_2}{2}\left[1 + \cos. 2(T - T' + \Pi)\right]\right.$$

$$\left. + \frac{\Theta_3}{4}\left[3\cos.(T - T' + \Pi) + \cos. 3(T - T' + \Pi)\right] + \cdots\right\}.$$

È bene osservare che se si indica con Legendre per $\Gamma(k)$ l'integrale definito

$$\int_0^\infty x^{k-1} e^{-x}\, dx$$

si avrà

$$\frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-1)}{2 \cdot 4 \cdots 2k} = \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(k+1)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)}$$

ed in conseguenza

$$\Theta_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)} \frac{(2aa')^k}{\left(a^2 + a'^2\right)^{k+\frac{1}{2}}}.$$

Allorchè k ha un valore assai considerabile, si ha sensibilmente in virtù di una nota proprietà della funzione Γ

$$\frac{\Gamma\left(k + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma(k+1)} = (k)^{-\frac{1}{2}}.$$

Conseguentemente il valore precedente di Θ_k si riduce sensibilmente a

$$(34) \qquad \Theta_k = \left(\frac{1}{k\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(2aa')^k}{\left(a^2 + a'^2\right)^{k+\frac{1}{2}}}$$

e se nel secondo membro della formola (32) si trascurano tutti i termini in cui l'esponente k di $\cos.\delta$ non è inferiore ad un numero dato n, l'errore commesso sarà sensibilmente eguale a

$$\left(\frac{1}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(2aa'\cos.\delta)^n}{\left(a^2+a'^2\right)^{n+\frac{1}{2}}} \left\{1+\frac{2aa'\cos.\delta}{a^2+a'^2}+\left(\frac{2aa'\cos.\delta}{a^2+a'^2}\right)^2+\text{ecc.}---\right\}$$

o, ciò che torna lo stesso, a

$$(35)\quad \left(\frac{1}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{(2aa')^n}{\left(a^2+a'^2\right)^{n+\frac{1}{2}}} \frac{\cos.^n\delta}{1-\frac{2aa'\cos.\delta}{a^2+a'^2}} = \left(\frac{1}{n\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{2aa'\cos.\delta}{a^2+a'^2}\right)^n \frac{\sqrt{a^2+a'^2}}{a^2-2aa'\cos.\delta+a'^2}$$

pertanto esso diverrà assai piccolo per grandi valori di n. Se a differisce poco da a' questo errore differirà assai poco da

$$\left(\frac{1}{2n\pi}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{a} \frac{\cos.^n\delta}{1-\cos.\delta}.$$

Allorchè $\frac{a'}{a}$ od $\frac{a}{a'}$ è sensibilmente inferiore all'unità, altrettanto si potrà dire del rapporto

$$\frac{2aa'}{a^2+a'^2},$$

conseguentemente l'espressione (34) finisce col decrescere per valori crescenti di k e, se si ordina il valore di P dato dall'equazione (33) secondo i coseni dei multipli dell'arco $T-T'+\Pi$, la serie così ottenuta sarà convergente. Di fatto in questa serie il coefficiente di

$$\cos.N(T-T'+\Pi),$$

indicando N un numero intero qualunque superiore a zero, sarà

$$(37)\quad \begin{aligned} 2S\frac{\Theta_k}{2^k}(k)_{\frac{k-N}{2}} &= \frac{1}{2^{N-1}}\left\{(N)_0\,\Theta_N+\frac{1}{4}(N+2)_1\,\Theta_{N+2}+\frac{1}{4^2}(N+4)_2\,\Theta_{N+4}+\text{ecc.}---\right\} \\ &= \frac{1}{2^{N-1}}\left\{\Theta_N+\frac{1}{4}\frac{N+2}{1}\Theta_{N+2}+\frac{1}{4^2}\frac{(N+4)(N+3)}{1\cdot 2}\Theta_{N+4}+\text{ecc.}---\right\} \\ &= \frac{\Theta_N}{2^{N-1}}\left\{1+\frac{1}{2}\frac{N+2}{2}\frac{(2N+1)(2N+3)}{(2N+2)(2N+4)}\left(\frac{2aa'}{a^2+a'^2}\right)^2\right. \\ &\quad \left.+\frac{1}{2^2}\frac{(N+4)(N+3)}{2\cdot 4}\frac{(2N+1)(2N+3)(2N+5)(2N+7)}{(2N+2)(2N+4)(2N+6)(2N+8)}\left(\frac{2aa'}{a^2+a'^2}\right)^4+---\right\}. \end{aligned}$$

Ora quantunque nella serie espressa dall'ultimo membro della formola (37) i termini comincino per crescere quando N ha un valore considerabile, ciò non ostante se il rapporto $\frac{2aa'}{a^2+a'^2}$ è inferiore all'unità questa serie sarà convergente, perchè il rapporto di un termine al suo precedente finirà per differire

pochissimo da

$$\left(\frac{2aa'}{a^2+a'^2}\right)^2.$$

Di più se si suppone per fissare le idee $a<a'$ ed $\frac{a}{a'}=\theta$, egli è chiaro che il valore dell'espressione (37) dovrà ridursi al coefficiente di $\cos.N\delta$ nell'equazione (124) del § 3.° e per conseguenza divenire per grandi valori di N prossimamente

$$(38)\qquad 2\left(\frac{1}{N\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\theta^N}{\sqrt{1-\theta}}=2\left(\frac{1}{N\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{2a^N}{a'^{N-1}\sqrt{a'-a}}.$$

Ora è manifesto che la serie che avrebbe per termine generale

$$(39)\qquad 2\left(\frac{1}{N\pi}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{\theta^N}{\sqrt{1-\theta}}\cos.N(T-T'+\Pi)$$

sarà convergente, se θ è sensibilmente inferiore all'unità. Ma siccome l'espressione (39) diventa infinita per $\theta=1$, si dovrà rinunciare a sviluppare P secondo i coseni dei multipli di $T-T'+\Pi$ se θ differisce poco dall'unità. Nulladimeno nel caso di cui si tratta ed anche in quello in cui si avesse

$$\theta=1;\quad a'=a$$

si potrà continuare a sviluppare P in una serie di termini della forma

$$\Theta_k\cos.^k\Delta_{T,T'}$$

arrestando lo sviluppo ad un valore di k tale che si possa senza errore sensibile trascurare il resto; indi sviluppare

$$\cos.^k\Delta_{T,T'}$$

in una serie ordinata secondo i coseni dei multipli dell'arco $T-T'+\Pi$, la qual serie sarà sempre composta d'un numero finito di termini. Si può dunque allora continuare a sviluppare la funzione P essa stessa secondo i coseni dei multipli di $T-T'+\Pi$, purchè si scriva

$$(40)\qquad P=\frac{m'}{\sqrt{(a^2-2aa'\gamma\cos.\delta+a'^2)}}$$

o più generalmente

$$(41)\qquad P=\frac{m'}{\sqrt{(r^2-2rr'\gamma\cos.\delta+r'^2)}};$$

e che prima di porre $\gamma=1$ si rigettino nel coefficiente di $\cos.N(T-T'+\Pi)$ o più generalmente nei coefficienti dei seni e coseni dei multipli di T e di T', tutti i termini in cui l'esponente di k sorpassa un numero dato. Quest'ultimo numero essendo supposto assai grande, lo sviluppo della funzione P differirà assai poco da questa stessa funzione, e l'errore commesso sarà assai piccolo, quantunque i termini trascurati nei coefficienti dei seni e coseni degli archi multipli di T e di T' offrano somme assai considerabili.

Allorchè non si ha

$$\tau = 0, \quad \tau' = 0$$

allora per isvolgere

$$\cos.^k \Delta_{T,\,T'}$$

secondo i seni e coseni degli archi multipli di T e di T', affinchè il secondo membro della formola (32) possa essere facilmente integrato rapporto a t, basta ricorrere alle considerazioni seguenti.

Sia $f(T)$ una funzione lineare di

$$(42) \qquad \cos.T,\ \cos.2T,\ ---\ \cos.kT;\ \sin.T,\ \sin.2T\ ---\ \sin.kT.$$

Questa funzione racchiudendo $2k+1$ parametri, cioè un termine costante ed i coefficienti delle espressioni (42), sarà completamente determinata quando se ne conosceranno $2k+1$ valori particolari corrispondenti a $2k+1$ valori di T. Ora se si suppongono questi valori di T equidifferenti, il primo essendo T_0 e la differenza di due valori consecutivi essendo

$$\frac{2\pi}{2k+1};$$

si dedurranno tutti dalla formola

$$(43) \qquad T_0 + \frac{2\pi l}{2k+1}$$

attribuendo successivamente ad l i valori interi

$$0,\ 1,\ 2\ ---\ 2k-1,\ 2k$$

o, ciò che torna lo stesso, $2k+1$ valori consecutivi scelti arbitrariamente nella progressione aritmetica

$$---\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ---$$

per esempio i seguenti

$$(44) \qquad -k,\ -(k-1),\ ----\ -1,\ 0,\ 1,\ ---\ (k-1),\ k.$$

Si potrà dunque esprimere la funzione $f(T)$ col mezzo dei valori particolari

$$(45) \quad f\left(T_0 - \frac{2k\pi}{2k+1}\right),\ ---f\left(T_0 - \frac{2\pi}{2k+1}\right),\ f(T_0),\ f\left(T_0 + \frac{2\pi}{2k+1}\right),\ ---f\left(T_0 + \frac{2k\pi}{2k+1}\right)$$

corrispondenti ai valori

$$(46) \quad T_0 - \frac{2k\pi}{2k+1},\ ---\ T_0 - \frac{2\pi}{2k+1},\ \ T_0,\ \ T_0 + \frac{2\pi}{2k+1},\ ---\ T_0 + \frac{2k\pi}{2k+1}$$

della variabile T. Si troverà in effetto per $k=1$

$$f(T) = \frac{1}{3}\left\{\left[1 + 2\cos.\left(T - T_0 + \frac{2\pi}{3}\right)\right] f\left(T_0 - \frac{2\pi}{3}\right)\right.$$

$$\left. + \left[1 + 2\cos.(T - T_0)\right] f(T_0) + \left[1 + 2\cos.\left(T - T_0 - \frac{2\pi}{3}\right)\right] f\left(T_0 + \frac{2\pi}{3}\right)\right\}$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$f(T)=\frac{1}{3}\,S_{l=-1}^{l=1}\,S_{h=-1}^{h=1}\,e^{h\left(T-T_0-\frac{2l\pi}{3}\right)\sqrt{-1}}\,f\left(T_0+\frac{2l\pi}{3}\right);$$

per $k=2$

$$f(T)=\frac{1}{5}\,S_{l=-2}^{l=2}\,S_{h=-2}^{h=2}\,e^{h\left(T-T_0-\frac{2l\pi}{5}\right)\sqrt{-1}}\,f\left(T_0+\frac{2l\pi}{5}\right);$$

e generalmente per un valore qualunque di k

$$(47)\qquad f(T)=\frac{1}{2k+1}\,S_{l=-k}^{l=k}\,S_{h=-k}^{h=k}\,e^{h\left(T-T_0-\frac{2l\pi}{2k+1}\right)\sqrt{-1}}\,f\left(T_0+\frac{2l\pi}{2k+1}\right)$$

il segno sommatorio S estendendosi a tutti i valori interi positivi nulli o negativi di l e di h dal valore negativo $-k$ sino al valore positivo k. Per verificare l'esattezza della formola (47) basta osservare che il secondo membro è, egualmente che il primo, una funzione lineare delle quantità (42), che una simile funzione racchiudendo $2k+1$ coefficienti, può essere completamente determinata col mezzo dei $2k+1$ valori particolari corrispondenti ai valori di T compresi nella serie (46) e che la formola (47) sussiste per ciascuno di questi valori di T, atteso che l', l'' indicando due valori di l presi nella serie (44), si avrà

$$S_{h=-k}^{h=k}\,e^{\frac{2h(l''-l')\pi}{2k+1}\sqrt{-1}}=0$$

se l' differisce da l'', e

$$S_{h=-k}^{h=k}\,e^{\frac{2h(l''-l')\pi}{2k+1}\sqrt{-1}}=2k+1$$

se $l'=l''$. Si dimostrebbe nello stesso modo l'esattezza dell'equazione

$$(48)\qquad f(T)=\frac{1}{2(k+1)}\,S_{l=-k}^{l=k+1}\,S_{h=-k}^{h=k}\,e^{h\left(T-T_0-\frac{l\pi}{k+1}\right)\sqrt{-1}}\,f\left(T_0+\frac{l\pi}{k+1}\right)$$

che fornisce il valore generale di $f(T)$ espresso col mezzo di $2k+2$ valori particolari corrispondenti ai valori di T compresi nella formola

$$(49)\qquad T_0+\frac{l\pi}{k+1}$$

essendo l uno dei termini della serie

$$(50)\qquad -k,\ -(k-1),\ \text{- - - -}1,\ 0,\ 1,\ \text{- - -}(k-1),\ k,\ k+1.$$

Immaginiamo ora che $f(T)$ si componga soltanto di termini proporzionali alle quantità

$$(51)\qquad \begin{array}{l}\cos.kT,\ \cos.(k-2)T,\ \cos.(k-4)T,\ \text{- - -}\\ \sin.kT,\ \sin.(k-2)T,\ \sin.(k-4)T,\ \text{- - -}\end{array}$$

si troverà

$$f\left(T_0+\frac{l-(k+1)}{k+1}\pi\right)=f\left(T_0+\frac{l\pi}{k+1}-\pi\right)=(-1)^k f\left(T_0+\frac{l\pi}{k+1}\right)$$

e siccome si avrà d'altronde

$$e^{-h\frac{l-(k+1)}{k+1}\pi\sqrt{-1}}=(-1)^h e^{-\frac{hl\pi}{k+1}\sqrt{-1}}$$

$$\left\{1+(-1)^{k-h}\right\}e^{-h\pi\sqrt{-1}}f(T+\pi)=\left\{1+(-1)^{k-h}\right\}f(T),$$

si dedurrà dalla formola (48)

$$(52)\quad f(T)=\frac{1}{2(k+1)}S_{l=0}^{l=k}S_{h=-k}^{h=k}\left\{1+(-1)^{k-h}\right\}e^{h\left(T-T_0-\frac{l\pi}{k+1}\right)\sqrt{-1}}f\left(T_0+\frac{l\pi}{k+1}\right)$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(53)\qquad f(T)=\frac{1}{k+1}S_{l=0}^{l=k}S_{h=-k}^{h=k}\ e^{h\left(T-T_0-\frac{l\pi}{k+1}\right)\sqrt{-1}}f\left(T_0+\frac{l\pi}{k+1}\right)$$

il segno S estendendosi ai soli valori interi di h che rendono pari la differenza $k-h$, dal valor negativo di $h=-k$ sino al valor positivo di $h=k$.

L'equazione (47) essendo vera qualunque sia il valore attribuito a T_0, continuerà a sussistere se si pone zero in luogo di T_0 od anche T per T_0. Si avrà dunque ancora

$$(54)\qquad f(T)=\frac{1}{2k+1}S_{l=-k}^{l=k}S_{h=-k}^{h=k}\ e^{h\left(T-\frac{2l\pi}{2k+1}\right)\sqrt{-1}}f\left(\frac{2l\pi}{2k+1}\right)$$

e

$$(55)\qquad f(T)=\frac{1}{2k+1}S_{l=-k}^{l=k}S_{h=-k}^{h=k}\ e^{-\frac{2hl\pi}{2k+1}\sqrt{-1}}f\left(T+\frac{2l\pi}{2k+1}\right).$$

Vi ha di più: siccome nel secondo membro della equazione (47) la somma dei termini corrispondenti ad un valor dato di h, cioè

$$(56)\qquad \frac{1}{2k+1}S_{l=-k}^{l=k}\ e^{h\left(T-T_0-\frac{2l\pi}{2k+1}\right)\sqrt{-1}}f\left(T_0+\frac{2l\pi}{2k+1}\right)$$

sarà precisamente la parte di $f(T)$ che è proporzionale a

$$e^{hT\sqrt{-1}}:$$

egli è chiaro che l'espressione (56) dovrà essere essa stessa indipendente da T_0 e non sarà punto alterata quando vi si sostituirà lo zero o il T per T_0, di modo che si avrà identicamente

$$(57)\quad S_{l=-k}^{l=k}\ e^{h\left(T-T_0-\frac{2l\pi}{2k+1}\right)\sqrt{-1}}f\left(T_0+\frac{2l\pi}{2k+1}\right)=S_{l=-k}^{l=k}\ e^{h\left(T-\frac{2l\pi}{2k+1}\right)\sqrt{-1}}f\left(\frac{2l\pi}{2k+1}\right)$$

$$=S_{l=-k}^{l=k}\ e^{-\frac{2hl\pi}{2k+1}\sqrt{-1}}f\left(T+\frac{2l\pi}{2k+1}\right).$$

Parimenti si dedurrà dall'equazione (53)

$$(58)\quad f(T)=\frac{1}{k+1}S_{l=0}^{l=k}S_{h=-k}^{h=k}\ e^{h\left(T-\frac{l\pi}{k+1}\right)\sqrt{-1}}f\left(\frac{l\pi}{k+1}\right)$$

$$(59)\quad f(T)=\frac{1}{k+1}S_{l=0}^{l=k}S_{h=-k}^{h=k}\ e^{-\frac{hl\pi}{k+1}\sqrt{-1}}f\left(T+\frac{l\pi}{k+1}\right)$$

e si avrà pure identicamente

$$(60)\qquad S_{l=0}^{l=k}\, e^{h\left(T-T_0-\frac{l\pi}{k+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(T_0+\frac{l\pi}{k+1}\right)=S_{l=0}^{l=k}\, e^{h\left(T-\frac{l\pi}{k+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(\frac{l\pi}{k+1}\right)$$

$$=S_{l=0}^{l=k}\, e^{-\frac{hl\pi}{k+1}\sqrt{-1}} f\left(T+\frac{l\pi}{k+1}\right);$$

il segno S in ciascuna di queste tre formole estendendosi ai soli valori di h che rendono pari la differenza $k-h$.

Sia ora $f(T, T')$ una funzione lineare di

$$\cos.T,\ \cos.2T,\ ---\ \cos.kT;\quad \sin.T,\ \sin.2T,\ ---\ \sin.kT$$

$$\cos.T',\ \cos.2T',\ ---\ \cos.kT';\quad \sin.T',\ \sin.2T',\ ---\ \sin.kT'.$$

Si dedurrà successivamente dalla formola (47)

$$f(T, T')=\frac{1}{2k+1}\, S_{l=-k}^{l=k}\, S_{h=-k}^{h=k}\, e^{h\left(T-T_0-\frac{2l\pi}{2k+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(T_0+\frac{2l\pi}{2k+1},\ T'\right)$$

indi

$$f\left(T_0+\frac{2l\pi}{2k+1},\ T'\right)=\frac{1}{2k+1}\, S_{l'=-k}^{l'=k}\, S_{h'=-k}^{h'=k}\, e^{h'\left(T'-T'_0-\frac{2l'\pi}{2k+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(T_0+\frac{2l\pi}{2k+1},\ T'_0+\frac{2l'\pi}{2k+1}\right)$$

e per conseguenza

$$(61)\qquad f(T, T')=$$

$$\frac{1}{(2k+1)^2}\, S_{l=-k}^{l=k}\, S_{l'=-k}^{l'=k}\, S_{h=-k}^{h=k}\, S_{h'=-k}^{h'=k}\, e^{h(T-T_0)\sqrt{-1}}\, e^{h'(T'-T'_0)\sqrt{-1}}\, e^{-\frac{hl+h'l'}{2k+1}2\pi\sqrt{-1}} f\left(T_0+\frac{2l\pi}{2k+1},\ T'_0+\frac{2l'\pi}{2k+1}\right).$$

Poscia se ne conchiuderà 1.° ponendo zero per T_0 e T'_0

$$(62)\qquad f(T, T')=$$

$$\frac{1}{(2k+1)^2}\, S_{l=-k}^{l=k}\, S_{l'=-k}^{l'=k}\, S_{h=-k}^{h=k}\, S_{h'=-k}^{h'=k}\, e^{(hT+h'T')\sqrt{-1}}\, e^{-\frac{hl+h'l'}{2k+1}2\pi\sqrt{-1}} f\left(\frac{2l\pi}{2k+1},\ \frac{2l'\pi}{2k+1}\right),$$

2.° ponendo T per T_0 e T' per T'_0

$$(63)\qquad f(T, T')=$$

$$\frac{1}{(2k+1)^2}\, S_{l=-k}^{l=k}\, S_{l'=-k}^{l'=k}\, S_{h=-k}^{h=k}\, S_{h'=-k}^{h'=k}\, e^{-\frac{hl+h'l'}{2k+1}2\pi\sqrt{-1}} f\left(T+\frac{2l\pi}{2k+1},\ T'+\frac{2l'\pi}{2k+1}\right).$$

Aggiungiamo che si avrà in forza della formola (57)

$$S_{l=-k}^{l=k}\, S_{l'=-k}^{l'=k}\, e^{h(T-T_0)\sqrt{-1}}\, e^{h'(T'-T'_0)\sqrt{-1}}\, e^{-\frac{hl+h'l'}{2k+1}2\pi\sqrt{-1}} f\left(T_0+\frac{2l\pi}{2k+1},\ T'_0+\frac{2l'\pi}{2k+1}\right)$$

$$(64)\qquad =S_{l=-k}^{l=k}\, S_{l'=-k}^{l'=k}\, e^{(hT+h'T')\sqrt{-1}}\, e^{-\frac{hl+h'l'}{2k+1}2\pi\sqrt{-1}} f\left(\frac{2l\pi}{2k+1},\ \frac{2l'\pi}{2k+1}\right)$$

$$=S_{l=-k}^{l=k}\, S_{l'=-k}^{l'=k}\, e^{-\frac{hl+h'l'}{2k+1}2\pi\sqrt{-1}} f\left(T+\frac{2l\pi}{2k+1},\ T'+\frac{2l'\pi}{2k+1}\right).$$

Allorchè la funzione $f(T, T')$ sarà composta di termini proporzionali alle sole quantità

$$\cos.kT,\ \cos.(k-2)T, \text{------};\quad \sin.kT,\ \sin.(k-2)T, \text{---},$$

$$\cos.kT',\ \cos.(k-2)T', \text{------};\quad \sin.kT',\ \sin.(k-2)T', \text{---},$$

si dedurrà dalle formole (53), (54), (55) e (57)

$$(65)\qquad f(T, T') =$$

$$\frac{1}{(k+1)^2} S_{l=0}^{l=k} S_{l'=0}^{l'=k} S_{h=-k}^{h=k} S_{h'=-k}^{h'=k} e^{h(T-T_0)\sqrt{-1}} e^{h'(T'-T'_0)\sqrt{-1}} e^{-\frac{hl+h'l'}{k+1}} f\left(T_0+\frac{l\pi}{k+1}, T'_0+\frac{l'\pi}{k+1}\right)$$

$$(66)\qquad f(T, T') =$$

$$\frac{1}{(k+1)^2} S_{l=0}^{l=k} S_{l'=0}^{l'=k} S_{h=-k}^{h=k} S_{h'=-k}^{h'=k} e^{(hT+h'T')\sqrt{-1}} e^{-\frac{hl+h'l'}{k+1}\pi\sqrt{-1}} f\left(\frac{l\pi}{k+1}, \frac{l'\pi}{k+1}\right)$$

$$(67)\ f(T, T') = \frac{1}{(k+1)^2} S_{l=0}^{l=k} S_{l'=0}^{l'=k} S_{h=-k}^{h=k} S_{h'=-k}^{h'=k} e^{-\frac{hl+h'l'}{k+1}\pi\sqrt{-1}} f\left(T+\frac{l\pi}{k+1}, T'+\frac{l'\pi}{k+1}\right)$$

il segno S estendendosi a tutti i valori interi di h, h' che rendono pari le differenze $k-h$, $k-h'$ dal valore negativo $-k$ sino al valore positivo k, e

$$S_{l=0}^{l=k} S_{l'=0}^{l'=k} e^{h(T-T_0)\sqrt{-1}} e^{h'(T'-T'_0)\sqrt{-1}} e^{-\frac{hl+h'l'}{k+1}\pi\sqrt{-1}} f\left(T_0+\frac{l\pi}{k+1}, T'_0+\frac{l'\pi}{k+1}\right)$$

$$(68)\qquad = S_{l=0}^{l=k} S_{l'=0}^{l'=k} e^{(hT+h'T')\sqrt{-1}} e^{-\frac{hl+h'l'}{k+1}\pi\sqrt{-1}} f\left(\frac{l\pi}{k+1}, \frac{l'\pi}{k+1}\right)$$

$$= S_{l=0}^{l=k} S_{l'=0}^{l'=k} e^{-\frac{lh+h'l'}{k+1}\pi\sqrt{-1}} f\left(T+\frac{l\pi}{k+1}, T'+\frac{l'\pi}{k+1}\right).$$

Col mezzo delle formole (61) e seguenti si determinerà senza fatica il valore dell' integrale

$$\int f(T, T')\,dt$$

essendo i valori di T, T'

$$(69)\qquad T = \alpha t + c,\quad T' = \alpha' t + c'.$$

Se per fissare le idee si applica a questa determinazione la formola (62), si troverà

$$(70)\qquad \int f(T, T')\,dt = \text{costante} +$$

$$\frac{1}{(2k+1)^2} S_{l=-k}^{l=k} S_{l'=-k}^{l'=k} S_{h=-k}^{h=k} S_{h'=-k}^{h'=k} \frac{e^{(hT+h'T')\sqrt{-1}}}{(h\alpha+h'\alpha')\sqrt{-1}} e^{-\frac{hl+h'l'}{2k+1}2\pi\sqrt{-1}} f\left(\frac{2l\pi}{2k+1}, \frac{2l'\pi}{2k+1}\right)$$

e siccome quest' ultima formola sussiste mentre che h ed h' cambiano di segno, se ne conchiuderà

$$(71)\qquad \int f(T,\,T')\,dt = \text{costante} +$$

$$\frac{1}{(2k+1)^2}\,S_{l=-k}^{l=k}\,S_{l'=-k}^{l'=k}\,S_{h=-k}^{h=k}\,S_{h'=-k}^{h'=k}\,\frac{\sin.\left(hT+h'T'-\frac{hl+h'l'}{2k+1}\,2\pi\right)}{ha+h'a'}\,f\left(\frac{2l\pi}{2k+1},\,\frac{2l'\pi}{2k+1}\right);$$

si avrà per conseguenza

$$(72)\qquad \int_0^t f(T,\,T')\,dt = \frac{1}{(2k+1)^2}\,S_{l=-k}^{l=k}\,S_{l'=-k}^{l'=k}\,S_{h=-k}^{h=k}\,S_{h'=-k}^{h'=k}\,\cdot$$

$$\frac{\sin.\left(hT+h'T'-\frac{hl+h'l'}{2k+1}\,2\pi\right)-\sin.\left(hc+h'c'-\frac{hl+h'l'}{2k+1}\,2\pi\right)}{ha+h'a'}\,f\left(\frac{2l\pi}{2k+1},\,\frac{2l'\pi}{2k+1}\right)$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(73)\qquad \int_0^t f(T,\,T')\,dt = \frac{1}{(2k+1)^3}\,S_{l=-k}^{l=k}\,S_{l'=-k}^{l'=k}\,S_{h=-k}^{h=k}\,S_{h'=-k}^{h'=k}\,\cdot$$

$$\frac{\sin.\left(\frac{ha+h'a'}{2}\,t\right)\cos.\left(\frac{ha+h'a'}{2}\,t+hc+h'c'-\frac{hl+h'l'}{2k+1}\,2\pi\right)}{\frac{1}{2}(ha+h'a')}\,f\left(\frac{2l\pi}{2k+1},\,\frac{2l'\pi}{2k+1}\right).$$

È bene osservare che pei valori di h e di h' che verificano la condizione

$$ha+h'a'=0$$

la frazione

$$\frac{\sin.\left(hT+h'T'-\frac{hl+h'l'}{2k+1}\,2\pi\right)-\sin.\left(hc+h'c'-\frac{hl+h'l'}{2k+1}\,2\pi\right)}{ha+h'a'}$$

$$=\frac{\sin.\left(\frac{ha+h'a'}{2}\,t\right)\cos.\left(\frac{ha+h'a'}{2}\,t+hc+h'c'-\frac{hl+h'l'}{2k+1}\,2\pi\right)}{\frac{1}{2}(ha+h'a')}$$

si riduce a

$$t\cos.\left(hc+h'c'-\frac{hl+h'l'}{2k+1}\,2\pi\right).$$

Questa frazione si ridurrà dunque semplicemente a t quando si faranno simultaneamente

$$h=0\,,\quad h'=0\,.$$

Col mezzo delle formole precedentemente stabilite si potrà facilmente sviluppare l'espressione

$$\cos.^k\Delta_{T,\,T'}$$

secondo i seni e coseni dei multipli di T e di T', o, ciò che torna lo stesso,

secondo le potenze degli esponenziali

$$e^{\pm T\sqrt{-1}}\,;\quad e^{\pm T'\sqrt{-1}},$$

essendo $\cos.\Delta_{T,T'}$ ciò che diventa il secondo membro dell'espressione (17) del paragrafo precedente quando si ponga $p-\varpi$ in luogo di T e $p'-\varpi'$ in luogo di T'. Difatti in questa ipotesi il prodotto

$$e^{T\sqrt{-1}}\cos.\Delta_{T,T'}$$

sarà una funzione lineare dell'esponenziale $e^{2T\sqrt{-1}}$. Conseguentemente il prodotto

$$e^{kT\sqrt{-1}}\cos.^k\Delta_{T,T'},$$

considerato come funzione di questo esponenziale, sarà del grado k: dal che è facile conchiudere che lo sviluppo di

$$\cos.^k\Delta_{T,T'}$$

comprenderà soltanto i seni e coseni degli archi

$$kT,\ (k-2)T,\ (k-4)T,\ ---.$$

Si proverà parimenti che lo sviluppo in questione racchiude soltanto i seni e coseni degli archi

$$kT',\ (k-2)T',\ (k-4)T',\ ---.$$

Si potrà dunque porre nella formola (66)

$$f(T,T')=\cos.^k\Delta_{T,T'}$$

e se ne dedurrà immediatamente

$$(74)\qquad \cos.^k\Delta_{T,T'}=\left(\frac{1}{k+1}\right)^2 S\,e^{(hT+h'T')\sqrt{-1}}\,e^{-\frac{hl+h'l'}{k+1}\pi\sqrt{-1}}\cos.^k\Delta_{\frac{l\pi}{k+1},\frac{l'\pi}{k+1}}$$

il segno S estendendosi a tutti i valori interi di l e di l' dal limite zero sino al limite k, ed a tutti i valori interi di h, h' che rendono pari le differenze $k-h$, $k-h'$, dal valor negativo $-k$ sino al valor positivo k. Basterà sostituire il valor precedente di $\cos.^k\Delta_{T,T'}$ nell'equazione (32) perchè ciascun termine del secondo membro divenga immediatamente integrabile per rapporto a t.

Se nella formola (74) si pone $p-\varpi$ per T e $p'-\varpi'$ per T', si troverà

$$(75)\qquad \cos.^k\delta=\left(\frac{1}{k+1}\right)^2 S\,e^{h(p-\varpi)\sqrt{-1}}\,e^{h'(p'-\varpi')\sqrt{-1}}\,e^{-\frac{hl+h'l'}{k+1}\pi\sqrt{-1}}\cos.^k\Delta_{\frac{l\pi}{k+1},\frac{l'\pi}{k+1}}.$$

La formola (75) coincide colla formola (74) come l'equazione (32) coll'equazione (13) nel caso particolare in cui si ha

$$\varepsilon=0,\quad \varepsilon'=0.$$

Se nello stesso caso si pone

$$(76)\qquad K=\frac{1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2\cdot 4\cdots 2k}\,2^k\left(a^2+a'^2\right)^{-k-\frac{1}{2}}=\left[\frac{1}{2}\right]_k 2^k\left(a^2+a'^2\right)^{-k-\frac{1}{2}}$$

si avrà

$$(77)\qquad \Theta_k=Ka^k a'^k$$

ed il valore di P determinato coll'equazione (32) diverrà

$$(78)\qquad P=m'SKa^k a'^k \cos.^k\Delta_{T,T'}\,.$$

Per ritornare dal valore precedente di P a quello determinato dall'equazione (13) basterà sostituire a $\cos.\Delta_{T,T'}$ la quantità $\cos.\delta$, ai semiassi a, a' i raggi vettori

$$(79)\qquad r=a-a\,\varepsilon\cos.\psi\,,\quad r'=a'-a'\varepsilon'\cos.\psi'$$

e inoltre alla costante K, ciò che diventa questa costante quando si fa in essa crescere a di $-a\,\varepsilon\cos.\psi$ ed a' di $-a'\varepsilon'\cos.\psi'$, vale a dire la somma

$$(80)\qquad S(-1)^{f+f'}\frac{(a\,\varepsilon\cos.\psi)^f}{1\cdot 2\cdots f}\,\frac{(a'\varepsilon'\cos.\psi')^{f'}}{1\cdot 2\cdots f'}\,\frac{d^{f+f'}K}{d\,a^f\,d\,a'^{f'}}\,,$$

il segno S estendendosi a tutti i valori interi nulli o positivi di f, f'. Ciò posto, il valore di P dato dall'equazione (13) diverrà

$$(81)\qquad P=m'S(-1)^{f+f'}\frac{(a\,\varepsilon\cos.\psi)^f}{1\cdot 2\cdots f}\,\frac{(a'\varepsilon'\cos.\psi')^{f'}}{1\cdot 2\cdots f'}\,\frac{d^{f+f'}K}{d\,a^f\,d\,a'^{f'}}\,r^k r'^k\cos.^k\delta$$

e si avrà in virtù della formola (75)

$$(82)\qquad r^k r'^k\cos.^k\delta=\left(\frac{1}{k+1}\right)^2 Sr^k e^{h(p-\varpi)\sqrt{-1}}\,r'^k e^{h'(p'-\varpi')\sqrt{-1}}\,e^{-\frac{hl+h'l'}{k+1}\pi\sqrt{-1}}\cos.^k\Delta_{\frac{l\pi}{k+1},\,\frac{l'\pi}{k+1}}\,,$$

il segno S estendendosi a tutti i valori interi di l e di l' dal limite zero sino al limite k, ed a tutti i valori interi di h, h' che rendono pari le differenze $k-h$, $k-h'$ dal valor negativo $-k$ sino al valor positivo k. Siccome si avrà d'altronde

$$(83)\qquad \cos.(p-\varpi)=\frac{\cos.\psi-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos.\psi}\,,\quad \sin.(p-\varpi)=\frac{\eta\sin.\psi}{1-\varepsilon\cos.\psi}\,,$$

il valore di η essendo

$$(84)\qquad \eta=(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}:$$

se ne conchiuderà

$$(85)\qquad \begin{aligned} e^{(p-\varpi)\sqrt{-1}}&=\frac{\cos.\psi-\varepsilon+\eta\sin.\psi\sqrt{-1}}{1-\varepsilon\cos.\psi}=\frac{1}{2}\,\frac{(1+\eta)e^{\psi\sqrt{-1}}-2\varepsilon+(1-\eta)e^{-\psi\sqrt{-1}}}{1-\varepsilon\cos.\psi}\\ e^{-(p-\varpi)\sqrt{-1}}&=\frac{\cos.\psi-\varepsilon-\eta\sin.\psi\sqrt{-1}}{1-\varepsilon\cos.\psi}=\frac{1}{2}\,\frac{(1+\eta)e^{-\psi\sqrt{-1}}-2\varepsilon+(1-\eta)e^{\psi\sqrt{-1}}}{1-\varepsilon\cos.\psi}\,; \end{aligned}$$

e per conseguenza si troverà

$$(86)\quad \begin{aligned} r^k e^{h(p-\varpi)\sqrt{-1}} &= \frac{a^k}{2^k}(1-\varepsilon\cos.\psi)^{k-h}\left\{(1+\eta)e^{\psi\sqrt{-1}}-2\varepsilon+(1-\eta)e^{-\psi\sqrt{-1}}\right\}^h \\ r^k e^{-h(p-\varpi)\sqrt{-1}} &= \frac{a^k}{2^k}(1-\varepsilon\cos.\psi)^{k-h}\left\{(1+\eta)e^{-\psi\sqrt{-1}}-2\varepsilon+(1-\eta)e^{\psi\sqrt{-1}}\right\}^h. \end{aligned}$$

Se per maggiore comodità si pone

$$(87)\qquad i=\frac{h}{\sqrt{h^2}},$$

nel qual caso i sarà $+1$ per valori positivi di h e -1 per valori negativi di h, alle equazioni (86) si potrà sostituire la sola formola

$$(88)\qquad r^k e^{h(p-\varpi)\sqrt{-1}}=\frac{a^k}{2^{ih}}(1-\varepsilon\cos.\psi)^{k-ih}\left\{(1+\eta)^{i\psi\sqrt{-1}}-2\varepsilon+(1-\eta)e^{-\psi i\sqrt{-1}}\right\}^{ih}.$$

Si avrà d'altra parte

$$\begin{aligned} &\left\{(1+\eta)e^{i\psi\sqrt{-1}}-2\varepsilon+(1-\eta)e^{i\psi\sqrt{-1}}\right\}^{ih} \\ &=S(-1)^{ih-g}\,2^{ih-g}(ih)_{\lambda,g-\lambda}\,\varepsilon^{ih-g}(1+\eta)^{g-\lambda}(1-\eta)^{\lambda}e^{(g-2\lambda)i\psi\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

e

$$(1-\varepsilon\cos.\psi)^{k-ih}=S(-1)^{\mu}(k-ih)_{\mu}\,\varepsilon^{\mu}\cos.^{\mu}\psi\,;$$

indi avendo riguardo alla formola

$$(1+\eta)(1-\eta)=\varepsilon^2$$

se ne conchiuderà

$$(90)\qquad r^k e^{h(p-\varpi)\sqrt{-1}}=$$

$$a^k S\frac{(-1)^{ih-g+\mu}}{2^g}(ih)_{\lambda,g-\lambda}(k-ih)_{\mu}\,\varepsilon^{ih-g+\mu+2\lambda}(1+\eta)^{g-2\lambda}e^{(g-2\lambda)i\psi\sqrt{-1}}\cos.^{\mu}\psi\,;$$

si troverà parimenti

$$(91)\qquad r'^k e^{h'(p'-\varpi')\sqrt{-1}}=$$

$$a'^k S\frac{(-1)^{i'h'-g'+\mu'}}{2^{g'}}(i'h')_{\lambda',g'-\lambda'}(k-i'h')_{\mu'}\,\varepsilon'^{i'h'-g'+\mu'+2\lambda'}(1+\eta')^{g'-2\lambda'}e^{(g'-2\lambda')i'\psi\sqrt{-1}}\cos.^{\mu'}\psi',$$

il valore di i' essendo

$$(92)\qquad i'=\frac{h'}{\sqrt{h'^2}}.$$

Ciò posto, se si fa per abbreviazione

$$(93)\quad \begin{aligned} \Psi=\frac{a^{k+f}}{k+1}\;&\frac{(-1)^{f+ih-g+\mu}}{2^g(1\cdot2\cdot3\cdots f)}(ih)_{\lambda,g-\lambda}(k-ih)_{\mu}\,\varepsilon^{f+ih-g+\mu+2\lambda}\times \\ &(1+\eta)^{g-2\lambda}e^{-\frac{h\sqrt{\pi}}{k+1}\sqrt{-1}}e^{(g-2\lambda)i\psi\sqrt{-1}}\cos.^{f+\mu}\psi \end{aligned}$$

$$(94)\quad \begin{aligned} \Psi'=\frac{a'^{f'+k}}{k+1}\;&\frac{(-1)^{f'+i'h'-g'+\mu'}}{2^{g'}(1\cdot2\cdot3\cdots f')}(i'h')_{\lambda',g'-\lambda'}(k-i'h')_{\mu'}\,\varepsilon'^{f'+i'h'-g'+\mu'+2\lambda'}\times \\ &(1+\eta')^{g'-2\lambda'}e^{-\frac{h'\sqrt{\pi}}{k+1}\sqrt{-1}}e^{(g'-2\lambda')i'\psi'\sqrt{-1}}\cos.^{f'+\mu'}\psi'\,: \end{aligned}$$

si dedurrà dalle formole (81), (82), (90) e (91)

$$(95)\qquad P = m' S \Psi \Psi' \frac{d^{f+f'} K}{da^f\, da'^{f'}} \cos.^k \Delta_{\frac{l\pi}{k+1},\, \frac{l'\pi}{k+1}}.$$

D'altronde ψ essendo radice dell'equazione

$$(96)\qquad \psi = T + \varepsilon \sin.\psi,$$

si avrà in virtù della formola di Lagrange

$$(97)\qquad e^{(g-2\lambda)i\psi\sqrt{-1}} \cos.^{f+\mu}\psi =$$

$$S_{\nu=0}^{\nu=\infty} \frac{\varepsilon^\nu}{1\cdot 2 \cdots \nu} \left\{ \frac{d^\nu e^{i(g-2\lambda)T\sqrt{-1}} \cos.^{f+\mu} T \sin.^\nu T}{dT^\nu} - \nu \frac{d^{\nu-1} e^{i(g-2\lambda)T\sqrt{-1}} \cos.^{f+\mu+1} T \sin.^{\nu-1} T}{dT^{\nu-1}} \right\};$$

poscia avendo riguardo all'equazione

$$(98)\qquad \cos.^{f+\mu} T \sin.^\nu T = S(-1)^\varsigma \frac{(f+\mu)_\rho (\nu)_\varsigma}{2^{f+\mu+\nu}} \frac{e^{(f+\mu+\nu-2\rho-2\varsigma)T\sqrt{-1}}}{(\sqrt{-1})^\nu}$$

se ne conchiuderà

$$(99)\qquad e^{(g-2\lambda)i\psi\sqrt{-1}} \cos.^{f+\mu}\psi = S \frac{\varepsilon^\nu}{1\cdot 2 \cdots \nu} \left\{ \begin{matrix} (-1)^\varsigma N (f+\mu)_\rho (\nu)_\varsigma \\ -(-1)^\varsigma \nu (f+\mu+1)_\rho (\nu-1)_\varsigma \end{matrix} \right\} \frac{N^{\nu-1}}{2^{f+\mu+\nu}} e^{NT\sqrt{-1}},$$

il valore di N essendo

$$(100)\qquad N = f + \mu + \nu + i(g - 2\lambda) - 2\rho - 2\varsigma.$$

Si troverà parimenti

$$(101)\qquad e^{(g'-2\lambda')i'\psi'\sqrt{-1}} \cos.^{f'+\mu'}\psi' =$$

$$S \frac{\varepsilon'^{\nu'}}{1\cdot 2 \cdots \nu'} \left\{ (-1)^{\varsigma'} N' (f'+\mu')_{\rho'} (\nu')_{\varsigma'} - (-1)^{\varsigma'} \nu' (f'+\mu'+1)_{\rho'} (\nu'-1)_{\varsigma'} \right\} \frac{N'^{\nu'-1}}{2^{f'+\mu'+\nu'}} e^{N'T'\sqrt{-1}},$$

il valore di N' essendo

$$(102)\qquad N' = f' + \mu' + \nu' + i'(g' - 2\lambda') - 2\rho' - 2\varsigma'.$$

In seguito se si pone

$$(103)\qquad n = f + ih - g + \mu + \nu + 2\lambda;$$

$$(104)\qquad n' = f' + i'h' - g' + \mu' + \nu' + 2\lambda';$$

$$(105)\qquad E = \varepsilon^n (1+\eta)^{g-2\lambda};$$

$$(106)\qquad E' = \varepsilon'^{n'} (1+\eta')^{g'-2\lambda'};$$

$$(107)\qquad A = \frac{a^{k+f}}{1\cdot 2 \cdots f} S \frac{(-1)^{n-\nu}}{2^{f+g+\mu+\nu}} (ih)_{\lambda,\, g-\lambda} (k-ih)_\mu \times$$

$$E \left\{ (-1)^\varsigma N (f+\mu)_\rho (\nu)_\varsigma - (-1)^\varsigma \nu (f+\mu+1)_\rho (\nu-1)_\varsigma \right\} \frac{N^{\nu-1}}{1\cdot 2 \cdots \nu};$$

$$(108)\qquad A' = \frac{a'^{k+f'}}{1\cdot 2 \cdots f'} S \frac{(-1)^{n'-\nu'}}{2^{f'+g'+\mu'+\nu'}} (i'h')_{\lambda',\, g'-\lambda'} (k-i'h')_{\mu'} \times$$

$$E' \left\{ (-1)^{\varsigma'} N' (f'+\mu')_{\rho'} (\nu')_{\varsigma'} - (-1)^{\varsigma'} \nu' (f'+\mu'+1)_{\rho'} (\nu'-1)_{\varsigma'} \right\} \frac{N'^{\nu'-1}}{1\cdot 2 \cdots \nu'};$$

si dedurrà dalle formole (93), (94) e (95)

$$(109)\qquad P = m'S\frac{AA'}{(k+1)^2}\,\frac{d^{f+f'}K}{d\alpha^f d\alpha'^{f'}}\cos.^k\Delta_{\frac{l\pi}{k+1},\,\frac{l'\pi}{k+1}}\,e^{\left(NT+N'T'-\frac{hl+h'l'}{k+1}\pi\right)\sqrt{-1}};$$

poscia osservando che il valore di P deve ridursi ad una quantità reale, si dedurrà dalla formola (109)

$$(110)\qquad P = m'S\frac{AA'}{(k+1)^2}\,\frac{d^{f+f'}K}{d\alpha^f d\alpha'^{f'}}\cos.^k\Delta_{\frac{l\pi}{k+1},\,\frac{l'\pi}{k+1}}\cos.\left(NT+N'T'-\frac{hl+h'l'}{k+1}\pi\right).$$

Nelle equazioni (107), (108) invece delle espressioni

$$(-1)^{f+ih-g+\mu},\qquad (-1)^{f'+i'h'-g'+\mu'}$$

si sono poste le

$$(-1)^{n-\nu},\qquad (-1)^{n'-\nu'}$$

che loro sono equivalenti in virtù delle formole (103), (104). Siegue d'altronde dai principj qui sopra esposti che nelle formole (107), (108), (109), (110) il segno S si estende a tutti i valori interi nulli o positivi di

$$k,\ f,\ f',\ \nu,\ \nu';$$

a tutti i valori interi positivi nulli o negativi di h, h' che rendano pari le differenze

$$k-h,\qquad k+h'$$

dal valor negativo $-k$ sino al valor positivo $+k$: a tutti i valori interi nulli o positivi di

$$l,\ g,\ \lambda,\ \mu$$

$$l',\ g',\ \lambda',\ \mu'$$

che rendano nulle o positive le differenze

$$(111)\qquad k-l;\quad ih-g;\quad g-\lambda;\quad (k-ih)-\mu$$

$$(112)\qquad k-l';\quad i'h'-g';\quad g'-\lambda';\quad (k-i'h')-\mu';$$

finalmente a tutti i valori interi, nulli o positivi di

$$\rho,\quad \varsigma$$

$$\rho',\quad \varsigma'$$

che rendano nulle o positive le differenze

$$(113)\qquad (f+\mu)-\rho;\qquad \nu-\varsigma$$

$$(114)\qquad (f'+\mu')-\rho';\quad \nu'-\varsigma'$$

oppure le differenze

$$(115)\qquad (f+\mu+1)-\rho;\qquad (\nu-1)-\varsigma$$

$$(116)\qquad (f'+\mu'+1)-\rho';\quad (\nu'-1)-\varsigma'.$$

È d'uopo osservare che dalle formole (100) e (103) si deducono

$$(117)\qquad \begin{aligned} \frac{n-ih-N}{2} &= \rho+\varsigma-\frac{1+i}{2}(g-2\lambda), \\ \frac{n-ih+N}{2} &= f+\mu+\nu-(\rho+\varsigma)-\frac{1-i}{2}(g-2\lambda). \end{aligned}$$

Ora i secondi membri delle equazioni (117) essendo interi, i primi membri lo dovranno essere parimenti, per il che

$$n \mp N - ih$$

e per conseguenza

$$n \mp N - k$$

sarà un numero pari, o, ciò che torna lo stesso,

$$n \pm N$$

sarà pari o dispari insieme col numero k. D'altra parte $\rho+\varsigma$ essendo sempre compreso fra i limiti

$$0; \quad f+\mu+\nu,$$

λ fra i limiti *zero*, g, e conseguentemente

$$\frac{1\pm i}{2}(g-2\lambda)$$

fra i limiti $-g$, $+g$, atteso che si ha

$$\frac{1\pm i}{2}=0 \quad \text{ovvero} \quad =1,$$

egli è chiaro che il secondo membro di ciascuna delle equazioni (117) diverrà nullo o positivo se si aggiunge a questo secondo membro la quantità g. Si avrà in conseguenza

$$\frac{n-ih\pm N}{2}+g= \text{ ovvero } >0,$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$n+2g-ih\pm N= \text{ ovvero } >0,$$

e siccome si avrà d'altronde

$$ih= \text{ ovvero } >g,$$

si troverà pure

$$(118)\qquad n+g\pm N= \text{ ovvero } >0,$$

sia che si riduca il doppio segno collocato innanzi alla lettera N al segno $+$ o al segno $-$. Dunque il valor numerico di N è tutt'al più eguale ad $n+g$, *a fortiori* a $n+ih$ ed a $n+k$: di modo che si ha generalmente

$$(119)\qquad n+ih= \text{ ovvero } >\sqrt{N^2}$$

e

$$(120)\qquad n+k= \text{ ovvero } >\sqrt{N^2}.$$

Dunque se il numero k non sorpassa un limite dato, il valor numerico di N non potrà crescere indefinitamente se non in quanto la stessa n crescerà indefinitamente. D'altronde l'eccentricità ε essendo considerata come quantità assai piccola di primo ordine, il valore di E dato dall'equazione (105) sarà dell'ordine n. Dunque l'ordine di E sorpasserà sempre $\sqrt{N^2}-k$ ed il valore numerico di A diverrà assai piccolo per grandi valori numerici di N.

È facilissimo trovare in P i termini corrispondenti a valori di

$$N, n; \quad N', n'$$

che verifichino le condizioni

$$(121) \qquad n+g=\pm N, \quad n'+g'=\pm N'.$$

Difatti si deducono dalle formole (117) le

$$(122) \qquad \begin{aligned} \frac{n+g-N}{2} &= \frac{g+ih-(1+i)(g-2\lambda)}{2}+\rho+\varsigma \\ \frac{n+g+N}{2} &= \frac{g+ih-(1-i)(g-2\lambda)}{2}+f+\mu+\nu-(\rho+\varsigma). \end{aligned}$$

Ora siccome nei secondi membri della formola (122) le quantità

$$\frac{g+ih-(1+i)(g-2\lambda)}{2}; \quad \rho+\varsigma$$

$$\frac{g+ih-(1-i)(g-2\lambda)}{2}; \quad f+\mu+\nu-(\rho+\varsigma)$$

non possono essere che positive o nulle, si avrà evidentemente 1.° se $N=n+g$,

$$g+ih=(1+i)(g-2\lambda), \quad \rho+\varsigma=0$$

e conseguentemente

$$\lambda=0, \; i=1, \; g=ih=h, \; \rho=0, \; \varsigma=0:$$

2.° se $N=-(n+g)$

$$g+ih=(1-i)(g-2\lambda), \quad f+\mu+\nu=\rho+\varsigma$$

e conseguentemente

$$\lambda=0, \; i=-1, \; g=ih=-h$$

e

$$\rho=f+\mu, \; \varsigma=\nu: \quad \text{ovvero} \quad \rho=f+\mu+1, \; \varsigma=\nu-1.$$

Ciò posto, le formole (103), (105) daranno

$$(123) \qquad n=f+\mu+\nu;$$

$$(124) \qquad E=\varepsilon^n(1+\eta)^{ih}:$$

e si dedurrà dalla formola (107): 1.° supponendo $N=n+g=n+ih$,

$$(125) \qquad A=\frac{a^{k+f}}{1\cdot 2\cdots f} S\frac{(-1)^{n-\nu}}{2^{n+ih}}(k-ih)_\mu E(N-\nu)\frac{N^{\nu-1}}{1\cdot 2\cdots \nu}:$$

2.° supponendo $N = -(n+g) = -(n+ih)$

$$(126) \qquad A = \frac{a^{k+f}}{1\cdot 2 \cdots f} S \frac{(-1)^n}{2^{n+ih}} (k-ih)_\mu (N+v) \frac{N^{v-1}}{1\cdot 2 \cdots v}.$$

Le formole (125), (126) sono entrambe comprese nella seguente

$$(127) \qquad A = \frac{a^{k+f}}{1\cdot 2 \cdots f} S \frac{(-1)^{n-v}}{2^{n+ih}} (k-ih)_\mu E(n-v+ih) \frac{(n+ih)^{v-1}}{1\cdot 2 \cdots v}.$$

Si troverà parimenti supponendo $N' = \pm(n'+g') = \pm(n'+i'h')$,

$$(128) \qquad n' = f' + \mu' + v'$$

$$(129) \qquad E' = \varepsilon'^{n'} (1+\eta')^{i'h'}$$

ed

$$(130) \qquad A' = \frac{a'^{k+f'}}{1\cdot 2 \cdots f'} S \frac{(-1)^{n'-v'}}{2^{n'+i'h'}} (k-i'h')_{\mu'} E'(n'-v'+i'h') \frac{(n'+i'h')_a^{v'-1}}{1\cdot 2 \cdots v'}.$$

È anche facile sviluppare secondo le potenze ascendenti di ε, ε' i valori di E, E' dati dalle equazioni (105), (106). Difatti se si prende

$$(131) \qquad s = 1+\eta,$$

si avrà

$$(s-1)^2 = \eta^2 = 1 - \varepsilon^2$$

$$s^2 - 2s = -\varepsilon^2$$

e conseguentemente

$$(132) \qquad s = 2 - \frac{\varepsilon^2}{s}.$$

Ciò posto, la formola di Lagrange darà

$$(133) \qquad F(s) = F(2) + S_{v=1}^{v=\infty} \frac{(-1)^v \varepsilon^{2v}}{1\cdot 2 \cdots v} \frac{d^{v-1}[y^{-v} F'(y)]}{dy^{v-1}}$$

e in conseguenza

$$(134) \qquad s^\lambda = (1+\eta)^\lambda = 2^\lambda + S \frac{(-1)^v \varepsilon^{2v}}{1\cdot 2 \cdots v} \lambda \frac{d^{v-1}(y^{\lambda-v-1})}{dy^{v-1}},$$

il valore di y dovendo essere ridotto a 2 dopo le differenziazioni. Si avrà dunque

$$(1+\eta)^\lambda = 2^\lambda + S_{v=1}^{v=\infty} \frac{\lambda}{\lambda - 2v} (2v-\lambda)_v \varepsilon^{2v} 2^{\lambda-2v}$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(135) \qquad (1+\eta)^\lambda = S_{v=0}^{v=\infty} \frac{\lambda}{\lambda-2v} (2v-\lambda)_v 2^\lambda \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2v}$$

e conseguentemente

$$(136) \qquad (1+\eta)^{g-2\lambda} = 2^{g-2\lambda} S_{v=0}^{v=\infty} \frac{2\lambda-g}{2\lambda-g+2v} (2\lambda-g+2v)_v \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2v},$$

$$(137)\qquad E = S\,\frac{2\lambda - g}{2\lambda - g + 2v}\,(2\lambda - g + 2v)_v\,\frac{\varepsilon^{n+2v}}{2^{2\lambda-g+2v}}\,.$$

Si troverà parimenti

$$(138)\qquad E' = S\,\frac{2\lambda' - g'}{2\lambda' - g' + 2v'}\,(2\lambda' - g' + 2v')_{v'}\,\frac{\varepsilon^{n'+2v'}}{2^{2\lambda'-g'+2v'}}\,.$$

Se ora si pongano $n - 2v$ per n ed $n' - 2v'$ per n', in luogo delle equazioni (103), (104), (137), (138) si otterranno le seguenti

$$(139)\qquad n = f + ih - g + \mu + \nu + 2\lambda + 2v$$

$$(140)\qquad n' = f' + i'h' - g' + \mu' + \nu' + 2\lambda' + 2v'$$

$$(141)\qquad E = S\,\frac{2\lambda - g}{2\lambda - g + 2v}\,(2\lambda - g + 2v)_v\,\frac{\varepsilon^{n}}{2^{2\lambda-g+2v}}$$

$$(142)\qquad E' = S\,\frac{2\lambda' - g'}{2\lambda' - g' + 2v'}\,(2\lambda' - g' + 2v')_{v'}\,\frac{\varepsilon^{n'}}{2^{2\lambda'-g'+2v'}}\,;$$

ed il valore di P potrà essere determinato col mezzo di queste ultime formole congiunte alle equazioni (100), (102), (107), (108), (110). Allora altresì ponendo

$$N = \pm(n + g),\quad N' = \pm(n' + g')$$

si avranno necessariamente $v = 0$, $v' = 0$ e si troveranno i valori di A, A' dati dalle equazioni (127), (130).

Osserviamo in fine che si può facilmente calcolare il valore di

$$\frac{d^{f+f'}K}{da^f\,da'^{f'}}$$

presentando la quantità K sotto la forma

$$(143)\qquad K = 2^k\left[\frac{1}{2}\right]_k (a' + a\sqrt{-1})^{-k-\frac{1}{2}}(a' - a\sqrt{-1})^{-k-\frac{1}{2}}\,;$$

ovvero

$$(144)\qquad K = 2^k\left[\frac{1}{2}\right]_k (a + a'\sqrt{-1})^{-k-\frac{1}{2}}(a - a'\sqrt{-1})^{-k-\frac{1}{2}}\,.$$

Di fatto $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{A}'$ indicando due funzioni qualunque di a, a', si ha generalmente

$$(145)\qquad \frac{d^{f+f'}\mathfrak{A}\,\mathfrak{A}'}{da^f\,da'^{f'}} = S(f)_n\,(f')_{n'}\,\frac{d^{f-n+n'}\mathfrak{A}}{da^{f-n}\,da'^{n'}}\,\frac{d^{f'-n'+n}\mathfrak{A}'}{da'^{f'-n'}\,da^n}$$

il segno S estendendosi a tutti i valori interi di n compresi fra i limiti *zero*, f ed a tutti i valori interi di n' compresi fra i limiti *zero*, f'. Dunque ponendo

$$K = 2^k\left[\frac{1}{2}\right]_k \mathfrak{A}\,\mathfrak{A}',\qquad \mathfrak{A} = (a' + a\sqrt{-1})^{-k-\frac{1}{2}},\qquad \mathfrak{A}' = (a' - a\sqrt{-1})^{-k-\frac{1}{2}}$$

e

$$(146)\qquad \xi = \text{Arc.tang.}\,\frac{a}{a'}\,,\qquad \xi' = \frac{\pi}{2} - \xi = \text{Arc.tang.}\,\frac{a'}{a}$$

si troverà

$$(147)\qquad \frac{d^{f+f'}K}{da^f\,da'^{f'}}=\frac{(-1)^{f+f'}(\sqrt{-1})^f}{2^{f+f'-k}}\left[\frac{1}{2}\right]_k S(-1)^n\,(f)_n\,(f')_{n'}\times$$

$$\frac{(2k+1)(2k+3)\cdots(2k+2f-2n+2n'-1)}{\left(a'+a\sqrt{-1}\right)^{k+f-n+n'+\frac{1}{2}}}\;\frac{(2k+1)(2k+3)\cdots(2k+2f'-2n'+2n-1)}{\left(a'-a\sqrt{-1}\right)^{k+f-n'+n+\frac{1}{2}}}$$

o, ciò che torna lo stesso,

$$(148)\qquad \frac{d^{f+f'}K}{da^f\,da'^{f'}}=\frac{(-1)^{f+f'}}{2^{f+f'-k}}\left[\frac{1}{2}\right]_k S(f)_n\,(f')_{n'}\cos.\{(2n-f)\xi'+(2n'-f')\xi\}\times$$

$$\frac{(2k+1)(2k+3)\cdots(2k+2f-2n+2n'-1)(2k+1)(2k+3)\cdots(2k+2f'-2n'+2n-1)}{\left(a^2+a'^2\right)^{k+\frac{f+f'+1}{2}}}.$$

Allorchè $\frac{a}{a'}$ è inferiore all'unità si può facilmente sviluppare Θ_k ed in seguito P secondo le potenze ascendenti di $\frac{a}{a'}$ operando come siegue.

Facciamo

$$(149)\qquad \frac{a}{a'}=\theta.$$

Si avrà

$$(150)\qquad \Theta_k=\frac{2^k}{a'}\left[\frac{1}{2}\right]_k\theta^k(1+\theta^2)^{-k-\frac{1}{2}}=\frac{2^k}{a'}\left[\frac{1}{2}\right]_k S(-1)^f\left[k+\frac{1}{2}\right]_f\theta^{k+2f}$$

e per conseguenza l'equazione (32) darà

$$(151)\qquad P=\frac{m'}{a'}S(-1)^f\,2^k\left[\frac{1}{2}\right]_k\left[k+\frac{1}{2}\right]_f\theta^{k+2f}\cos.^k\Delta_{T,T'}.$$

Per dedurre dall'equazione (151) il valore di P determinato dall'equazione (13) basterà porre $\cos.\delta$ in luogo di $\cos.\Delta_{T,T'}$, indi $a'(1-\varepsilon'\cos.\psi')$ in luogo di a', finalmente

$$\frac{r}{r'}=\frac{a}{a'}\,\frac{1-\varepsilon\cos.\psi}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}=\theta\,\frac{1-\varepsilon\cos.\psi}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}$$

in luogo di

$$\frac{a}{a'}=\theta.$$

Si avrà dunque generalmente

$$(152)\qquad P=\frac{m'}{a'}S(-1)^f\,2^k\left[\frac{1}{2}\right]_k\left[k+\frac{1}{2}\right]_f\theta^{k+2f}\,\frac{(1-\varepsilon\cos.\psi)^{k+2f}}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^{k+f+1}}\cos.^k\delta.$$

D'altronde si deduce dalla formola (90), ponendo $k=ih$ ed in conseguenza $\mu=0$

$$(153)\qquad (1-\varepsilon\cos.\psi)^{ih}\,e^{h(p-\varpi)\sqrt{-1}}=S\frac{(-1)^{ih-g}}{2^g}(ih)_{\lambda,g-\lambda}\,\varepsilon^{ih-g+2\lambda}(1+\eta)^{g-2\lambda}\,e^{(g-2\lambda)i\psi\sqrt{-1}}.$$

Si troverà parimenti

$$(154)\qquad (1-\varepsilon'\cos.\psi')^{i'h'}\, e^{h'(p'-\sigma')\sqrt{-1}}$$
$$= S\,\frac{(-1)^{i'h'-g'}}{2^{g'}}\,(i'h')_{\lambda',g'-\lambda'}\,\varepsilon'^{\mu'h'-g'+2\lambda'}\,(1+\eta')^{g'-2\lambda'}\,e^{(g'-2\lambda')i'\psi'\sqrt{-1}}.$$

Ora in virtù di queste ultime formole riunite all'equazione (75) ed alla seguente

$$(-1)^{ih+i'h'} = (-1)^{2k} = 1$$

la formola (152) darà

$$(155)\qquad P = \frac{m'}{a'}\,S\,\frac{(-1)^{f+g+g'}}{2^{g+g'}}\,\frac{2^k}{(k+1)^2}\left[\frac{1}{2}\right]_k\left[k+\frac{1}{2}\right]_f (ih)_{\lambda,g-\lambda}\times$$
$$(i'h')_{\lambda',g'-\lambda'}\,\mathfrak{Q}\,e^{-\frac{hl+h'l'}{k+1}\pi\sqrt{-1}}\,\cos.^k\Delta_{\frac{l\pi}{k+1},\,\frac{l'\pi}{k+1}}$$

il valore di $\mathfrak{Q}$ essendo

$$(156)\qquad \mathfrak{Q} = \theta^{k+2f}\,e^{ih-g+2\lambda}\,(1+\eta)^{g-2\lambda}\,e^{i'h'-g'+2\lambda'}\times$$
$$(1+\eta')^{g'-2\lambda'}\,\frac{(1-\varepsilon\cos.\psi)^{k+2f-ih}}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^{k+2f+i'h'+1}}\,e^{(g-2\lambda)i\psi\sqrt{-1}}\,e^{(g'-2\lambda')i'\psi'\sqrt{-1}}.$$

Se ora si combinino le equazioni (155), (156) all'equazione (136) e colle formole

$$(157)\qquad (1-\varepsilon\cos.\psi)^{k+2f-ih} = S\,(-1)^{\mu}\,(k+2f-ih)_{\mu}\,\varepsilon^{\mu}\cos.^{\mu}\psi$$

$$(158)\qquad (1-\varepsilon'\cos.\psi')^{-(k+2f+i'h'+1)} = S\,[k+2f+i'h'+1]_{\mu'}\,\varepsilon'^{\mu'}\cos.^{\mu'}\psi'$$

$$(159)\qquad e^{(g-2\lambda)i\psi\sqrt{-1}}\cos.^{\mu}\psi$$
$$= S\,\frac{\varepsilon^{\nu}}{1\cdot 2\cdots\nu}\left\{(-1)^{\varsigma}N(\mu)_{\rho}(\nu)_{\varsigma} - (-1)^{\varsigma}\nu(\mu+1)_{\rho}(\nu-1)_{\varsigma}\right\}\frac{N^{\nu-1}}{2^{\mu+\nu}}\,e^{NT\sqrt{-1}}$$

$$(160)\qquad N = \mu+\nu+i(g-2\lambda)-2\rho-2\varsigma$$

$$(161)\qquad e^{(g'-2\lambda')i'\psi'\sqrt{-1}}\cos.^{\mu'}\psi'$$
$$= S\,\frac{\varepsilon'^{\nu'}}{1\cdot 2\cdots\nu'}\left\{(-1)^{\varsigma'}N'(\mu')_{\rho'}(\nu')_{\varsigma'} - (-1)^{\varsigma'}\nu'(\mu'+1)_{\rho'}(\nu'-1)_{\varsigma'}\right\}\frac{N'^{\nu'-1}}{2^{\mu'+\nu'}}\,e^{N'T'\sqrt{-1}}$$

$$(162)\qquad N' = \mu'+\nu'+i'(g'-2\lambda')-2\rho'-2\varsigma'$$

(di cui le quattro ultime sono ciò che diventano le formole (99), (100), (101) e (102) quando si ponga zero in luogo di f, ed f'); si troverà definitivamente

$$(163)\qquad P = \frac{m'}{a'}\,S(-1)^f\,\frac{2^k}{(k+1)^2}\left[\frac{1}{2}\right]_k\left[k+\frac{1}{2}\right]_f AA'\,\theta^{k+2f}\,\varepsilon^{n}\,\varepsilon'^{n'}\times$$
$$\cos.^k\Delta_{\frac{l\pi}{k+1},\,\frac{l'\pi}{k+1}}\cos.\left(NT+N'T'-\frac{hl+h'l'}{k+1}\pi\right);$$

i valori di n, n', A, A' essendo

$$(164)\qquad n = ih-g+\mu+\nu+2\lambda+2v$$

$$(165)\qquad n' = i'h'-g'+\mu'+\nu'+2\lambda'+2v'$$

$$(166)\qquad A = S\,\frac{(-1)^{g+\mu}}{2^{n+g-N}}\,\frac{2\lambda-g}{2\lambda-g-2v}\,(2\lambda-g+2v)_{\nu}\,(ih)_{\nu-1}\,(k+2f-ih)_{\nu}\times$$
$$\left\{(-1)^{\varsigma}N(\mu)_{\varsigma}(\nu)_{\varsigma}-(-1)^{\varsigma}\nu(\mu+1)_{\varsigma}(\nu-1)_{\varsigma}\right\}\frac{N^{\nu-1}}{1\cdot 2\cdots\nu};$$

$$(167)\qquad A = S\,\frac{(-1)^{g'}}{2^{n'+g'-i'h'}}\,\frac{2\lambda'-g'}{2\lambda'-g'+2v'}\,(2\lambda'-g'+2v')_{\nu'}\,(i'h')_{\nu'-1}\,[k+2f+i'h'+1]_{\mu'}\times$$
$$\left\{(-1)^{\varsigma'}N'(\mu')_{\varsigma'}(\nu')_{\varsigma'}-(-1)^{\varsigma'}\nu'(\mu'+1)_{\varsigma'}(\nu'-1)_{\varsigma'}\right\}\frac{N'^{\nu'-1}}{1\cdot 2\cdots\nu'}.$$

È duopo osservare che si deducono dalle formole (160), (164) le

$$(168)\qquad \begin{aligned}\frac{n+g-N}{2} &= \frac{ih+g-(1+i)(g-2\lambda)}{2}+\rho+\varsigma+v\\ \frac{n+g+N}{2} &= \frac{ih+g-(1-i)(g-2\lambda)}{2}+\mu+\nu-(\rho+\varsigma)+v\end{aligned}$$

e le

$$(169)\qquad \begin{aligned}\frac{n+ih-N}{2} &= ih-\frac{1+i}{2}(g-2\lambda)+\rho+\varsigma+v\\ \frac{n+ih+N}{2} &= ih-\frac{1-i}{2}(g-2\lambda)+\mu+\nu-(\rho+\varsigma)+v.\end{aligned}$$

Ora i secondi membri delle formole (168), (169) essendo necessariamente positivi, devono esserlo parimenti i primi. Dunque il valor numerico di N non potrà sorpassare il numero $n+g$, *a fortiori* il numero $n+ih=n+\sqrt{h^2}$ ed il uumero $n+k$. Per la stessa ragione il valor numerico di N' non potrà sorpassare il numero $n'+k$. Conseguentemente in ciascuno dei termini di cui si compone lo sviluppo di P i valori numerici di N e di N' saranno l'uno e l'altro inferiori al numero

$$n+n'+k+2f,$$

cioè a dire alla somma degli esponenti delle tre quantità

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \theta;$$

e se si considerano soltanto i termini in cui questa somma non sorpassa un limite dato, i valori di N, N' corrispondenti a questi termini saranno in numero finito.

Osserviamo ancora che i secondi membri delle formole (169) essendo quantità intere, $n+ih\pm N$ dovrà essere divisibile per 2. Dunque $n\pm\sqrt{N^2}$ dovrà essere pari o dispari secondo che il numero $\sqrt{h^2}$, o, ciò che torna lo stesso, secondo che il numero k sarà pari o dispari.

Siccome si ha generalmente

$$(170)\qquad \cos.\left(NT+N'T'-\frac{hl+h'l'}{k+1}\pi\right)$$
$$=\cos.(NT+N'T')\cos.\left(\frac{hl+h'l'}{k+1}\pi\right)+\sin.(NT+N'T')\sin.\left(\frac{hl+h'l'}{k+1}\pi\right),$$

egli è chiaro che le formole (110) e (163) forniscono il mezzo di sviluppare secondo i seni e coseni di archi della forma $NT+N'T'$ il valore di P determinato dall'equazione (13). Se si volesse sviluppare nello stesso modo i valori di P dati dalle equazioni (14) e (15), bisognerebbe all'equazione (75) sostituire le seguenti

$$(171)\quad (1+\cos.\delta)^k=\frac{1}{(2k+1)^2}Se^{h(p-\varpi)\sqrt{-1}}\,e^{h'(p'-\varpi')\sqrt{-1}}\,e^{-\frac{hl+h'l'}{2k+1}2\pi\sqrt{-1}}\left(1+\cos.\Delta_{\frac{2l\pi}{2k+1},\frac{2l'\pi}{2k+1}}\right)^k$$

$$(172)\quad (1-\cos.\delta)^k=\frac{1}{(2k+1)^2}Se^{h(p-\varpi)\sqrt{-1}}\,e^{h'(p'-\varpi')\sqrt{-1}}\,e^{-\frac{hl+h'l'}{2k+1}2\pi\sqrt{-1}}\left(1-\cos.\Delta_{\frac{2l\pi}{2k+1},\frac{2l'\pi}{2k+1}}\right)^k,$$

che si deducono immediatamente dalla formola (62) ponendovi $(1+\cos.\delta)^k$ o $(1-\cos.\delta)^k$ in luogo di $f(T, T')$ considerata come una funzione di seni e coseni degli archi $p-\varpi$, $p'-\varpi'$. Nelle formole (171), (172), come nella formola (62), il segno S si estende a tutti i valori positivi nulli o negativi di l, l', h, h' dal valor negativo $-k$ sino al valor positivo k. D'altronde dedurremo dalle formole (14) e (15): 1.° supponendo $\varepsilon=0$, $\varepsilon'=0$

$$(173)\qquad P=\frac{m'}{a'}\,S(-1)^f\,2^k\left[\frac{1}{2}\right]_k[2k+1]_f\,\theta^{k+f}(1+\cos.\Delta_{T,T'})^k$$

$$(173)\qquad P=\frac{m'}{a'}\,S(-1)^k\,2^k\left[\frac{1}{2}\right]_k[2k+1]_f\,\theta^{k+f}(1-\cos.\Delta_{T,T'})^k;$$

2.° nel caso contrario

$$(175)\qquad P=\frac{m'}{a'}\,S(-1)^f\,2^k\left[\frac{1}{2}\right]_k[2k+1]_f\,\theta^{k+f}\,\frac{(1-\varepsilon\cos.\psi)^{k+f}}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^{k+f+1}}(1+\cos.\delta)^k$$

$$(176)\qquad P=\frac{m'}{a'}\,S(-1)^k\,2^k\left[\frac{1}{2}\right]_k[2k+1]_f\,\theta^{k+f}\,\frac{(1-\varepsilon\cos.\psi)^{k+f}}{(1-\varepsilon'\cos.\psi')^{k+f+1}}(1-\cos.\delta)^k.$$

Dunque i valori di P dedotti dalle formole (14) e (15) saranno

$$(177)\quad P=\frac{m'}{a'}\,S\,\frac{(-1)^f}{(2k+1)^2}\,2^k\left[\frac{1}{2}\right]_k[2k+1]_f\,AA'\theta^{k+f}\,\varepsilon^n\,\varepsilon'^{n'}\left(1+\cos.\Delta_{\frac{2l\pi}{2k+1},\frac{2l'\pi}{2k+1}}\right)^k\times$$
$$\cos.\left(NT+N'T'-\frac{hl+h'l'}{2k+1}\,2\pi\right),$$

e

$$(178)\quad P=\frac{m'}{a'}\,S\,\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\,2^k\left[\frac{1}{2}\right]_k[2k+1]_f\,AA'\theta^{k+f}\,\varepsilon^n\,\varepsilon'^{n'}\left(1-\cos.\Delta_{\frac{2l\pi}{2k+1},\frac{2l'\pi}{2k+1}}\right)^k\times$$
$$\cos.\left(NT+N'T'-\frac{hl+h'l'}{2k+1}\,2\pi\right),$$

essendo i valori di A, A' determinati col mezzo delle formole

$$(179)\qquad A=S\,\frac{(-1)^{g+\mu}}{2^{n+g-ih}}\,\frac{2\lambda-g}{2\lambda-g+2v}\,(2\lambda-g+2v)_v\,(ih)_{\lambda,g-\lambda}\,(k+f-ih)_\mu\times$$
$$\left\{(-1)^\varsigma N(\mu)_\rho(\nu)_\varsigma-(-1)^\varsigma\nu(\mu+1)_\rho(\nu-1)_\varsigma\right\}\frac{N^{\nu-1}}{1\cdot2\cdots\nu},$$

$$(180)\quad A'=S\frac{(-1)^{g'}}{2^{n'+g'-i'h'}}\,\frac{2\lambda'-g'}{2\lambda'-g'+2v'}\,(2\lambda'-g'+2v')_{v'}\,(i'h')_{\lambda',g'-\lambda'}\,[k+f+i'h'+1]_{\mu'}\times$$
$$\left\{(-1)^{\varsigma'}N'(\mu')_{\varsigma'}(\nu')_{\varsigma'}-(-1)^{\varsigma'}\nu'(\mu'+1)_{\varsigma'}(\nu'-1)_{\varsigma'}\right\}\frac{N'^{\nu'-1}}{1\cdot 2\cdots\nu'};$$

congiunte alle formole (160), (162), (164), (165). Finalmente se all'equazione (62) si sostituisce l'equazione analoga che può dedursi dalla formola (48), allora invece delle formole (177), (178) si troverebbero le seguenti

$$(181)\quad P=\frac{m'}{a'}\,S\,\frac{(-1)^f}{(k+1)^2}\,2^{k-2}\left[\frac{1}{2}\right]_k[2k+1]_f\,AA'\theta^{k+f}\,\varepsilon^n\,\varepsilon'^{n'}\left(1+\cos.\Delta_{\frac{l\pi}{k+1},\frac{l'\pi}{k+1}}\right)^k\times$$
$$\cos.\left(NT+N'T'-\frac{hl+h'l'}{k+1}\,\pi\right),$$

e

$$(182)\quad P=\frac{m'}{a'}\,S\,\frac{(-1)^k}{(k+1)^2}\,2^{k-2}\left[\frac{1}{2}\right]_k[2k+1]_f\,AA'\theta^{k+f}\,\varepsilon^n\,\varepsilon'^{n'}\left(1-\cos.\Delta_{\frac{l\pi}{k+1},\frac{l'\pi}{k+1}}\right)^k\times$$
$$\cos.\left(NT+N'T'-\frac{hl+h'l'}{k+1}\,\pi\right),$$

il segno S estendendosi a tutti i valori di l, l' compresi fra i limiti $-k$, $k+1$, ed a tutti i valori di h, h' compresi fra i limiti $-k$, $+k$.

§. 5.°

Sopra i resti delle serie convergenti che rappresentano gli sviluppi di R.

Quando col mezzo delle formole stabilite nei paragrafi precedenti si è sviluppata la funzione R in serie convergenti ordinate secondo le potenze ascendenti delle quantità ε, ε', θ, ecc. --- ed anche delle quantità ε, ε', v, ecc. ---, è facile trovare un limite superiore agli errori che si commettono allorchè in queste stesse serie si conservano soltanto i termini in cui le potenze delle quantità di cui si tratta offrono esponenti rispettivamente inferiori a numeri dati.

Per fissare le idee si concepisca che col mezzo della formola (73) o (90) del secondo paragrafo si sia sviluppata secondo le potenze ascendenti di ε, ε' la parte P di R determinata dall'equazione

$$(1)\qquad P=\frac{m'r\cos.\delta}{r'^2}$$

e che si domandi un limite dell'errore commesso quando si trascurano nello sviluppo così ottenuto tutti i termini in cui le potenze delle eccentricità ε, ε' offrono esponenti rispettivamente eguali o superiori ai due numeri

$$n,\quad n'.$$

Si potrà considerare P come una funzione di $\varepsilon, \varepsilon', \psi, \psi'$ e porre per conseguenza

$$(2) \qquad P = f(\varepsilon, \varepsilon', \psi, \psi')$$

essendo ψ, ψ' funzioni implicite di ε, ε' determinate dalle equazioni

$$(3) \qquad \psi = T + \varepsilon \sin.\psi, \qquad (4) \qquad \psi' = T' + \varepsilon' \sin.\psi'.$$

Indichiamo ora con

$$\bar{\varepsilon},\ \bar{\varepsilon}',\ \bar{\psi},\ \bar{\psi}'$$

quattro espressioni immaginarie i cui moduli siano rispettivamente espressi da

$$E,\ E',\ \Psi,\ \Psi'$$

di modo che si abbia

$$(5) \qquad \begin{aligned} \bar{\varepsilon} &= E(\cos.p + \sqrt{-1}\sin.p)\,; & \bar{\varepsilon}' &= E'(\cos.p' + \sqrt{-1}\sin.p') \\ \bar{\psi} &= \Psi(\cos.q + \sqrt{-1}\sin.q)\,; & \bar{\psi}' &= \Psi'(\cos.q' + \sqrt{-1}\sin.q'), \end{aligned}$$

p, p', q, q' rappresentando archi reali. Si dedurrà dalle formole (183) o (188) e (6) della Parte Prima

$$(6) \qquad f(\varepsilon, \varepsilon', \psi, \psi') =$$

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{\psi}\,\bar{\psi}'\, \frac{1-\varepsilon\cos.(T+\bar{\psi})}{\bar{\psi}-\varepsilon\sin.(T+\bar{\psi})}\, \frac{1-\varepsilon'\cos.(T'+\bar{\psi}')}{\bar{\psi}-\varepsilon'\sin.(T'+\bar{\psi}')} f(\varepsilon, \varepsilon', T+\bar{\psi}, T'+\bar{\psi}')\,dq\,dq',$$

indi

$$(7) \quad f(\varepsilon, \varepsilon', T+\bar{\psi}, T'+\bar{\psi}') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}-\varepsilon}\, \frac{\bar{\varepsilon}'}{\bar{\varepsilon}'-\varepsilon'} f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', T+\bar{\psi}, T'+\bar{\psi}')\,dp\,dp'$$

e si avrà in conseguenza

$$(8) \qquad f(\varepsilon, \varepsilon', \psi, \psi') = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^4 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \bar{\psi}\,\bar{\psi}'\, \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}-\varepsilon} \cdot \frac{\bar{\varepsilon}'}{\bar{\varepsilon}'-\varepsilon'} \times$$

$$\frac{1-\varepsilon\cos.(T+\bar{\psi})}{\bar{\psi}-\varepsilon\sin.(T+\bar{\psi})}\, \frac{1-\varepsilon'\cos.(T'+\bar{\psi}')}{\bar{\psi}-\varepsilon'\sin.(T'+\bar{\psi}')} f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', T+\bar{\psi}, T'+\bar{\psi}')\,dp\,dp'\,dq\,dq'\,;$$

supponendo i moduli

$$E,\ E',\ \Psi,\ \Psi'$$

talmente scelti che si abbia

$$(9) \qquad \varepsilon < E \qquad (10) \qquad \varepsilon' < E'\,;$$

$$(11) \qquad \varepsilon\,\Lambda\,\frac{\sin.(T+\bar{\psi})}{\bar{\psi}} < 1\,; \qquad (12) \qquad \varepsilon'\,\Lambda\,\frac{\sin.(T'+\bar{\psi}')}{\bar{\psi}'} < 1\,.$$

Osserviamo d'altronde che le condizioni (11), (12) non possono essere soddisfatte a meno che le eccentricità non restino inferiori all'unità divisa per il modulo principale dell'espressione

$$\Lambda\,\frac{\sin.\left(\frac{\pi}{2}+\bar{\psi}\right)}{\bar{\psi}},$$

cioè a dire al numero 0,662742---. Ciò posto, ragionando come nel luogo corrispondente della Prima Parte, si conchiuderà dalla formola (8) che i differenti termini dello sviluppo di

$$P = f(\varepsilon, \varepsilon', \psi, \psi')$$

in una serie ordinata secondo le potenze ascendenti di $\varepsilon, \varepsilon'$ ed il resto di questa serie offrono valori numerici rispettivamente inferiori ai termini ed al resto della serie che si otterrebbe sviluppando nello stesso modo l'espressione

$$(14) \qquad \Lambda\bar{\psi}\,\bar{\psi}'\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}-\varepsilon}\,\frac{\bar{\varepsilon}'}{\bar{\varepsilon}'-\varepsilon}\,\frac{1-\varepsilon\cos.(T+\bar{\psi})}{\bar{\psi}-\varepsilon\sin.(T+\bar{\psi})}\,\frac{1-\varepsilon'\cos.(T'+\bar{\psi}')}{\bar{\psi}'-\varepsilon'\sin.(T'+\bar{\psi}')}f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', T+\bar{\psi}, T'+\bar{\psi}'),$$

ed a più forte ragione la seguente

$$(15) \qquad \Psi\Psi'\frac{E}{E-\varepsilon}\,\frac{E'}{E'-\varepsilon'}\,\frac{1+\varepsilon\Lambda\cos.(T+\bar{\psi})}{\Psi-\varepsilon\Lambda\sin.(T+\bar{\psi})}\,\frac{1+\varepsilon'\Lambda\cos.(T'+\bar{\psi}')}{\Psi-\varepsilon'\Lambda\sin.(T'+\bar{\psi}')}\Lambda f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', T+\bar{\psi}, T'+\bar{\psi}').$$

Aggiungiamo che in forza dell'equazione (156) della Parte Prima si avrà

$$\Lambda\sin.(T+\bar{\psi}) = \text{ ovvero } < \left\{\left(\frac{e^{\Psi}-e^{-\Psi}}{2}\right)^2 + 1\right\}^{\frac{1}{2}}$$

e conseguentemente

$$(16) \qquad \begin{aligned} &\Lambda\sin.(T+\bar{\psi}) = \text{ ovvero } < \frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2} \\ &\Lambda\cos.(T+\bar{\psi}) = \Lambda\sin.\left(T+\frac{\pi}{2}+\bar{\psi}\right) = \text{ ovvero } < \frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}. \end{aligned}$$

Dunque l'espressione (15) potrà essere surrogata da questa

$$(17) \qquad \Psi\Psi'\frac{E}{E-\varepsilon}\,\frac{E'}{E'-\varepsilon'}\,\frac{1+\frac{\varepsilon}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{\Psi-\frac{\varepsilon}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}\,\frac{1+\frac{\varepsilon'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}{\Psi'-\frac{\varepsilon'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}\Lambda f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', T+\bar{\psi}, T'+\bar{\psi}'),$$

i numeri Ψ, Ψ' essendo scelti in modo da verificare le condizioni

$$(18) \qquad \varepsilon\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2} < \Psi \qquad\qquad (19) \qquad \varepsilon'\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2} < \Psi'.$$

Se nel primo membro dell'equazione (7) si sostituisse alla funzione

$$f(\varepsilon, \varepsilon', T+\bar{\psi}, T'+\bar{\psi}')$$

il prodotto

$$\frac{1-\varepsilon\cos.(T+\bar{\psi})}{\bar{\psi}-\varepsilon\sin.(T+\bar{\psi})}\,\frac{1-\varepsilon'\cos.(T'+\bar{\psi}')}{\bar{\psi}'-\varepsilon'\sin.(T'+\bar{\psi}')}f(\varepsilon, \varepsilon', T+\bar{\psi}, T'+\bar{\psi}'),$$

bisognerebbe nel secondo membro sostituire alla funzione

$$f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', T+\bar{\psi}, T'+\bar{\psi}')$$

il prodotto seguente

$$\frac{1-\bar{\varepsilon}\cos.(T+\bar{\psi})}{\bar{\psi}-\bar{\varepsilon}\sin.(T+\bar{\psi})}\,\frac{1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')}{\bar{\psi}'-\bar{\varepsilon}'\sin.(T'+\bar{\psi}')}f(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',T+\bar{\psi},T'+\bar{\psi}')$$

ed allora in luogo dell' espressione (17) si otterrebbe questa

$$(20)\quad \Psi\Psi'\frac{E}{E-\varepsilon}\,\frac{E'}{E'-\varepsilon'}\,\frac{1+\frac{E}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{\Psi-\frac{E}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}\,\frac{1+\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}{\Psi'-\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}\Delta f(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',T+\bar{\psi},T'+\bar{\psi}'),$$

i numeri Ψ, Ψ' essendo scelti in modo da verificare le condizioni

$$(21)\qquad E\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}<\Psi\;;\qquad\qquad (22)\qquad E'\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}<\Psi'.$$

Resta ora a ritrovarsi il valore di

$$\Delta f(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',T+\bar{\psi},T'+\bar{\psi}')$$

od un numero che superi questo valore. Ora si ha per ipotesi

$$(23)\qquad f(\varepsilon,\varepsilon',\psi,\psi')=P=\frac{m'r\cos.\delta}{r'^2},$$

i valori di r, r', $\cos.\delta$ essendo determinati dalle equazioni

$$(24)\qquad r=a(1-\varepsilon\cos.\psi)=\theta a'(1-\varepsilon\cos.\psi)$$

$$(25)\qquad r'=a'(1-\varepsilon'\cos.\psi')$$

$$(26)\quad \cos.\delta=\cos.\Delta_{0,0}\cos.(p-\varpi)\cos.(p'-\varpi')+\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\cos.(p-\varpi)\sin.(p'-\varpi')$$
$$+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\sin.(p-\varpi)\cos.(p'-\varpi')+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\sin.(p-\varpi)\sin.(p'-\varpi')$$

$$(27)\qquad \cos.(p-\varpi)=\frac{\cos.\psi-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos.\psi},\qquad \sin.(p-\varpi)=\frac{\eta\sin.\psi}{1-\varepsilon\cos.\psi}$$

$$(28)\qquad \cos.(p'-\varpi')=\frac{\cos.\psi'-\varepsilon'}{1-\varepsilon'\cos.\psi'},\qquad \sin.(p'-\varpi')=\frac{\eta'\sin.\psi'}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}$$

$$(29)\qquad \eta=(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}},\qquad\qquad (30)\qquad \eta'=(1-\varepsilon'^2)^{\frac{1}{2}};$$

dalle quali si deduce

$$(31)\quad \cos.\delta=\cos.\Delta_{0,0}\frac{\cos.\psi-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos.\psi}\,\frac{\cos.\psi'-\varepsilon'}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}+\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\frac{\cos.\psi-\varepsilon}{1-\varepsilon\cos.\psi}\,\frac{(1-\varepsilon'^2)^{\frac{1}{2}}\sin.\psi'}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}$$
$$+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\frac{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\sin.\psi}{1-\varepsilon\cos.\psi}\,\frac{\cos.\psi'-\varepsilon'}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\frac{(1-\varepsilon^2)^{\frac{1}{2}}\sin.\psi}{1-\varepsilon\cos.\psi}\,\frac{(1-\varepsilon'^2)^{\frac{1}{2}}\sin.\psi'}{1-\varepsilon'\cos.\psi'}.$$

Dunque se si chiama $\cos.\bar{\delta}$ ciò che diventa $\cos.\delta$ quando siansi surrogate alle

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \psi,\ \psi'$$

le

$$\bar{\varepsilon},\ \bar{\varepsilon}',\ T+\bar{\psi},\ T'+\bar{\psi}',$$

si avrà

$$(32)\qquad f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', T+\bar{\psi}, T'+\bar{\psi}') = \frac{m'\theta'}{a'}\,\frac{1-\bar{\varepsilon}\cos.(T+\bar{\psi})}{[1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')]^2}\cos.\bar{\delta},$$

il valore di $\cos.\bar{\delta}$ essendo

$$(33)\qquad \begin{aligned}\cos.\bar{\delta} = {} & \cos.\Delta_{0,0}\,\frac{\cos.(T+\bar{\psi})-\bar{\varepsilon}}{1-\bar{\varepsilon}\cos.(T+\bar{\psi})}\,\frac{\cos.(T'+\bar{\psi}')-\bar{\varepsilon}'}{1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')}\\ & +\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\,\frac{\cos.(T+\bar{\psi})-\bar{\varepsilon}}{1-\bar{\varepsilon}\cos.(T+\bar{\psi})}\,\frac{(1-\bar{\varepsilon}'^2)^{\frac{1}{2}}\sin.(T'+\bar{\psi}')}{1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')}\\ & +\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\,\frac{(1-\bar{\varepsilon}^2)^{\frac{1}{2}}\sin.(T+\bar{\psi})}{1-\bar{\varepsilon}\cos.(T+\bar{\psi})}\,\frac{\cos.(T'+\bar{\psi}')-\bar{\varepsilon}'}{1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')}\\ & +\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\,\frac{(1-\bar{\varepsilon}^2)^{\frac{1}{2}}\sin.(T+\bar{\psi})}{1-\bar{\varepsilon}\cos.(T+\bar{\psi})}\,\frac{(1-\bar{\varepsilon}'^2)^{\frac{1}{2}}\sin.(T'+\bar{\psi}')}{1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')}.\end{aligned}$$

Ciò posto, ammettendo che si abbia

$$(34)\qquad E'\,\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2} < 1,$$

si troverà

$$(35)\qquad \Lambda f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', T+\bar{\psi}, T'+\bar{\psi}') = \text{ovvero} < \frac{m'\theta}{a'}\,\frac{\Lambda\big(1-\bar{\varepsilon}\cos.(T+\bar{\psi})\big)\cos.\bar{\delta}}{\left[1-\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})\right]^2}:$$

indi

$$\begin{aligned}&\Lambda\big(1-\bar{\varepsilon}\cos.(T+\bar{\psi})\big)\cos.\bar{\delta} =\\ &\text{ovvero} < \sqrt{\cos.^2\Delta_{0,0}}\;\Lambda\big(\cos.(T+\bar{\psi})-\bar{\varepsilon}\big)\,\Lambda\,\frac{\cos.(T'+\bar{\psi}')-\bar{\varepsilon}'}{1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')}\\ &+\sqrt{\cos.^2\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}}\;\Lambda\big(\cos.(T+\bar{\psi})-\bar{\varepsilon}\big)\,\Lambda\,\frac{(1-\bar{\varepsilon}'^2)^{\frac{1}{2}}\sin.(T'+\bar{\psi}')}{1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')}\\ &+\sqrt{\cos.^2\Delta_{\frac{\pi}{2},0}}\;\Lambda\big((1-\bar{\varepsilon}^2)^{\frac{1}{2}}\sin.(T+\bar{\psi})\big)\,\Lambda\,\frac{\cos.(T'+\bar{\psi}')-\bar{\varepsilon}'}{1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')}\\ &+\sqrt{\cos.^2\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}}\;\Lambda\big((1-\bar{\varepsilon}')^{\frac{1}{2}}\sin.(T+\bar{\psi})\big)\,\Lambda\,\frac{(1-\bar{\varepsilon}'^2)^{\frac{1}{2}}\sin.(T'+\bar{\psi}')}{1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')},\end{aligned}$$

ed a più forte ragione

$$(36)\qquad \begin{aligned}&\Lambda\big(1-\bar{\varepsilon}\cos.(T+\bar{\psi})\big)\cos.\bar{\delta} =\\ &\text{ovvero} < \Big\{\Lambda\big(\cos.(T+\bar{\psi})-\bar{\varepsilon}\big)+\Lambda(1-\bar{\varepsilon}^2)^{\frac{1}{2}}\sin.(T+\bar{\psi})\Big\}\times\\ &\Big\{\Lambda\,\frac{\cos.(T'+\bar{\psi}')-\bar{\varepsilon}'}{1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')}+\Lambda\,\frac{(1-\bar{\varepsilon}'^2)^{\frac{1}{2}}\sin.(T'+\bar{\psi}')}{1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')}\Big\}.\end{aligned}$$

Siccome si avrà d'altronde

$$\Lambda(1-\bar{\varepsilon}^2)^{\frac{1}{2}}=(1+E^2)^{\frac{1}{2}}\,,\qquad \Lambda(1-\bar{\varepsilon}'^2)^{\frac{1}{2}}=(1+E'^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\Lambda\frac{1}{1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')}=\text{ovvero}<\frac{1}{1-\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}$$

e di più

$$\frac{\cos.(T'+\bar{\psi}')-\bar{\varepsilon}'}{1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')}=$$

$$\cos.(T'+\bar{\psi}')-\bar{\varepsilon}'\sin.^2(T'+\bar{\psi}')-\bar{\varepsilon}'^2\sin.^2(T'+\bar{\psi}')\cos.(T'+\bar{\psi}')-\text{ecc.}---$$

per la qual serie

$$(37)\qquad \Lambda\frac{\cos.(T'+\bar{\psi}')-\bar{\varepsilon}'}{1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')}=$$

$$\text{ovvero}<\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}+E'\left(\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}\right)^2+\text{ecc.}---=\frac{\frac{1}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}{1-\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}\,;$$

si dedurrà dall'equazione (36)

$$(38)\qquad \Lambda\left(1-\bar{\varepsilon}\cos.(T+\bar{\psi})\right)\cos.\bar{\delta}=$$

$$\text{ovvero}<\left\{\left[1+(1-E^2)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}+E\right\}\frac{\left[1+(1-E'^2)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}}{1-\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}$$

e dalla formola (35)

$$(39)\qquad \Lambda f(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',T+\bar{\psi},T'+\bar{\psi}')=$$

$$\text{ovvero}<\frac{m'\theta}{a'}\left\{\left[1+(1-E^2)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}+E\right\}\frac{\left[1+(1-E'^2)^{\frac{1}{2}}\right]\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}}{\left[1-\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})\right]^3}$$

Col mezzo delle formole (17) e (39) congiunte alle condizioni (9), (10), (18), (19), (34), o delle formole (20) e (39) congiunte alle condizioni (9), (10), (21), (22), (34), si determinerà facilmente un limite superiore all'errore che si commette allorchè nello sviluppo dell'espressione (1) secondo le potenze ascendenti di ε, ε' si sopprimono tutti i termini in cui gli esponenti di ε, ε' sono rispettivamente superiori a due numeri dati.

Supponiamo ora che la funzione P essendo determinata non più dall'equazione (1) ma dall'equazione (2) del paragrafo quarto, cioè

$$(40)\qquad P=\frac{m'}{\sqrt{(r'^2-2rr'\cos.\delta+r^2)}}\,,$$

si impieghi una delle formole (163), (177), (178), (181), (182) dello stesso paragrafo a fine di sviluppare questa funzione in una serie convergente ordinata secondo le potenze ascendenti di

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \theta$$

e che si domandi un limite dell'errore commesso quando nella serie ottenuta si trascurino tutti i termini in cui le potenze delle tre quantità ε, ε', θ offrono esponenti superiori a tre numeri dati. Si potrà considerare P come una funzione di

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \theta,\ \psi,\ \psi'$$

e porre in conseguenza

$$(41)\qquad P = f(\varepsilon,\ \varepsilon',\ \theta,\ \psi,\ \psi'),$$

essendo i valori di ψ, ψ' quelli somministrati dalle equazioni (4). Ammettiamo d'altronde che le espressioni immaginarie

$$\bar{\varepsilon},\ \bar{\varepsilon}',\ \bar{\psi},\ \bar{\psi}',\ \cos.\bar{\delta}$$

essendo determinate dalle formole (5) e (33) ed il valore di θ essendo sempre

$$(42)\qquad \theta = \frac{a}{a'},$$

si chiami $\bar{\theta}$ una nuova espressione immaginaria di cui il modulo Θ verifichi la condizione

$$(43)\qquad \Theta > \theta;$$

e si chiamino $\bar{r}$, $\bar{r}'$ ciò che divengono i raggi vettori r, r' determinati dalle formole (24), (25) quando siansi surrogate alle

$$\varepsilon,\ \varepsilon'\ \theta,\ \psi,\ \psi'$$

le

$$\bar{\varepsilon},\ \bar{\varepsilon}',\ \bar{\theta},\ T+\bar{\psi},\ T'+\bar{\psi}',$$

in modo che si abbiano

$$(44)\qquad \bar{r} = \bar{\theta}\, a'\big(1 - \bar{\varepsilon}\cos.(T+\bar{\psi})\big)$$

$$(45)\qquad \bar{r}' = a'\big(1 - \bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')\big).$$

Si troverà

$$(46)\qquad f(\bar{\varepsilon},\ \bar{\varepsilon}',\ \bar{\theta},\ T+\bar{\psi},\ T'+\bar{\psi}') = \frac{m'}{\sqrt{(\bar{r}'^2 - 2\,\bar{r}\,\bar{r}'\cos.\bar{\delta} + \bar{r}^2)}}.$$

Ciò posto, ragionando come superiormente, si proverà che i differenti termini dello sviluppo della funzione

$$P = f(\varepsilon,\ \varepsilon',\ \theta,\ \psi,\ \psi')$$

in una serie ordinata secondo le potenze ascendenti di

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \theta$$

ed il resto di questa serie offrono valori numerici rispettivamente inferiori ai termini ed al resto che si ottengono sviluppando nello stesso modo l'espressione

$$(47)\quad \Psi\Psi'\frac{E}{E-\varepsilon}\,\frac{E'}{E'-\varepsilon'}\,\frac{\Theta}{\Theta-\theta}\,\frac{1+\frac{\varepsilon}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{\Psi-\frac{\varepsilon}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}\,\frac{1+\frac{\varepsilon'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}{\Psi'-\frac{\varepsilon'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}\,\Delta f(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',\bar{\theta},\ T+\bar{\psi},\ T'+\bar{\psi}')$$

nella quale E, E', Θ, Ψ, Ψ' sono assoggettate alle condizioni (9), (10), (18), (19), (43); od ancora l'espressione

$$(48)\quad \Psi\Psi' \frac{E}{E-\varepsilon}\,\frac{E'}{E'-\varepsilon'}\,\frac{\Theta}{\Theta-\theta}\,\frac{1+\frac{E}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{\Psi-\frac{E}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}\,\frac{1+\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}{\Psi'-\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}\,\Lambda f(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',\bar{\theta},T+\bar{\psi},T'+\bar{\psi}')$$

nella quale E, E', Θ, Ψ, Ψ' sono assoggettate alle condizioni (9), (10), (21), (22), (43). Ci rimane a trovare il valore di

$$\Lambda f(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',\bar{\theta},T+\bar{\psi},T'+\bar{\psi}')$$

od un numero che sorpassi questo valore. Ora si dedurrà dalla formola (46)

$$(49)\qquad \Lambda f(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',\bar{\theta},T+\bar{\psi},T'+\bar{\psi}')=\frac{m'}{\Lambda'\bar{r}'}\,\frac{1}{\left\{\Lambda'\left(1-2\frac{\bar{r}}{\bar{r}'}\cos.\bar{\delta}+\frac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2}\right)\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Sia d'altronde Ω un numero eguale o superiore all'espressione

$$(50)\qquad \Lambda(\cos.\bar{\delta}-\cos.\Delta_{T,T'}),$$

essendo il valore di $\cos.\Delta_{T,T'}$

$$(51)\qquad \cos.\Delta_{T,T'}=\cos.\Delta_{0,0}\cos.T\cos.T'+\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\cos.T\sin.T'$$
$$+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\sin.T\cos.T'+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\sin.T\sin.T';$$

e supponiamo che, essendo verificata la condizione (34), si abbia pure anche

$$(52)\qquad \left\{1-\Theta\,\frac{1+\frac{E}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{1-\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}\right\}^2>2\,\Omega\,\Theta\,\frac{1+\frac{E}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{1-\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}.$$

Si troverà

$$\Lambda'\left(1-2\frac{\bar{r}}{\bar{r}'}\cos.\bar{\delta}+\frac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2}\right)=\text{ovvero}<\Lambda'\left(1-2\frac{\bar{r}}{\bar{r}'}\cos.\Delta_{T,T'}+\frac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2}\right)-2\,\Omega\,\Lambda\frac{\bar{r}}{\bar{r}'},$$

$$1-2\frac{\bar{r}}{\bar{r}'}\cos.\Delta_{T,T'}+\frac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2}=\left(1-\frac{\bar{r}}{\bar{r}'}e^{\Delta_{T,T'}\sqrt{-1}}\right)\left(1-\frac{\bar{r}}{\bar{r}'}e^{-\Delta_{T,T'}\sqrt{-1}}\right),$$

$$\Lambda'\left(1-\frac{\bar{r}}{\bar{r}'}e^{\pm\Delta_{T,T'}\sqrt{-1}}\right)=1-\Lambda\frac{\bar{r}}{\bar{r}'},$$

$$\Lambda\frac{\bar{r}}{\bar{r}'}=\frac{\Lambda\bar{r}}{\Lambda'\bar{r}'}.$$

Conseguentemente la formola (49) darà

$$(53)\qquad \Lambda f(\bar{\varepsilon},\bar{\varepsilon}',\bar{\theta},T+\bar{\psi},T'+\bar{\psi}')=\text{ovvero}<\frac{m'}{\left\{(\Lambda'\bar{r}'-\Lambda\bar{r})^2-2\,\Omega\,\Lambda\bar{r}\,\Lambda'\bar{r}'\right\}^{\frac{1}{2}}};$$

e ricavando dalle formole (44), (45) le

$$(54)\qquad \Lambda\bar{r} = \text{ovvero} < \Theta a'\left\{1 + \frac{E}{2}(e^{\Psi} + e^{-\Psi})\right\}$$

$$(55)\qquad \Lambda'\bar{r}' = \text{ovvero} > a'\left\{1 - \frac{E'}{2}(e^{\Psi'} + e^{-\Psi'})\right\};$$

si avrà definitivamente

$$(56)\qquad \Lambda f(\bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}', \bar{\theta}, T + \bar{\psi}, T' + \bar{\psi}') = \text{ovvero} <$$

$$\frac{\dfrac{m'}{a'}}{\left\{\left[1 - \frac{E'}{2}(e^{\Psi'} + e^{-\Psi'}) - \Theta\left(1 + \frac{E}{2}(e^{\Psi} + e^{-\Psi})\right)\right]^2 - 2\Omega\Theta\left[1 + \frac{E}{2}(e^{\Psi} + e^{-\Psi})\right]\left[1 - \frac{E'}{2}(e^{\Psi'} + e^{-\Psi'})\right]\right\}^{\frac{1}{2}}}.$$

Non rimane più che a dedurre il valore di Ω dall' equazione (33). Ora se si pongono

$$(57)\qquad \bar{v} = 1 - (1 - \bar{\varepsilon}^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}^2 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\bar{\varepsilon}^4 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\bar{\varepsilon}^6 + \text{ecc.}$$

$$(58)\qquad \bar{v}' = 1 - (1 - \bar{\varepsilon}'^2)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\bar{\varepsilon}'^2 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}\bar{\varepsilon}'^4 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}\bar{\varepsilon}'^6 + \text{ecc.}$$

$$(59)\qquad U = \frac{1}{2}E^2 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}E^4 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}E^6 + \text{ecc.} = 1 - (1 - E^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$(60)\qquad U' = \frac{1}{2}E'^2 + \frac{1 \cdot 1}{2 \cdot 4}E'^4 + \frac{1 \cdot 1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6}E'^6 + \text{ecc.} = 1 - (1 - E'^2)^{\frac{1}{2}};$$

si dedurrà dalle formole (33) e (51)

$$(61)\qquad \cos.\bar{\delta} = \frac{\cos.\Delta_{T+\bar{\psi},\, T'+\bar{\psi}'} - \bar{\varepsilon}\cos.\Delta_{0,\, T'+\bar{\psi}'} - \bar{\varepsilon}'\cos.\Delta_{T+\bar{\psi},\, 0} + \bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}'\cos.\Delta_{0,\, 0}}{\left(1 - \bar{\varepsilon}\cos.(T + \bar{\psi})\right)\left(1 - \bar{\varepsilon}'\cos.(T' + \bar{\psi}')\right)}$$

$$- \frac{\bar{v}\left(\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\, T'+\bar{\psi}'} - \bar{\varepsilon}'\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\, 0}\right)\sin.(T + \bar{\psi}) + \bar{v}'\left(\cos.\Delta_{T+\bar{\psi},\, \frac{\pi}{2}} - \bar{\varepsilon}\cos.\Delta_{0,\, \frac{\pi}{2}}\right)\sin.(T' + \bar{\psi}')}{\left(1 - \bar{\varepsilon}\cos.(T + \bar{\psi})\right)\left(1 - \bar{\varepsilon}'\cos.(T' + \bar{\psi}')\right)}$$

$$+ \frac{\bar{v}\bar{v}'\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\, \frac{\pi}{2}}\sin.(T + \bar{\psi})\sin.(T' + \bar{\psi}')}{\left(1 - \bar{\varepsilon}\cos.(T + \bar{\psi})\right)\left(1 - \bar{\varepsilon}'\cos.(T' + \bar{\psi}')\right)};$$

e siccome si avrà d'altra parte

$$(62)\qquad \cos.\Delta_{T+\bar{\psi},\, T'+\bar{\psi}} = \cos.\Delta_{T,\, T'}\cos.\bar{\psi}\cos.\bar{\psi}' + \cos.\Delta_{T,\, T'+\frac{\pi}{2}}\cos.\bar{\psi}\sin.\bar{\psi}'$$
$$+ \cos.\Delta_{T+\frac{\pi}{2},\, T'}\sin.\bar{\psi}\cos.\bar{\psi}' + \cos.\Delta_{T+\frac{\pi}{2},\, T'+\frac{\pi}{2}}\sin.\bar{\psi}\sin.\bar{\psi}',$$

$$(63)\qquad \Lambda\sin.\bar{\psi} = \frac{e^{\Psi} - e^{-\Psi}}{2}, \qquad \Lambda\cos.\bar{\psi} = \frac{e^{\Psi} + e^{-\Psi}}{2},$$

$$(64)\qquad \Lambda\sin.\bar{\psi}' = \frac{e^{\Psi'} - e^{-\Psi'}}{2}, \qquad \Lambda\cos.\bar{\psi}' = \frac{e^{\Psi'} - e^{-\Psi'}}{2},$$

$$(65)\qquad \Lambda\frac{1}{1-\bar{\varepsilon}\cos.(T+\bar{\psi})}=\text{ovvero}<\frac{1}{1-E\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}},$$

$$(66)\qquad \Lambda\frac{1}{1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')}=\text{ovvero}<\frac{1}{1-E'\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}},$$

$$(67)\qquad \Lambda\left(\frac{\cos.\bar{\psi}}{1-\bar{\varepsilon}\cos.(T+\bar{\psi})}\;\frac{\cos.\bar{\psi}'}{1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')}\right)=$$

$$\text{ovvero}<\frac{\frac{1}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{1-\frac{E}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}\;\frac{\frac{1}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}{1-\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})};$$

si troverà

$$\Lambda\left\{\frac{\cos.\Delta_{T+\bar{\psi},\,T'+\bar{\psi}'}}{\left(1-\bar{\varepsilon}\cos.(T+\bar{\psi})\right)\left(1-\bar{\varepsilon}'\cos.(T'+\bar{\psi}')\right)}-\cos.\Delta_{T,\,T'}\right\}=$$

$$\text{ovvero}<\left\{\frac{\frac{1}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{1-\frac{E}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}\;\frac{\frac{1}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}{1-\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}-1\right\}\sqrt{\cos.^2\Delta_{T,\,T'}}$$

$$(68)\qquad +\frac{\frac{1}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}{1-\frac{E}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}\;\frac{\frac{1}{2}(e^{\Psi'}-e^{-\Psi'})}{1-\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}\sqrt{\cos.^2\Delta_{T,\,T'+\frac{\pi}{2}}}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}(e^{\Psi}-e^{-\Psi})}{1-\frac{E}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}\;\frac{\frac{1}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}{1-\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}\sqrt{\cos.^2\Delta_{T+\frac{\pi}{2},\,T'}}$$

$$+\frac{\frac{1}{2}(e^{\Psi}-e^{-\Psi})}{1-\frac{E}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})}\;\frac{\frac{1}{2}(e^{\Psi'}-e^{-\Psi'})}{1-\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})}\sqrt{\cos.^2\Delta_{T+\frac{\pi}{2},\,T'+\frac{\pi}{2}}};$$

$$(69)\quad \Lambda\cos.\Delta_{T+\bar{\psi},\,0}=\text{ovvero}<\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\sqrt{\cos.^2\Delta_{T,\,0}}+\frac{e^{\Psi}-e^{-\Psi}}{2}\sqrt{\cos.^2\Delta_{T+\frac{\pi}{2},\,0}},$$

$$(70)\quad \Lambda\cos.\Delta_{0,\,T'+\bar{\psi}'}=\text{ovvero}<\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}\sqrt{\cos.^2\Delta_{0,\,T'}}+\frac{e^{\Psi'}-e^{-\Psi'}}{2}\sqrt{\cos.^2\Delta_{0,\,T'+\frac{\pi}{2}}}$$

ecc. - - -

e per conseguenza si potrà prendere per valore di Ω quello determinato dall' equazione

$$\Omega\left(1-\frac{E}{2}(e^{\Psi}+e^{-\Psi})\right)\left(1-\frac{E'}{2}(e^{\Psi'}+e^{-\Psi'})\right)$$

$$=\left\{\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\,\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}-\left(1-E\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\right)\left(1-E'\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}\right)\right\}\sqrt{\cos.^2\Delta_{T,\,T'}}$$

$$+\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\,\frac{e^{\Psi'}-e^{-\Psi'}}{2}\sqrt{\cos.^2\Delta_{T,\,T'+\frac{\pi}{2}}}+\frac{e^{\Psi}-e^{-\Psi}}{2}\,\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}\sqrt{\cos.^2\Delta_{T+\frac{\pi}{2},\,T'}}$$

$$+\frac{e^{\Psi}-e^{-\Psi}}{2}\,\frac{e^{\Psi'}-e^{-\Psi'}}{2}\sqrt{\cos.^2\Delta_{T+\frac{\pi}{2},\,T'+\frac{\pi}{2}}}$$

$$(71)\qquad +E\left\{\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}\sqrt{\cos.^2\Delta_{0,\,T'}}+\frac{e^{\Psi'}-e^{-\Psi'}}{2}\sqrt{\cos.^2\Delta_{0,\,T'+\frac{\pi}{2}}}\right\}$$

$$+E'\left\{\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\sqrt{\cos.^2\Delta_{T,\,0}}+\frac{e^{\Psi}-e^{-\Psi}}{2}\sqrt{\cos.^2\Delta_{T+\frac{\pi}{2},\,0}}\right\}+EE'\sqrt{\cos.^2\Delta_{0,\,0}}$$

$$+U\left\{\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}\sqrt{\cos.^2\Delta_{\frac{\pi}{2},\,T'}}+\frac{e^{\Psi'}-e^{-\Psi'}}{2}\sqrt{\cos.^2\Delta_{\frac{\pi}{2},\,T'+\frac{\pi}{2}}}+E'\sqrt{\cos.^2\Delta_{\frac{\pi}{2},\,0}}\right\}\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}$$

$$+U'\left\{\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\sqrt{\cos.^2\Delta_{T,\,\frac{\pi}{2}}}+\frac{e^{\Psi}-e^{-\Psi}}{2}\sqrt{\cos.^2\Delta_{T+\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}}}+E\sqrt{\cos.^2\Delta_{0,\,\frac{\pi}{2}}}\right\}\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}$$

$$+UU'\frac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}\,\frac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}\sqrt{\cos.^2\Delta_{\frac{\pi}{2},\,\frac{\pi}{2}}}\,.$$

Si potrebbe a più forte ragione prendere per valore di Ω quello che si dedurrebbe dall' equazione (71) surrogando l'unità a ciascuno dei coseni racchiusi sotto il segno $\sqrt{}$ nel secondo membro di questa equazione, e si troverebbe allora

$$(72)\qquad \Omega=\frac{e^{\Psi}+E+U\,\dfrac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}{1-E\,\dfrac{e^{\Psi}+e^{-\Psi}}{2}}\;\frac{e^{\Psi'}+E'+U'\,\dfrac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}}{1-E'\,\dfrac{e^{\Psi'}+e^{-\Psi'}}{2}}-1\,.$$

Col mezzo delle formole (47), (56) e (71) ovvero (72) congiunte alle condizioni (9), (10), (18), (19), (34), (43) e (52), o delle formole (48), (56) e (71) o (72) congiunte alle condizioni (9), (10), (21), (22), (34), (43) e (52), si determinerà senza fatica un limite superiore all' errore commesso allorchè nello sviluppo della funzione (40) secondo le potenze ascendenti delle tre quantità

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \theta$$

si trascurano tutti i termini in cui gli esponenti di queste quantità sorpassano numeri dati.

È bene osservare che se le eccentricità ε, ε' sono assai piccole, si verificheranno le condizioni (9), (10), (18), (19), (21), (22), (34) e (52) attribuendo alle quantità

$$E,\ E',\ \Psi,\ \Psi'$$

valori parimente piccolissimi, essendo queste quantità scelte di tal maniera che E, Ψ differiscano pochissimo da ε ed E', Ψ' da ε'. Allora considerando

$$\varepsilon,\ \varepsilon',\ \frac{E}{\varepsilon}-1,\ \frac{\Psi}{\varepsilon}-1,\ \frac{E'}{\varepsilon'}-1,\ \frac{\Psi'}{\varepsilon'}-1$$

come quantità assai piccole di primo ordine, se si trascurano nei secondi membri delle formole (71), (72) le quantità di secondo ordine, dette formole daranno per valori approssimati di Ω

$$(73)\qquad 2(\varepsilon+\varepsilon')\sqrt{\cos.^2\Delta_{T,T'}}+\varepsilon'\sqrt{\cos.^2\Delta_{T,T'+\frac{\pi}{2}}}+\varepsilon\sqrt{\cos.^2\Delta_{T+\frac{\pi}{2},T'}}$$

e

$$(74)\qquad 3(\varepsilon+\varepsilon').$$

Continuazione delle NOTE DEI TRADUTTORI
alla Parte Seconda.

XXV.ª

pag. 265. *Se primieramente si suppongono* - - -

Il valore di Θ_k come è espresso nella (30) non comprende veramente quello di Θ_0, ma lo comprende dopo una trasformazione, come in seguito.

Il segno S equivale qui al segno Σ usato nel paragrafo precedente.

Le equazioni che seguono la (30) si rendono manifeste per le (21), (22) del paragrafo precedente.

La (31) esige che si richiami la (17) del precedente paragrafo, e quella maniera di scrivere che ivi si è adottata nella (88). È così

$$\cos.\Delta_{T,\,T'} = H\cos.T\cos.T' + J\cos.T\sin.T' + I\sin.T\cos.T' + K\sin.T\sin.T'.$$

Rileggasi il principio della Nota XI.ª e per la proprietà della quantità simbolica $(k)_\rho$ di essere zero quando $\rho > k$, si ammetterà la formola

$$\cos.^k\delta = \frac{1}{2^k}\, S_{\rho=0}^{\rho=k}\ (k)_\rho \cos.(k-2\rho)\delta.$$

Se si pone $k-2\rho=N$, e si trasforma la sommatoria considerando N nuova variabile, ai limiti $\rho=0$, $\rho=k$ corrispondono i limiti $N=k$, $N=-k$, che si possono capovolgere a piacere, come più volte si è veduto: quindi

$$(\alpha) \qquad \cos.^k\delta = \frac{1}{2^k}\, S_{N=-k}^{N=k}\ (k)_{\frac{k-N}{2}} \cos.N\delta.$$

Il segno S nella (33) è doppio, equivale cioè al segno

$$S_{k=0}^{k=\infty}\ S_{N=-k}^{N=k}\,.$$

Per calcolare più facilmente il terzo membro della (33) giova scomporre nella precedente (α) il corso di N in due parti, cioè da $-k$ a -1 e da 1 a k, scrivendo fuori del segno sommatorio il termine che corrisponde a $N=0$: viene così

$$\cos.^k\delta = \frac{1}{2^k}\left\{(k)_{\frac{k}{2}} + S_{N=-k}^{N=-1}\ (k)_{\frac{k-N}{2}} \cos.N\delta + S_{N=1}^{N=k}\ (k)_{\frac{k-N}{2}} \cos.N\delta\right\}.$$

Si trasformi la prima di queste due ultime sommatorie ponendo $-N$ per N; avremo

$$\cos.^k\delta = \frac{1}{2^k}\left\{(k)_{\frac{k}{2}} + S_{N=1}^{N=k}\left((k)_{\frac{k+N}{2}} + (k)_{\frac{k-N}{2}}\right)\cos.N\delta\right\}.$$

Per la formola (s) della Nota X.ª abbiamo

$$(\beta) \qquad (k)_{\frac{k+N}{2}} = (k)_{\frac{k-N}{2}}\ ;$$

adunque

$$(\gamma) \qquad \cos.^k\delta = \frac{1}{2^{k-1}}\left\{\frac{1}{2}\,(k)_{\frac{k}{2}} + S_{N=1}^{N=k}\ (k)_{\frac{k+N}{2}} \cos.N\delta\right\}$$

ossia, ciò che è lo stesso,

$$\cos.^k\delta = \frac{1}{2^{k-1}}\left\{\frac{1}{2}\,(k)_{\frac{k}{2}} + (k)_{\frac{k+1}{2}} \cos.\delta + (k)_{\frac{k+2}{2}} \cos.2\delta + (k)_{\frac{k+3}{2}} \cos.3\delta + \text{ecc.}\right\}$$

serie nella quale dovranno rigettarsi tutti i termini dove gli indici al piede delle quantità simboliche non riescono numeri interi quando si danno a k valori particolari.

XXVI.[A]

pag. 267. *Allorchè* $\frac{a'}{a}$ - - -

All'oggetto di capire la (37) richiamiamo la (29) mettendo in luogo di $\cos.^k \delta$ la precedente espressione (γ) ove siasi posto $\frac{k-N}{2}$ in luogo di $\frac{k+N}{2}$, come è indifferente per la (δ); ci verrà

$$P = m' S_{k=0}^{k=\infty} \frac{\Theta_k}{2^k} (k)_{\frac{k}{2}} + m' S_{k=0}^{k=\infty} \frac{\Theta_k}{2^{k-1}} S_{N=0}^{N=k} (k)_{\frac{k-N}{2}} \cos.N\delta.$$

La sommatoria per N può rendersi nel suo secondo limite indipendente da k estendendola all'infinito, giacchè si è veduto che $(k)_l$ è zero quando l'indice l è negativo. Allora possono invertersi i segni sommatorj, quindi

$$P = m' S_{k=0}^{k=\infty} \frac{\Theta_k}{2^k} (k)_{\frac{k}{2}} + m' S_{N=1}^{N=\infty} \cos.N\delta \cdot S_{k=0}^{k=\infty} \frac{\Theta_k}{2^{k-1}} (k)_{\frac{k-N}{2}}.$$

Vedesi da questa che il coefficiente di $\cos.N\delta$ è come sul testo. Sostituendo alla somma la serie equivalente, tutti i termini in cui k prende i valori

$$0, 1, 2, 3, - - - N-1$$

sono zero a motivo che in essi la $(k)_l$ ha per l'indice l valori negativi. Cominciano i termini sussistenti da $k=N$ in poi, e si ha l'espressione dell'Autore. Per l'ultima riduzione della (37) conviene precedentemente dedurre dalla (30) la seguente formola

$$\Theta_{N+m} = \frac{(2N+1)(2N+3) - - - (2N+2m-1)}{(2N+2)(2N+4) - - - (2N+2m)} \left(\frac{2aa'}{a^2+a'^2}\right)^m \Theta_N.$$

XXVII.[A]

pag. 269. *Sia* f(T) - - -

Conviene dimostrare direttamente la (47), sì perchè è questa una formola molto interessante e degna di essere dimostrata meglio che per l'analogia di pochi casi, sì perchè quest'ultima via è estremamente penosa, già lunga per $k=1$, quasi impraticabile per $k=2$.

Poniamo

$$(\xi) \qquad f(T) = C$$
$$+A_1 \cos.T + - - - - + A_h \cos.hT + - - - - + A_k \cos.kT$$
$$+B_1 \sin.T + - - - - + B_h \sin.hT + - - - - + B_k \sin.kT.$$

Per determinare gli $2k+1$ coefficienti $C, A_1 - - - A_k, B_1 - - - B_k$, cominciamo a mettere $T_0 + \frac{2\pi l}{2k+1}$ in luogo di T; avremo

$$(\zeta) \qquad f\left(T_0 + \frac{2\pi l}{2k+1}\right) = C$$
$$+A_1 \cos.\left(T_0 + \frac{2\pi l}{2k+1}\right) + - - - - + A_h \cos.h\left(T_0 + \frac{2\pi l}{2k+1}\right) + - - - - + A_k \cos.k\left(T_0 + \frac{2\pi l}{2k+1}\right)$$
$$+B_1 \sin.\left(T_0 + \frac{2\pi l}{2k+1}\right) + - - - - + B_h \sin.h\left(T_0 + \frac{2\pi l}{2k+1}\right) + - - - - + B_k \sin.k\left(T_0 + \frac{2\pi l}{2k+1}\right)$$

dove i $2k+1$ coefficienti saranno come nella (ε). Determineremo C, e per gli altri, i due generici A_h, B_h, dopo di che la questione avrà ottenuto un pieno scioglimento.

Bisogna precedentemente persuadersi della verità delle sette formole seguenti

$$(\eta)\quad \begin{aligned}
&(1)\quad S_{l=-k}^{l=k} \cos.h\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)=0\\
&(2)\quad S_{l=-k}^{l=k} \sin.h\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)=0\\
&(3)\quad S_{l=-k}^{l=k} \cos.i\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)\cos.h\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)=0\\
&(4)\quad S_{l=-k}^{l=k} \sin.i\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)\cos.h\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)=0\\
&(5)\quad S_{l=-k}^{l=k} \sin.i\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)\sin.h\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)=0\\
&(6)\quad S_{l=-k}^{l=k} \left[\cos.h\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)\right]^2=\frac{2k+1}{2}\\
&(7)\quad S_{l=-k}^{l=k} \left[\sin.h\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)\right]^2=\frac{2k+1}{2}.
\end{aligned}$$

Vi si giunge, cambiando nei primi membri delle precedenti equazioni le somme in integrali finiti definiti (*) ossia il segno

$$S_{l=-k}^{l=k} \quad \text{nel segno} \quad \Sigma_{-k}^{k+1} \Delta l\cdot;$$

poi cercando i valori di questi integrali finiti definiti passando per gl'indefiniti che si hanno facilmente mediante le due formole

$$(\vartheta)\quad \begin{aligned}
\Sigma\,\Delta l\cdot\cos.(p+q\,l)&=\frac{\sin.\left(p-\frac{q}{2}+q\,l\right)}{2\sin.\frac{q}{2}};\\
\Sigma\,\Delta l\cdot\sin.(p+q\,l)&=-\frac{\cos.\left(p-\frac{q}{2}+q\,l\right)}{2\sin.\frac{q}{2}};
\end{aligned}$$

già quando non si avverte il contrario, si intende che l'aumento finito della variabile l è l'unità. Per le precedenti (1), (2) delle (η) è

$$p=h\,T_0\,,\qquad q=\frac{2h\pi}{2k+1}$$

e dopo la definizione dell'integrale la riduzione a zero si fa manifesta. Per le tre seguenti bisogna prima mettere in luogo delle quantità monomie sotto il segno le binomie rispettivamente equivalenti

$$\frac{1}{2}\cos.(i-h)\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)+\frac{1}{2}\cos.(i+h)\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)$$

$$\frac{1}{2}\sin.(i-h)\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)+\frac{1}{2}\sin.(i+h)\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)$$

$$\frac{1}{2}\cos.(i-h)\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)-\frac{1}{2}\cos.(i+h)\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right).$$

(*) Vedi questi Opuscoli, Tom. II, pag. 105.

Allora l'integrazione si fa ancora prontamente per mezzo delle formole (ϑ), e si prova la riduzione a zero dopo definiti gl'integrali, precisamente come si disse delle (1), (2). A quest'effetto vedesi necessario per le (3), (5) che i due numeri i, h siano fra di loro diversi, nel caso che fossero eguali, le (3), (5) si cambiano nelle (6), (7). La determinazione dei valori di queste ultime si riduce anch'essa prontamente alla prima delle (ϑ) sostituendo alle quantità sotto il segno sommatorio le espressioni rispettivamente eguali

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos.2h\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right); \qquad \frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos.2h\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right);$$

e dopo il già dimostrato relativamente alla (1), la verità delle (6), (7) si fa palese.

Premesse queste sette formole (η), la determinazione delle C, A_h, B_h nella (ξ) diventa cosa di poca difficoltà.

S'intendano dalla (ξ) dedotte le $2k+1$ equazioni corrispondenti a $2k+1$ valori di l scritti nelle serie

$$(\iota) \qquad -k,\ -(k-1),\ \text{----}2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\ \text{---}\ k-1,\ k,$$

e poscia sommate fra di loro tutte queste equazioni. Nel secondo membro dell'equazione risultante avremo C ripetuta un numero $2k+1$ di volte, e tutti gli altri termini spariranno a motivo delle (1), (2) delle (η). Quindi

$$C=\frac{1}{2k+1}\,S_{l=-k}^{l=k}\,f\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right).$$

Per determinare A_h si moltiplichi tutta la (ξ) pel coefficiente $\cos.h\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)$ della stessa A_h; coll'equazione che ne nasce si formi un numero $2k+1$ di equazioni simili dando successivamente all'l i valori (ι); si sommino tutte queste equazioni fra loro. In forza delle formole (1), (3), (4) delle (η) spariranno tutti i termini nel secondo membro dell'equazione risultante dall'anzidetta somma, e vi resterà il solo termine che contiene A_h: ivi il valore della somma che forma il coefficiente di A_h sarà dato dalla sesta delle (η). Se ne dedurrà

$$A_h=\frac{2}{2k+1}\,S_{l=-k}^{l=k}\cos.h\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)f\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right).$$

Un giuoco simile ci darà B_h; si moltiplichi la (ξ) pel coefficiente $\sin.h\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)$ di essa B_h, poi si faccia la deduzione delle $2k+1$ equazioni, e la loro somma. Adesso per eliminare ad eccezione di un solo tutti i termini nel secondo membro dell'equazione risultante faranno effetto le (2), (4), (5), avvertendo di cambiare nella (4) i in h e reciprocamente. Il termine che rimane sarà reso semplice dalla (7), e se ne avrà

$$B_h=\frac{2}{2k+1}\,S_{l=-k}^{l=k}\sin.h\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)f\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right).$$

I trovati valori di C, A_h, B_h debbono essere sostituiti nella (ε): se ne vede così prontamente uscire la formola

$$(\varkappa) \qquad (2k+1)\,f(T)=S_{l=-k}^{l=k}\,f\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)+$$

$$2S_{h=1}^{h=k}\,S_{l=-k}^{l=k}\cos.h\left(T-T_0-\frac{2\pi l}{2k+1}\right)f\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right).$$

Da questa si passa alla

$$(\lambda) \qquad f(T)=\frac{1}{2k+1}\,S_{h=-k}^{h=k}\,S_{l=-k}^{l=k}\cos.h\left(T-T_0-\frac{2\pi l}{2k+1}\right)f\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right)$$

perchè i termini che si cavano da quest'ultima dando ad h i valori da $-k$ sino a -1, hanno gli stessi valori cominciati in ordine inverso dei termini che se ne cavano dando ad h i valori da 1 a k, e il termine corrispondente ad $h=0$ è quel medesimo che nella ($\varkappa$) è affetto di un solo segno sommatorio.

La (λ) non è ancora la (47) dell'Autore, quantunque in verità, tale come si trova, possa in varii casi servire anche meglio della (47): per esempio, facendovi $k=1$ si vede prontamente uscirne l'equazione che trovasi nel testo dopo la (46). Per ridurre la (λ) alla (47), conviene prima osservare che si ha manifestamente

$$0=\frac{1}{2k+1}\,S_{h=-k}^{h=k}\;S_{l=-k}^{l=k}\;\sin.h\left(T-T_0-\frac{2\pi l}{2k+1}\right)f\left(T_0+\frac{2\pi l}{2k+1}\right).$$

Infatti sciogliendo la somma per h, ogni termine ove h ha un valore negativo ne distrugge uno di quelli in cui h ha un valore positivo, ed è zero il termine per $h=0$.
La precedente moltiplicata per $\sqrt{-1}$ ed aggiunta alla (λ), ci porta alla (47).

L'andamento della dimostrazione per la (48) è molto simile a quello fin qui tracciato per la (47): noi dunque qui non ne indicheremo che le dissomiglianze.
In luogo delle sette formole (η) si adoperano le sette seguenti

$$S_{l=-k}^{l=k+1}\;\cos.h\left(T_0+\frac{\pi l}{k+1}\right)=0$$

$$S_{l=-k}^{l=k+1}\;\sin.h\left(T_0+\frac{\pi l}{k+1}\right)=0$$

$$S_{l=-k}^{l=k+1}\;\cos.i\left(T_0+\frac{\pi l}{k+1}\right)\cos.h\left(T_0+\frac{\pi l}{k+1}\right)=0$$

$$(\mu)\qquad S_{l=-k}^{l=k+1}\;\sin.i\left(T_0+\frac{\pi l}{k+1}\right)\cos.h\left(T_0+\frac{\pi l}{k+1}\right)=0$$

$$S_{l=-k}^{l=k+1}\;\sin.i\left(T_0+\frac{\pi l}{k+1}\right)\sin.h\left(T_0+\frac{\pi l}{k+1}\right)=0$$

$$S_{l=-k}^{l=k+1}\left[\cos.h\left(T_0+\frac{\pi l}{k+1}\right)\right]^2=k+1$$

$$S_{l=-k}^{l=k+1}\left[\sin.h\left(T_0+\frac{\pi l}{k+1}\right)\right]^2=k+1$$

le quali si dimostrano in maniera affatto simile a quella tenuta per le (η).
Quando si determina C, non si deducono dalla (ζ) $2k+1$ equazioni, ma se ne deducono in numero di $2k+2$ corrispondentemente ai valori di l scritti nella serie (50) del testo. Di queste si fa la somma, e il rimanente della operazione è come prima. Dicasi a un dipresso quando si opera per determinare A_h, B_h.

XXVIII.ª

pag. 270. *Immaginiamo ora - - -*

Quantunque $f(T)$ non contenga che i termini proporzionali alle quantità (51), può nondimeno ritenere la forma della (ε) della nota precedente; basta a tal fine scrivere

$$(\nu) \qquad f(T) = \frac{1}{2}\left(1+(-1)^k\right)C$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+(-1)^{k-1}\right)A_1 \cos.T + - - - - + \frac{1}{2}\left(1+(-1)^{k-h}\right)A_h \cos.hT + - - - - + A_k \cos.kT$$

$$+\frac{1}{2}\left(1+(-1)^{k-1}\right)B_1 \sin.T + - - - - + \frac{1}{2}\left(1+(-1)^{k-h}\right)B_h \sin.hT + - - - - + B_k \sin.kT.$$

Eseguendo su questa la stessa operazione che indicammo doversi fare sulla (ζ) per dedurre la (48), si giunge alla medesima (48), sparendo ogni traccia del nuovo coefficiente generico $\frac{1}{2}\left(1+(-1)^{k-h}\right)$ introdotto nella precedente (ν). Non è che la (48) sia la stessa nei due casi in quanto al valore del suo secondo membro: il che manifestamente sarebbe assurdo; ma la differenza pel caso in questione è di sua natura contemplata nella $f\left(T_0+\frac{\pi l}{k+1}\right)$ che ha un valore diverso da quello del primo caso.

Pertanto il passaggio dalla (48) alla (52) sta in una trasformazione della stessa (48). Questa può scriversi senza alterazione

$$f(T) = \frac{1}{2(k+1)} S_{l=1}^{l=k+1} S_{h=-k}^{h=k} e^{h\left(T-T_0-\frac{l\pi}{k+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(T_0+\frac{l\pi}{k+1}\right)$$

$$+\frac{1}{2(k+1)} S_{l=-k}^{l=0} S_{h=-k}^{h=k} e^{h\left(T-T_0-\frac{l\pi}{k+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(T_0+\frac{l\pi}{k+1}\right).$$

Si trasformi la seconda somma del secondo membro per la parte che riguarda l ponendo $l = l'-(k+1)$, dove l' è una nuova variabile. Ai limiti $l=-k$, $l=0$, corrisponderanno i limiti $l'=1$, $l'=k+1$; e restituendo l per l', avremo quella seconda somma espressa da

$$(\xi) \qquad \frac{1}{2(k+1)} S_{l=1}^{l=k+1} S_{h=-k}^{h=k} e^{h\left(T-T_0-\frac{l\pi}{k+1}+\pi\right)\sqrt{-1}} f\left(T_0+\frac{l-(k+1)}{k+1}\pi\right)$$

dove i limiti delle somme eguagliano quelli della prima delle due parti in cui si è rotta $f(T)$.

La (ξ) va ancora ridotta sostituendo ad $f\left(T_0+\frac{l-(k+1)}{k+1}\pi\right)$ l'espressione $(-1)^h f\left(T_0+\frac{l\pi}{k+1}\right)$, che, secondo c' insegna l'Autore, le è equivalente. Infatti osservando la precedente (ν), vedesi che il termine che contiene C non vi è quando k è numero dispari, e mancano parimenti tutti i termini coi seni e coseni dei multipli pari di T; però quando in luogo di T si mette $T-\pi$, la quantità muta di segno in tutti i suoi termini. Allo stesso modo si conosce la permanenza del valore e del segno pel cambiamento di T in $T-\pi$ quando k è pari.

Inoltre nella (ξ) la quantità esponenziale può esprimersi per

$$e^{h\left(T-T_0-\frac{l\pi}{k+1}\right)\sqrt{-1}} e^{h\pi\sqrt{-1}} = e^{h\left(T-T_0-\frac{l\pi}{k+1}\right)\sqrt{-1}} (-1)^h.$$

Dopo queste due sostituzioni la (ξ) diventa

$$\frac{1}{2(k+1)} S_{l=1}^{l=k+1} S_{h=-k}^{h=k} (-1)^{h+k} e^{h\left(T-T_0-\frac{l\pi}{k+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(T_0+\frac{l\pi}{k+1}\right),$$

nella quale possiamo mettere $(-1)^{k-h}$ in luogo di $(-1)^{h+k}$, perchè

$$(o) \qquad (-1)^{k+h} = (-1)^{2h}(-1)^{k-h} = (-1)^{k-h}.$$

Riunendo ora le due parti della $f(T)$ abbiamo

$$f(T) = \frac{1}{2(k+1)} S_{l=1}^{l=k+1} S_{h=-k}^{h=k} \left(1+(-1)^{k-h}\right) e^{h\left(T-T_0-\frac{l\pi}{k+1}\right)\sqrt{-1}} f\left(T_0+\frac{l\pi}{k+1}\right).$$

Non è questa ancora la (52), ma presto vi si riduce osservando che se invece di cominciare la somma per l da 1 e finirla a $k+1$, noi la cominciamo da zero e la finiamo a k, veniamo a mettere di più il termine

$$\frac{1}{2(k+1)} S_{h=-k}^{h=k} \left(1+(-1)^{k-h}\right) e^{h(T-T_0)\sqrt{-1}} f(T_0)$$

e a tralasciare il termine

$$\frac{1}{2(k+1)} S_{h=-k}^{h=k} \left(1+(-1)^{k-h}\right) e^{h(T-T_0-\pi)\sqrt{-1}} f(T_0+\pi).$$

Ora questi due errori si compensano, giacchè, come dice l'Autore

$$\left[1+(-1)^{k-h}\right] e^{-h\pi\sqrt{-1}} f(T_0+\pi) = \left[1+(-1)^{k-h}\right] f(T_0).$$

A convincersi di ciò si rifletta che

$$e^{-h\pi\sqrt{-1}} = (-1)^h, \qquad f(T_0+\pi) = (-1)^k f(T_0).$$

Pertanto la precedente equazione sarà identica se avremo

$$\left(1+(-1)^{k-h}\right)(-1)^{k+h} = 1+(-1)^{k-h};$$

ed è così a motivo della (o).

XXIX.[A]

pag. 274. *Col mezzo delle formole* - - -

Osservando il valore di $\cos.\Delta_{T,T'}$ dato nella precedente Nota XXV.ª è facile capire che si può dedurne

$$e^{T\sqrt{-1}} \cos.\Delta_{T,T'} = A + B e^{2T\sqrt{-1}}$$

dove A, B sono quantità che non contengono la T. Di qui

$$\cos.^k\Delta_{T,T'} = e^{-kT\sqrt{-1}}\left(A+Be^{2T\sqrt{-1}}\right)^k$$

$$= A^k e^{-kT\sqrt{-1}} + kA^{k-1}B e^{-(k-2)T\sqrt{-1}} + \frac{k(k-1)}{2} A^{k-2} B^2 e^{-(k-4)T\sqrt{-1}} + \text{ecc.}$$

e passando dagli esponenziali alle espressioni equivalenti per seno e coseno, si comprenderà la verità di quanto è asserito nel testo.

Vedemmo più sopra essere

$$\frac{1\cdot 3 - - - (2k-1)}{2\cdot 4 - - - 2k} = \frac{\Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma(k+1)};$$

ora, che quest'ultima espressione eguagli $\left[\frac{1}{2}\right]_k$, si fa manifesto per la seconda formola (*) della Nota X.ª

Nella (78) S sta per $S_{k=0}^{k=\infty}$.

Nella (80) S sta per $S_{f=0}^{f=\infty}\ S_{f'=0}^{f'=\infty}$.

Questa formola si riconosce vera ponendo mente che la serie di Taylor supposta convergente, dà in generale

$$(\pi) \qquad K(a+\xi) = S_{f=0}^{f=\infty} \frac{\xi^f}{\Gamma(f+1)} \cdot \frac{d^f K(a)}{da^f}$$

amando meglio scrivere $\Gamma(f+1)$ in luogo di $1 \cdot 2 \cdots f$ per evitare l'imbarazzo del caso $f=0$. Per lo sviluppo di una funzione a due variabili abbiamo successivamente

$$K(a+\xi,\ a'+\xi') = S_{f=0}^{f=\infty} \frac{\xi^f}{\Gamma(f+1)} \cdot \frac{d^f K(a,\ a'+\xi')}{da^f}$$

$$K(a,\ a'+\xi') = S_{f'=0}^{f'=\infty} \frac{\xi'^{f'}}{\Gamma(f'+1)} \cdot \frac{d^{f'} K(a,\ a')}{da'^{f'}};$$

quindi

$$(\rho) \qquad K(a+\xi,\ a'+\xi') = S_{f=0}^{f=\infty}\ S_{f'=0}^{f'=\infty} \frac{\xi^f\ \xi'^{f'}}{\Gamma(f+1)\,\Gamma(f'+1)} \cdot \frac{d^{f+f'} K(a,\ a')}{da^f\ da'^{f'}}.$$

Nel caso attuale

$$\xi^f\ \xi'^{f'} = (-1)^f\,(a\varepsilon\cos.\psi)^f\,(-1)^{f'}\,(a'\varepsilon'\cos.\psi')^{f'}.$$

Nella (81) S significa $S_{k=0}^{k=\infty}\ S_{f=0}^{f=\infty}\ S_{f'=0}^{f'=\infty}$.

Se nella (82) s'introducesse sotto il segno S il fattore

$$(\sigma) \qquad \left[1+(-1)^{k-h}\right]\left[1+(-1)^{k-h'}\right];$$

il che forse tornerebbe meglio che ripetere sempre l'avvertenza che leggesi nel testo, questo segno S significherebbe $S_{l=0}^{l=k}\ S_{h=-k}^{h=k}\ S_{l'=0}^{l'=k}\ S_{h'=-k}^{h'=k}$.

XXX.A

pag. 277. *Si avrà d'altra parte* - - -

Cominciamo, come dalla più facile, dalla seconda delle formole qui trasformate.

Richiamisi la formola (ss) della Nota XX.a; facendo $A=1$, $L=1$, $B=-1$, $M=\varepsilon\cos.\psi$, $i=\mu$, $m=k-ih$, caveremo subito per $(1-\varepsilon\cos.\psi)^{k-ih}$ l'espressione del testo ove S sta per $S_{\mu=0}^{\mu=\infty}$.

Per la precedente; facciamo $A=(-1)\,2\varepsilon$, $L=1$, $B=1$, $M=(1+\eta)\,e^{i\psi\sqrt{-1}}+(1-\eta)\,e^{-i\psi\sqrt{-1}}$, $m=ih$, $i=g$, e la stessa summentovata formola (ss) ci darà primieramente

$$\left\{(1+\eta)\,e^{i\psi\sqrt{-1}} - 2\varepsilon + (1-\eta)\,e^{-i\psi\sqrt{-1}}\right\}^{ih} =$$

$$S_{g=0}^{g=\infty}\,(-1)^{ih-g}\ 2^{ih-g}\ \varepsilon^{ih-g}\,(ih)_g\,e^{ig\psi\sqrt{-1}}\left\{1+\eta+(1-\eta)\,e^{-2i\psi\sqrt{-1}}\right\}^g.$$

Poi facciamo di nuovo

$$A=1+\eta,\ L=1,\ B=1-\eta,\ M=e^{-2i\psi\sqrt{-1}},\ m=g,\ i=\lambda,$$

e la stessa formola (ss) ci somministrerà

$$\left\{1+\eta+(1-\eta)\,e^{-2i\psi\sqrt{-1}}\right\}^g = S_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\,(g)_\lambda\,(1+\eta)^{g-\lambda}\,(1-\eta)^\lambda\,e^{-2i\lambda\psi\sqrt{-1}}.$$

Questa introdotta nell'antecedente ci presenta il risultato dell'Autore, interpretando una sua espressione simbolica come segue

$$(ih)_{\lambda,\, g-\lambda} = (ih)_g\,(g)_\lambda = \frac{\Gamma(ih+1)}{\Gamma(ih+1-g)\,\Gamma(g+1-\lambda)\,\Gamma(\lambda+1)}.$$

Il passaggio alla (90) suppone

$$(1+\eta)^{g-\lambda}\,(1-\eta)^{\lambda} = (1+\eta)^{g-2\lambda}\,\varepsilon^{2\lambda}$$

che è manifesta dopo la registrata nel testo: in questa (90) S sta per $S_{\mu=0}^{\mu=\infty}\, S_{g=0}^{g=\infty}\, S_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}$.

Intendendo nella (95) introdotto il fattore (σ), come si disse per la (82), il segno S di detta (95) sta in luogo di un segno multiplo tredici volte per le variabili

$$k,\ f,\ f',\ l,\ h,\ l',\ h',\ g,\ \lambda,\ g',\ \lambda',\ \mu,\ \mu';$$

ossia in luogo del segno

$$S_{k=0}^{k=\infty}\, S_{f=0}^{f=\infty}\, S_{f'=0}^{f'=\infty}\, S_{l=0}^{l=k}\, S_{h=-k}^{h=k}\, S_{l'=0}^{l'=k}\, S_{h'=-k}^{h'=k}\, S_{g=0}^{g=\infty}\, S_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\, S_{g'=0}^{g'=\infty}\, S_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty}\, S_{\mu=0}^{\mu=\infty}\, S_{\mu'=0}^{\mu'=\infty}.$$

Per la (97) convien richiamare la (141) della Parte Prima della Memoria facendo

$$x=\varepsilon,\ y=\psi,\ b=T,\ n=\nu;\quad \varpi(y)=\sin.\psi;\quad F(y)=e^{(g-2\lambda)i\psi\sqrt{-1}}\cos.^{f+\mu}\psi;$$

e convenendo di dare il valore 1 al prodotto $1\cdot 2 \cdots \nu$ per $\nu=0$.

La (98) si troverà dimostrata se si richiama il valore di $\cos.^g T \sin.^h T$ dato nel §. 3.° precedentemente alla formola (49) di quel paragrafo. Per passare alla (99) conviene introdurre la (98) nella (97) prima di eseguire le derivazioni, e richiamare una formola differenziale da noi data nella Nota XI.ª spiegando il passaggio simile alle (49), (50) del §. 3.°.

Nelle (99), (101) S è tripla, cioè rispettivamente per le variabili ν, ρ, ς; ν', ρ', ς' prese tutte fra i limiti *zero*, ∞. Di qui sei nuove variabili da aggiungersi alle tredici già notate.

S'introducono i valori (99), (101) in quelli (93), (94) di Υ, Υ', e questi così trasformati s'introducono nella (95). A scanso di una formola eccessivamente complicata, l'Autore forma il sistema delle tre (107), (108), (109): dividendo fra queste le diciannove variabili, e spezzando il segno multiplo diciannove volte. Al segno della (107) tocca la rappresentazione delle sommatorie per ν, λ, g, μ, ς, ρ; al segno della (108) la rappresentazione delle sommatorie per ν', λ', g', μ', ς', ρ'; al segno della (109) restano le variabili f, f', k, l, l', h, h'.

Le (111), (112), (113), (114), (115), (116) s'intendono considerando che il corso di molte variabili fra zero e l'infinito può restringersi fra zero e quel limite che è segnato nelle quantità simboliche sotto le parentesi, perchè al di là di un tal limite quelle quantità sono zero. Così a modo di esempio, la μ può riguardarsi non estesa da zero all'infinito, ma solo da zero a $k-ih$ a motivo della quantità simbolica $(k-ih)_\mu$; ossia può dirsi, ciò che torna lo stesso, che μ prende i soli valori pei quali la differenza $(k-ih)-\mu$ è nulla o positiva.

XXXI.ª

pag. 280. *È d'uopo osservare* - - -

Ciò che si dice di $\rho+\varsigma$, che cioè tal somma debba essere sempre compresa fra zero e $f+\mu+\nu$, s'intende facendo la somma delle due equazioni (113).

Per le (122): la quantità

$$g+ih-(1+i)(g-2\lambda)$$

è sempre positiva. Infatti λ stando fra *zero*, g, e i essendo -1 ovvero $+1$, il termine negativo nella combinazione più propria a crescerne il valore, è $-2g$: quindi la quantità complessiva è $ih-g$, ancora positiva.

L'equazione

$$g+ih=(1+i)(g-2\lambda)$$

può scriversi

$$(ih-g)+(1-i)g+2(1+i)\lambda=0$$

i cui tre termini essendo sempre positivi, se ne cava $\lambda=0$, $i=1$, $g=h$.

Nel caso di $N=-(n+g)$ all'equazione

$$g+ih=(1-i)(g-2\lambda)$$

può darsi la forma

$$(ih-g)+(1+i)g+2(1-i)\lambda=0$$

e ne sono manifeste le conseguenze come sul testo. In questo stesso caso la somma $\rho+\varsigma$ deve eguagliare la somma $f+\mu+\nu$. Ciò può essere in infinite maniere, di cui scriviamo alcune

1.ª	$\rho=f+\mu-1$;	$\varsigma=\nu+1$
2.ª	$\rho=f+\mu$;	$\varsigma=\nu$
3.ª	$\rho=f+\mu+1$;	$\varsigma=\nu-1$

La prima delle notate e tutte le antecedenti ad essa danno nella (107) per A valori nulli a motivo dei fattori $(\nu)_\varsigma$, $(\nu-1)_\varsigma$. La 2.ª riduce $(-1)^\nu N$ il termine $(-1)^\varsigma N(f+\mu)_\rho(\nu)_\varsigma$ e nullo il seguente. La 3.ª riduce nullo il termine ora scritto a motivo del fattore $(f+\mu)_\rho$, e $-(-1)^{\nu-1}\nu$ il seguente. Tutte le successive riducono nulli ambi i termini. Si avrà quindi la (126) riflettendo che $-(-1)^{\nu-1}=(-1)^\nu$.

La riduzione della (125) alla (127) è palese: quella della (126) alla (127) esige che si osservi come sia

$$(-n-ih+\nu)(-n-ih)^{\nu-1}=(-1)^{-\nu}(n+ih-\nu)(n+ih)^{\nu-1}.$$

XXXII.ª

pag. 282. *È anche facile* - - -

La formola che qui si adopera è la (142) della Prima Parte della Memoria: abbiamo

$$y=s,\quad x=\varepsilon^2,\quad F(y)=s^\lambda,\quad \varpi(y)=-\frac{1}{s},\quad b=2.$$

Nella (134) havvi ε sostituita a 2 nei luoghi ove s'indica l'operazione di derivazione, perchè fa un certo urto il concepire una simile operazione eseguita sopra un numero determinato. È facile vedere che

$$\frac{d^{\upsilon-1}\left(\varepsilon^{\lambda-\upsilon-1}\right)}{d\varepsilon^{\upsilon-1}}=(\lambda-\upsilon-1)(\lambda-\upsilon-2)\cdots(\lambda-2\upsilon+1)\,\varepsilon^{\lambda-2\upsilon}$$

quindi

$$\lambda\,\frac{d^{\upsilon-1}\left(\varepsilon^{\lambda-\upsilon-1}\right)}{d\varepsilon^{\upsilon-1}}=\frac{\lambda}{\lambda-2\upsilon}(\lambda-\upsilon-1)(\lambda-\upsilon-2)\cdots(\lambda-2\upsilon)\,\varepsilon^{\lambda-2\upsilon}$$

dove i fattori $\lambda-\upsilon-1$, $\lambda-\upsilon-2$ - - - $\lambda-2\upsilon$ sono di numero υ. In seguito

$$\frac{\lambda(-1)^\upsilon d^{\upsilon-1}\left(\varepsilon^{\lambda-\upsilon-1}\right)}{1\cdot2\cdots\upsilon\cdot d\varepsilon^{\upsilon-1}}=\frac{\lambda}{\lambda-2\upsilon}\cdot\frac{(\upsilon-\lambda+1)(\upsilon-\lambda+2)\cdots(\upsilon-\lambda+\upsilon)}{1\cdot2\cdots\upsilon}\,\varepsilon^{\lambda-2\upsilon}.$$

Richiamisi la prima delle formole (46) del paragrafo terzo di questa Seconda Parte, e siccome prendendo i fattori a rovescio

$$(\upsilon-\lambda+1)(\upsilon-\lambda+2)\cdots(\upsilon-\lambda+\upsilon)=(2\upsilon-\lambda)(2\upsilon-\lambda-1)(2\upsilon-\lambda-2)\cdots\big((2\upsilon-\lambda)-\upsilon+1\big).$$

si ridurrà manifesto che il secondo membro della precedente equazione può scriversi

$$\frac{\lambda}{\lambda-2\upsilon}(2\upsilon-\lambda)_{\upsilon}\, 8^{\lambda-2\upsilon}.$$

Coll'aggiunta delle υ, υ' le diciannove variabili diventano ventuna. Nel caso di $N=\pm(n+g)$, $N'=\pm(n'+g')$ si hanno $\upsilon=0$, $\upsilon'=0$ per lo stesso ragionamento che ci persuase essere allora $\lambda=0$, $\lambda'=0$.

XXXIII.A

pag. 283. *Osserviamo in fine* - - -

Ecco la dimostrazione della formola (145).

Abbiamo da formola notissima

$$\frac{d^f(\mathfrak{A}\mathfrak{A}')}{da^f}=\mathfrak{A}'\frac{d^f\mathfrak{A}}{da^f}+f\frac{d\mathfrak{A}'}{da}\cdot\frac{d^{f-1}\mathfrak{A}}{da^{f-1}}+\frac{f(f-1)}{2}\,\frac{d^2\mathfrak{A}'}{da^2}\cdot\frac{d^{f-2}\mathfrak{A}}{da^{f-2}}+\cdots$$

$$+\frac{f(f-1)(f-2)\cdots[f-(f-1)]}{1\cdot 2\cdots f}\cdot\frac{d^f\mathfrak{A}'}{da^f}\cdot\frac{d^{f-f}\mathfrak{A}}{da^{f-f}}$$

che può scriversi

$$\frac{d^f(\mathfrak{A}\mathfrak{A}')}{da^f}=S_{n=0}^{n=f}\frac{f(f-1)\cdots(f-n+1)}{1\cdot 2\cdots n}\cdot\frac{d^n\mathfrak{A}'}{da^n}\cdot\frac{d^{f-n}\mathfrak{A}}{da^{f-n}}$$

ovvero

$$(\tau)\qquad \frac{d^f(\mathfrak{A}\mathfrak{A}')}{da^f}=S_{n=0}^{n=f}(f)_n\cdot\frac{d^n\mathfrak{A}'}{da^n}\cdot\frac{d^{f-n}\mathfrak{A}}{da^{f-n}}.$$

Facciamo per un momento

$$\mathfrak{C}=\frac{d^n\mathfrak{A}'}{da^n},\qquad \mathfrak{C}'=\frac{d^{f-n}\mathfrak{A}}{da^{f-n}}$$

e dalla precedente (τ) derivata f' volte per l'altra variabile a',

$$\frac{d^{f+f'}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}')}{da^f\,da'^{f'}}=S_{n=0}^{n=f}(f)_n\cdot\frac{d^{f'}(\mathfrak{C}\mathfrak{C}')}{da'^{f'}}.$$

La stessa (τ) ci prova essere

$$\frac{d^{f'}(\mathfrak{C}\mathfrak{C}')}{da'^{f'}}=S_{n'=0}^{n'=f'}(f')_{n'}\cdot\frac{d^{n'}\mathfrak{C}'}{da'^{n'}}\cdot\frac{d^{f'-n'}\mathfrak{C}}{da'^{f'-n'}}.$$

Sostituiscasi questo valore nella precedente, poi si restituiscano per $\mathfrak{C}$, $\mathfrak{C}'$ le quantità da esse rappresentate, avremo

$$\frac{d^{f+f'}(\mathfrak{A}\mathfrak{A}')}{da^f\,da'^{f'}}=S_{n=0}^{n=f}\,S_{n'=0}^{n'=f'}(f)_n\,(f')_{n'}\cdot\frac{d^{f-n+n'}\mathfrak{A}}{da^{f-n}\,da'^{n'}}\cdot\frac{d^{f'-n'+n}\mathfrak{A}'}{da'^{f'-n'}\,da^n}$$

che è la (145) coll'interpretazione del segno S.

Per l'applicazione di questa formola al ritrovamento delle (147), (148), osserviamo che la successiva derivazione dimostra le formole

$$\frac{d^h(a'+a\sqrt{-1})^{-p}}{da^h}=\frac{p(p+1)(p+2)\cdots(p+h-1)(-1)^h(\sqrt{-1})^h}{(a'+a\sqrt{-1})^{p+h}}$$

$$\frac{d^{h'}(a'+a\sqrt{-1})^{-q}}{da'^{h'}}=\frac{q(q+1)(q+2)\cdots(q+h'-1)(-1)^{h'}}{(a'+a\sqrt{-1})^{q+h'}}.$$

Derivando la prima di queste h' volte per a' si trova nel secondo membro applicabile la seconda ove facciasi $q=p+h$, e si ha

$$(\nu)\qquad \frac{d^{h+h'}(a'+a\sqrt{-1})^{-p}}{da^h\,da'^{h'}}=\frac{p(p+1)\cdots(p+h+h'-1)(-1)^{h+h'}(\sqrt{-1})^h}{(a'+a\sqrt{-1})^{p+h+h'}}.$$

In simile maniera

$$\frac{d^h(a'-a\sqrt{-1})^{-p}}{da^h}=\frac{p(p+1)(p+2)\cdots(p+h-1)(\sqrt{-1})^h}{(a'-a\sqrt{-1})^{p+h}}$$

$$\frac{d^{h'}(a'-a\sqrt{-1})^{-q}}{da'^{h'}}=\frac{q(q+1)(q+2)\cdots(q+h'-1)(-1)^{h'}}{(a'-a\sqrt{-1})^{q+h'}}$$

e da entrambe

$$(\varphi)\qquad \frac{d^{h+h'}(a'-a\sqrt{-1})^{-p}}{da^h\,da'^{h'}}=\frac{p(p+1)\cdots(p+h+h'-1)(-1)^{h'}(\sqrt{-1})^h}{(a'-a\sqrt{-1})^{p+h+h'}}.$$

Dalla (ν) facendo

$$h=f-n,\quad h'=n',\quad p=k+\frac{1}{2}=\frac{2k+1}{2}$$

$$\frac{d^{f-n+n'}\left(a'+a\sqrt{-1}\right)^{-k-\frac{1}{2}}}{da^{f-n}\,da'^{n'}}=\frac{1}{2^{f-n+n'}}\cdot\frac{(2k+1)\cdots(2k+2f-2n+2n'-1)(-1)^{f-n+n'}(\sqrt{-1})^{f-n}}{\left(a'+a\sqrt{-1}\right)^{k+f-n+n'+\frac{1}{2}}};$$

e dalla (φ) facendo

$$h=n,\quad h'=f'-n',\quad p=k+\frac{1}{2}=\frac{2k+1}{2}$$

$$\frac{d^{f'-n'+n}\left(a'-a\sqrt{-1}\right)^{-k-\frac{1}{2}}}{da^n\,da'^{f'-n'}}=\frac{1}{2^{f'-n'+n}}\cdot\frac{(2k+1)\cdots(2k+2f'-2n'+2n-1)(-1)^{f'-n'}(\sqrt{-1})^n}{\left(a'-a\sqrt{-1}\right)^{k+f'-n'+n+\frac{1}{2}}}.$$

Ormai con queste due ultime formole si fa palese la (147), ponendo mente che $(-1)^{-n}=(-1)^n$. Il passaggio alla (148) si fa osservando le formole

$$a'+a\sqrt{-1}=\left(a'^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}e^{\xi\sqrt{-1}};\qquad a'-a\sqrt{-1}=\left(a'^2+a^2\right)^{\frac{1}{2}}e^{-\xi\sqrt{-1}};$$

elevando la prima alla potenza $k+f-n+n'+\frac{1}{2}$ e la seconda alla potenza $k+f'-n'+n+\frac{1}{2}$, indi facendo il prodotto di queste potenze, e riflettendo che la parte reale compresa nella espressione

$$e^{(2n-f-2n'+f')\xi\sqrt{-1}}(\sqrt{-1})^f(-1)^n=e^{-[(2n-f)\xi'+(2n'-f')\xi]\sqrt{-1}}$$

$$\text{è}\quad \cos.\left[(2n-f)\xi'+(2n'-f')\xi\right].$$

Noteremo, quantunque sia facile capirlo, che qui le n, n' hanno diversa significazione di quella assunta nelle (139), (140). Sono due nuove variabili da aggiungersi alle ventuna.

XXXIV.A

pag. 284. *Allorchè* $\frac{a}{a'}$ - - -

Si ripropone da capo una nuova maniera di sviluppo, che importa minor complicazione di variabili e di sommatorie.

Nella (151) S significa $S_{k=0}^{k=\infty}\ S_{f=0}^{f=\infty}$.

Nella (153) S è $S_{\lambda=0}^{\lambda=\infty}\ S_{g=0}^{g=\infty}$.

Nella (154) S è $S_{\lambda'=0}^{\lambda'=\infty}\ S_{g'=0}^{g'=\infty}$.

Confessiamo qui di non intendere il perchè la somma $ih+i'h'$ debba essere sempre numero pari, e possa così eliminarsi il fattore $(-1)^{ih+i'h'}$; se questo nostro dubbio è fondato in una realtà, quel fattore sussisterà ancora nella (155) e nella (163): tutto il rimanente stando senza alterazione.

La S della (155) si estende alle dieci variabili $f, k, g, \lambda, g', \lambda', l, l', h, h'$.
La (157) introduce una nuova variabile μ; la (158) una nuova variabile μ'; la (159) porta le tre variabili ν, ρ, ς; e la (161) le tre ν', ρ', ς'; per ultimo il richiamo della (156) ne aggiunge due altre υ, υ'; in tutto sono venti.

Possiamo intendere queste venti distribuite in maniera che il segno della (163) rappresenti le k, f, l, l', h, h'; quello della (166) le $g, \mu, \lambda, \rho, \varsigma, \nu, \upsilon$; e quello della (167) le $g', \mu', \lambda', \rho', \varsigma', \nu', \upsilon'$.

XXXV.A

pag. 286. *Siccome si ha generalmente* - - -

Dimostriamo primieramente le (173), (174).

La (14) per $\varepsilon=0$, $\varepsilon'=0$ dà

$$P=m' S_{k=0}^{k=\infty}\ \Theta_k\left(1+\cos.\Delta_{T,T'}\right)^k$$

essendo

$$\Theta_k=\frac{1\cdot 3 - - - (2k-1)}{2\cdot 4 - - - 2k}\cdot\frac{(2aa')^k}{(a+a')^{2k+1}}=\left[\frac{1}{2}\right]_k\cdot\frac{(2aa')^k}{(a+a')^{2k+1}}.$$

Ora per essere $a=\theta a'$

$$\frac{(2aa')^k}{(a+a')^{2k+1}}=\frac{2^k}{a'}\,\theta^k(1+\theta)^{-(2k+1)}=\frac{2^k}{a'}\,\theta^k\,S_{f=0}^{f=\infty}\,(-1)^f\left[2k+1\right]_f\theta^f.$$

Con queste tre ultime formole si compone subito la (173) ove S è $S_{k=0}^{k=\infty}\ S_{f=0}^{f=\infty}$.
La (15) nello stesso caso di $\varepsilon=0$, $\varepsilon'=0$, e nell'attuale supposizione di $a<a'$, dà

$$P=m' S_{k=0}^{k=\infty}\ \Theta_k\left(1-\cos.\Delta_{T,T'}\right)^k$$

essendo

$$\Theta_k=(-1)^k\,\frac{1\cdot 3 - - - (2k-1)}{2\cdot 4 - - - 2k}\cdot\frac{(2aa')^k}{(a'-a)^{2k+1}}=(-1)^k\left[\frac{1}{2}\right]_k\cdot\frac{(2aa')^k}{(a'-a)^{2k+1}}.$$

In seguito

$$\frac{(2aa')^k}{(a'-a)^{2k+1}}=\frac{2^k}{a'}\,\theta^k\,(1-\theta)^{-(2k+1)}=\frac{2^k}{a'}\,\theta^k\,S_{f=0}^{f=\infty}\left[2k+1\right]_f\theta^f.$$

Qui pure, combinando le tre formole, troviamo la (174) ove S è $S_{k=0}^{k=\infty}\ S_{f=0}^{f=\infty}$.

Il passaggio dalla (173) alle (175) e dalla (174) alle (176) è come quello dalla (151) alla (152). Affatto analoghe alle trasformazioni usate per passare dalla (152) alla (163) sono quelle che si richiedono per passare alle (177), (178) ovvero alle (181), (182): quindi anche quest'ultime formole soggiacciono alla osservazione più sopra fatta relativamente alla (163) quando si parlò del fattore $(-1)^{ih+i'h'}$.

Le (171), (172) esigono che si trovino prima due altre formole analoghe alla (74), dalle quali si passi alle (171), (172) come dalla (74) alla (75), riflettendo che $\cos.\delta$ è funzione degli archi $p-\varpi$, $p'-\varpi'$ alla stessa maniera che $\cos.\Delta_{T,T'}$ lo è degli archi T, T'.

XXXVI.[A]

Al §. 5.°

Intorno a quanto qui dice l'Autore sulla valutazione dei resti delle serie, a fine di schivare un'errore in cui è facile cadere, raccomandiamo di ben riflettere alle *due specie* di *resto* da noi distinte nella Nota VI.ª alla Parte Prima, e di ben considerare che la prima non corrisponderebbe alla somma di tutti i termini trascurati, quando i termini che si ritengono sono in numero finito.

A capire la verità della (6) convien richiamare la generalissima (184) della Parte Prima, e la (188) che ivi l'Autore ne derivò prevedendo l'applicazione che qui se ne dovea fare. Il confronto si farà mediante le equazioni

$$x=\varepsilon,\quad x'=\varepsilon',\quad y=\psi,\quad y'=\psi',\quad b=T,\quad b'=T',$$

$$\bar{x}=\bar{\varepsilon},\quad X=E,\quad \bar{x}'=\bar{\varepsilon}',\quad X'=E',\quad \bar{z}=\bar{\psi},\quad Z=\Psi,$$

$$\bar{z}'=\bar{\psi}',\quad Z'=\Psi'.$$

Ritornando sulle formole della Parte Prima ora citate abbiamo dovuto rilevare che tanto all'Autore nello scrivere la Memoria come a noi nel commentarla è uscito di vista il fattore - - - $Z\,Z'$ - - - per cui debbono essere moltiplicate le espressioni (185), (186). Così anche il fattore $\bar{z}\,\bar{z}'$ sotto il doppio segno della (188) e nell'espressione (189); e il fattore $Z\,Z'$ nelle (190), (191).

Per la (7) e per una simile formola che abbisogna più tardi, si richiami la (σ) della Nota VI.ª alla Parte Prima.

Le condizioni (11), (12) risultano dalla (151) Parte Prima; avvertendo che ivi in luogo di ξ può stare la stessa x, quando, come nel nostro caso, la $x=\varepsilon$ è numero positivo. La sostituzione di $\frac{\pi}{2}$ a T vedesi già praticata nel passaggio dalla (157) alla (158) Parte Prima.

Il passaggio dalla (14) alla (15), o piuttosto alla (20), è ragionato come quello dalla (152) alla (153), o dalla (125) alla (126) Parte Prima, a cui in quella Nota XVIII.ª si aggiunse da noi qualche schiarimento. Qui però è anche d'uopo capire come sia

$$\text{mod.}\ \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}-\varepsilon}<\frac{E}{E-\varepsilon}.$$

$$\text{Ora}\quad \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}-\varepsilon}=\frac{E\,e^{(p-s)\sqrt{-1}}}{\sqrt{E^2-2E\varepsilon\cos.p+\varepsilon^2}}$$

$$\text{essendo}\quad s=\text{Arc. tan.}\ \frac{E\sin.p}{E\cos.p-\varepsilon}:\quad \text{quindi}$$

$$\text{mod.}\ \frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\varepsilon}-\varepsilon}=\frac{E}{\sqrt{E^2-2E\varepsilon\cos.p+\varepsilon^2}}<\frac{E}{E-\varepsilon}.$$

Le (16) riuscirebbero diverse se si usassero le (24) Parte Prima: qui si esprimono limiti maggiori.

Le (18), (19) si riscontrano nella (158) Parte Prima; le (21), (22) riescono necessarie affinchè siano positivi due denominatori nella (20); la (34) è voluta dalla necessità che non divenga negativo un altro denominatore che occorre più d'una volta.

Conviene richiamare alcuni teoremi sulle Λ dati nella Parte Prima: veggansi ivi principalmente le formole (25), (31). Per la (37) di questo paragrafo l'Autore usa il metodo appoggiato alle serie ch'egli insegnò sul fine della stessa Parte Prima. Una simile serie dà la Λ pel secondo termine del secondo fattore nella (36), e quindi si ha la (38).

Posta l'espressione $1-2\frac{\bar{r}}{\bar{r}'}\cos.\bar{\delta}+\frac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2}$ sotto la forma

$$\left(1-2\frac{\bar{r}}{\bar{r}'}\cos.\Delta_{T,T'}+\frac{\bar{r}^2}{\bar{r}'^2}\right)-2\frac{\bar{r}}{\bar{r}'}\left(\cos.\bar{\delta}-\cos.\Delta_{T,T'}\right)$$

se ne avrà il modulo ridotto al minimo o ad una quantità poco distante dal minimo, riducendo al minimo il modulo del primo trinomio, e al massimo quello della quantità sottratta. A tal effetto però si ricerca che la parte negativa non superi la positiva, astrazion fatta dal segno; di qui, richiamate le (44), (45), emerge la condizione (52). Non si fa che favorire la condizione mettendo l'unità in luogo di $\cos.\Delta_{T,T'}$ nel primo trinomio che riducesi al quadrato $\left(1-\frac{\bar{r}}{\bar{r}'}\right)^2$.

Il passaggio dalla (33) alla (61) si fa cominciando a mettere nella (33) dappertutto $1-\bar{v}$, $1-\bar{v}'$ in luogo di $\left(1-\bar{\varepsilon}^2\right)^{\frac{1}{2}}$, $\left(1-\bar{\varepsilon}'^2\right)^{\frac{1}{2}}$, poi eseguendo i prodotti della quantità nei numeratori, dei quali può farsene un solo, giacchè il denominatore è lo stesso nei quattro termini. In tale operazione si cercherà 1.° la quantità formata di soli seni e coseni: 2.° il coefficiente totale di $\bar{\varepsilon}$: 3.° il coefficiente totale di $\bar{\varepsilon}'$: 4.° il coefficiente di $\bar{\varepsilon}\bar{\varepsilon}'$: 5.° il coefficiente totale di $\bar{v}$: 6.° il coefficiente totale di $\bar{v}'$: 7.° il coefficiente di $\bar{v}\bar{v}'$. Troveremo così senza difficoltà il secondo membro della (61) se rifletteremo che per la (51) vengono dimostrate le cinque seguenti

$$(\chi)\qquad \cos.\Delta_{T+\bar{\psi},T'+\bar{\psi}}=\cos.\Delta_{0,0}\cos.(T+\bar{\psi})\cos.(T'+\bar{\psi})+\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\cos.(T+\bar{\psi})\sin.(T'+\bar{\psi})$$

$$+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\sin.(T+\bar{\psi})\cos.(T'+\bar{\psi})+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\sin.(T+\bar{\psi})\sin.(T'+\bar{\psi})$$

$$\cos.\Delta_{0,T'+\bar{\psi}}=\cos.\Delta_{0,0}\cos.(T'+\bar{\psi})+\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\sin.(T'+\bar{\psi})$$

$$\cos.\Delta_{T+\bar{\psi},0}=\cos.\Delta_{0,0}\cos.(T+\bar{\psi})+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\sin.(T+\bar{\psi})$$

$$\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},T'+\bar{\psi}}=\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},0}\cos.(T'+\bar{\psi})+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\sin.(T'+\bar{\psi})$$

$$\cos.\Delta_{T+\bar{\psi},\frac{\pi}{2}}=\cos.\Delta_{0,\frac{\pi}{2}}\cos.(T+\bar{\psi})+\cos.\Delta_{\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}}\sin.(T+\bar{\psi}).$$

La (62) si trova vera ponendo nella precedente (χ) in luogo dei quattro prodotti

$$\cos.(T+\bar{\psi})\cos.(T'+\bar{\psi}),\quad \cos.(T+\bar{\psi})\sin.(T'+\bar{\psi})$$
$$\sin.(T+\bar{\psi})\cos.(T'+\bar{\psi}),\quad \sin.(T+\bar{\psi})\sin.(T'+\bar{\psi})$$

i quadrinomj rispettivamente eguali

$$\cos.T\cos.T'\cos.\bar{\psi}\cos.\bar{\psi}'-\cos.T\sin.T'\cos.\bar{\psi}\sin.\bar{\psi}'$$
$$-\sin.T\cos.T'\sin.\bar{\psi}\cos.\bar{\psi}'+\sin.T\sin.T'\sin.\bar{\psi}\sin.\bar{\psi}';$$

$$\cos.T\sin.T'\cos.\bar{\psi}\cos.\bar{\psi}'+\cos.T\cos.T'\cos.\bar{\psi}\sin.\bar{\psi}'$$
$$-\sin.T\sin.T'\sin.\bar{\psi}\cos.\bar{\psi}'-\sin.T\cos.T'\sin.\bar{\psi}\sin.\bar{\psi}';$$

$$\sin.T\cos.T'\cos.\overline{\psi}\cos.\overline{\psi}' - \sin.T\sin.T'\cos.\overline{\psi}\sin.\overline{\psi}'$$
$$+\cos.T\cos.T'\sin.\overline{\psi}\cos.\overline{\psi}' - \cos.T\sin.T'\sin.\overline{\psi}\sin.\overline{\psi}';$$

$$\sin.T\sin.T'\cos.\overline{\psi}\cos.\overline{\psi}' + \sin.T\cos.T'\cos.\overline{\psi}\sin.\overline{\psi}'$$
$$+\cos.T\sin.T'\sin.\overline{\psi}\cos.\overline{\psi}' + \cos.T\cos.T'\sin.\overline{\psi}\sin.\overline{\psi}';$$

indi raccogliendo i quattro coefficienti totali dei prodotti

$$\cos.\overline{\psi}\cos.\overline{\psi}';\quad \cos.\overline{\psi}\sin.\overline{\psi}';\quad \sin.\overline{\psi}\cos.\overline{\psi}';\quad \sin.\overline{\psi}\sin.\overline{\psi}'$$

e osservando che il primo è lo stesso secondo membro della (51), e gli altri tre sono in forza della medesima (51) rappresentabili da

$$\cos.\Delta_{T,\,T'+\frac{\pi}{2}},\quad \cos.\Delta_{T+\frac{\pi}{2},\,T'},\quad \cos.\Delta_{T+\frac{\pi}{2},\,T'+\frac{\pi}{2}}.$$

Per le (69), (70) riveggasi la seconda delle formole (24) Parte Prima; e lo stesso dicasi pei primi due termini dei coefficienti di U, U' nella (71).

La riduzione della (71) alla (72) dopo aver posta l'unità in luogo di tutti i coseni, non esige che la paziente esecuzione di un calcolo senza difficoltà.

Trascurando i quadrati e i prodotti delle E, Ψ; E', Ψ', e mettendo ε per le due prime ed ε' per le due seconde ove dette quantità sono alla dimensione lineare, la (71) darebbe per Ω l'espressione

$$(\varepsilon+\varepsilon')\sqrt{\cos.^2\Delta_{T,\,T'}} + \varepsilon\sqrt{\cos.^2\Delta_{T+\frac{\pi}{2},\,T'}} + \varepsilon\sqrt{\cos.^2\Delta_{0,\,T'}}$$
$$+\varepsilon'\sqrt{\cos.^2\Delta_{T,\,T'+\frac{\pi}{2}}} + \varepsilon'\sqrt{\cos.^2\Delta_{T,\,0}}.$$

Anche questa, ponendo dappertutto l'unità in luogo dei coseni, riducesi alla (74).

AVVERTENZA

Qui termina la Memoria del sig. Cauchy Sulla Meccanica Celeste e sopra un nuovo calcolo chiamato calcolo dei limiti, *presentata all'Accademia di Torino negli anni* 1831, 1832. *L'Autore v'aggiunse in seguito un'Appendice che presentò alla stessa Accademia nel marzo* 1833.

SULLE
SVOLTE ORDINARIE DELLE STRADE
NOTA
DI ANTONIO BORDONI

Per trovare la linea $A123xC$ (fig. 1) *svolta* di una strada $---BA123xCD---$, onde riunire o raccordare convenientemente le due parti rettilinee $AB---$, $CD---$ della strada stessa, generalmente si usa il metodo seguente.

Si prolungano le rette BA, DC sino in E ad incontrarsi; si divide la EC in più parti Ea, ab, bc, cd, $---$, tC eguali fra loro, e la AE in altrettante parti Al, lm, mn, $---$, vu, uE pure fra loro eguali: fatto ciò, si trovano i punti $1, 2, 3, ---, x$ comuni ordinatamente alle rette aA, bl; bl, cm; cm, dn; $---$; tv, Cu; indi si traccia una curva, che passi pei punti A, 1, 2, 3, $---$, x, C e non abbia nè flessi nè regressi; e dessa si ritiene la svolta richiesta.

Sebbene di questo metodo, per la determinazione della svolta di una strada o di un canale o d'altro, parlarono almeno per incidenza i signori Sganzin, Puissant, Brianchon, Sereni, ed altri sì prima che dopo di loro, non ostante, io spero, che non ispiacerà ai giovini ingegneri la lettura di questa Nota, che è una delle ultimate fra quelle che aveva scritto per assecondare i signori Cadolini e Masieri traduttori e commentatori della *Biblioteca per gli Ingegneri*; giacchè in essa vi sono varie proposizioni interessanti, che non furono per anco trattate, ed altre che nol furono tanto, quanto possono interessare, avuto riguardo all'uso di esse.

Proposizione prima.

Trovare le coordinate dei punti, pei quali deve passare la svolta ordinaria di una strada?

Siano (fig. 2) FG, HK, IL le rette r *esima*, $(r+1)$ *esima*, $(r+2)$ *esima* analoghe alle aA, bl, cm, $---$ della figura antecedente; e saranno M, N i punti r *esimo*, $(r+1)$ *esimo* analoghi agli 1, 2, 3, $---$ della stessa figura antecedente.

Evidentemente, la proposizione proposta si riduce a trovare quelle funzioni del numero r, che sono le coordinate del punto M.

Tanto in questa proposizione quanto nelle altre, quando non si faranno speciali dichiarazioni, gli assi delle coordinate saranno le due rette direzioni dei due tronchi rettilinei della strada a raccordarsi, cioè le $ECx---$, $EAy---$; e per evitare una stucchevole ripetizione, sì le rette che le quantità analoghe, occorrenti più volte, si sottintenderanno denominate similmente.

Si supponga $y=Ex+F$ la equazione della retta --- FG ---, e segata in n parti eguali tanto la AE quanto la EC; e denomininsi A, B le lunghezze di queste rette AE, EC, ed a, b quelle delle loro parti, e però $A=na$, $B=nb$.

Essendo pel punto G, la $x=ra$ ed $y=0$, e per l'F la $x=0$ ed $y=(n-r+1)b$, facilmente si trovano

$$F=(n-r+1)b\,,\quad E=-\frac{1}{ra}(n-r+1)b;$$

e però la effettiva equazione della retta --- FG --- sarà

$$(1)\text{ --- }ary+(n-r+1)bx=ab(n-r+1)r,$$

e quella della --- HK --- la seguente

$$(2)\text{ --- }a(r+1)y+(n-r)bx=ab(n-r)(r+1).$$

Si chiamino x_r, y_r le coordinate del punto M, cioè le richieste: esse soddisfanno le due equazioni (1), (2), e però soddisfaranno la (1) prima di esse e la seguente

$$(3)\text{ --- }ay_r-bx_r=ab(n-2r),$$

che si ha, sottraendo dai membri della (2) i corrispondenti della (1); e conseguentemente sarà

$$(4)\text{ --- }x_r=r(r+1)c,\quad \text{ed}\quad y_r=r(r+1)d+(n+1)(n-2r)d$$

$$\text{ossia}\quad y_r=(n-r)(n-r+1)d,$$

$$\text{dove}\quad c=\frac{a}{n+1}=\frac{A}{n(n+1)},\quad \text{e}\quad d=\frac{b}{n+1}=\frac{B}{n(n+1)}.$$

Vale a dire si avrà

$$x_r=\frac{r(r+1)}{n(n+1)}A,\quad \text{ed}\quad y_r=\frac{(n-r)(n-r+1)}{n(n+1)}B.$$

Corollario. Evidentemente si ha

$$HM:HK=x_r:EK,\quad \text{ed anco}\quad x_r:EK=rc:a=r:n+1;$$

adunque sarà $HM:HK=r:n+1$, cioè

$$(5)\text{ --- }HM=\frac{r}{n+1}HK.$$

Così, per essere $HK:MN=EK:\Delta_r x_r$, ed

$$EK:\Delta_r x_r=a(r+1):2c(r+1)=a:2c=n+1:2,$$

si ha anco $HK:MN=n+1:2$ e però sarà

$$(6)\text{ --- }MN=\frac{2}{n+1}HK.$$

Queste due relazioni (5), (6) danno la seguente $MN=\frac{2}{r}HM$.

Osservazione. Se nei valori (4) si pone $-r$ in vece d'r, si hanno

$$x_{-r}=r(r-1)c\,;\quad y_{-r}=(n+r)(n+r+1)d,$$

che sono le coordinate del punto comune alle due rette seganti il prolungamento della EA alle distanze rb, $(r+1)b$ dal punto A ed il prolungamento della CE alle distanze $(r-1)a$, ra dall'E. Così, ponendo $n+r$ in luogo dell'r medesimo, si hanno

$$x_{n+r}=(n+r)(n+r+1)c\,,\qquad y_{n+r}=r(r-1)d\,,$$

le quali sono le coordinate di quel punto, che è comune alle rette seganti il prolungamento della EC alle distanze ra, $(r+1)a$ dal punto C e quello della AE alle distanze $(r-1)b$, rb dal punto E. Dimodochè, supposto il numero intero r qualunque, le due equazioni (4) si possono ritenere quelle di un poligono di infiniti lati ed aperto verso i prolungamenti delle rette AB, CD.

Proposizione seconda.

Trovare il minimo lato del poligono, una cui parte ha i vertici degli angoli nei punti, pei quali deve passare la svolta della strada, considerata nella proposizione antecedente?

Denominando le rette (fig. 1) $A1$, 12, 23, --- *primo* lato, *secondo* lato, *terzo* lato, --- del poligono, la MN (fig. 2) sarà il lato $(r+1)$ *esimo* di esso: la lunghezza di questo lato si indicherà con l_{r+1}, e le x_r, y_r coordinate del suo primo termine indicheransi per semplicità colle sole x, y.

Evidentemente i valori (4) delle x_r, y_r, trovati nella proposizione antecedente, danno

$$\Delta x=2(r+1)c,\quad \Delta y=2(r-n)d,$$

ove le differenze si intendano prese rispetto all'r, come la $\Delta_r x_r$ nel corollario della medesima proposizione antecedente.

Essendo l_{r+1}, Δx, Δy i lati del triangolo, avente l'angolo opposto all'l_{r+1} eguale allo stesso E compreso dalle rette EA, EC, si ha

$$l^2_{r+1}=(\Delta x)^2+(\Delta y)^2+2\alpha\Delta x\cdot\Delta y:$$

dove α è posto per cos.E, ed il terzo termine del secondo membro è preso positivamente, perchè Δy è negativa.

Sostituendo in questa equazione in luogo delle differenze Δx, Δy i loro valori, sopra esposti, si ha

$$l^2_{r+1}=4c^2(r+1)^2+4d^2(r-n)^2+8\alpha cd(r+1)(r-n);$$

e però sarà

$$l^2_r=4(r^2C-2rD+b^2),$$

posto $\quad C=c^2+d^2+2\alpha cd=(A^2+B^2+2AB\alpha):n^2(n+1)^2,$

e $\quad D=(n+1)(d+c\alpha)d=(B+A\alpha)B:n^2(n+1).$

Ma pel minimo valore del lato l_r dev'essere

$$l_r^2 < \text{od} = l_{r-1}^2, \quad \text{ed} \quad l_r^2 < l_{r+1}^2;$$

adunque esso corrisponderà a quello del numero r, soddisfacente le due relazioni seguenti

$$r^2C - 2rD + b^2 < \text{od} = (r-1)^2C - 2(r-1)D + b^2,$$
$$r^2C - 2rD + b^2 < (r+1)^2C - 2(r+1)D + b^2,$$

le quali equivalgono alle

$$(2r-1)C - 2D < \text{od} = 0, \quad (2r+1)C - 2D > 0,$$

che danno

$$r < \text{od} = \frac{D}{C} + \frac{1}{2}, \quad \text{ed} \quad r > \frac{D}{C} - \frac{1}{2},$$

cioè r eguale al numero intero prossimo più di ogni altro al $\frac{D}{C}$. Quindi il minimo lato richiesto e le coordinate dei termini di esso si avranno, sostituendo questo valore dell'r nelle espressioni delle l_r; x_{r-1}, y_{r-1}; x_r, y_r già conosciute.

Osservazione. Se il valore d'r, qui trovato, risultasse negativo ovvero maggiore dell'n, il minimo lato del poligono, di cui si parla, non sarebbe di quelli componenti la sua porzione compresa fra i punti A, C, ma bensì dei componenti quelle sue porzioni, che si sono considerate nella osservazione della proposizione antecedente.

Proposizione terza.

Trovare il massimo angolo esterno del medesimo poligono contemplato nella proposizione antecedente?

Si chiami v_r (fig. 2) l'ascissa ed u_r l'ordinata del punto M parallele alle rette Ex---, Eu--- fra loro perpendicolari; e β il seno dell'angolo E: così, si denomini μ_{r+1} quell'angolo esterno, che è compreso dal lato l_{r+2} e dal prolungamento dell'l_{r+1}.

Essendo

$$\text{tang.}\mu_{r+1} = (\Delta v \Delta^2 u - \Delta^2 v \Delta u) : (l_{r+1}^2 + \Delta v \Delta^2 v + \Delta u \Delta^2 u),$$

e $v_r = x_r + \alpha y_r$, $u_r = \beta y_r$, e però

$$\Delta v \Delta^2 u - \Delta^2 v \Delta u = \beta(\Delta x \Delta^2 y - \Delta^2 x \Delta y),$$

$$\Delta v \Delta^2 v + \Delta u \Delta^2 u = \Delta x \Delta^2 x + \Delta y \Delta^2 y + \alpha(\Delta y \Delta^2 x + \Delta^2 y \Delta x),$$

si ha

$$\text{tang.}\mu_{r+1} = \beta(\Delta x \Delta^2 y - \Delta^2 x \Delta y) : \left(l_{r+1}^2 + \Delta x \Delta^2 x + \Delta y \Delta^2 y + \alpha(\Delta y \Delta^2 x - \Delta^2 y \Delta x)\right).$$

Ma pel poligono attuale sono

$$\Delta x = 2(r+1)c, \quad \Delta^2 x = 2c, \quad \Delta y = 2(r+1)d - 2b, \quad \Delta^2 y = 2d,$$

per cui risulta

$$\Delta x \Delta^2 y - \Delta^2 x \Delta y = 4cd(n+1) = 4bc; \quad \text{e}$$

$$\Delta x \Delta^2 x + \Delta y \Delta^2 y = 4(c^2+d^2)(r+1) - 4bd,$$

$$\Delta y \Delta^2 x + \Delta^2 y \Delta x = 8cd(r+1) - 4bc, \quad \text{cioè}$$

$$\Delta x \Delta^2 x + \Delta y \Delta^2 y + \alpha(\Delta y \Delta^2 x + \Delta^2 y \Delta x) = 4(c^2+d^2+2cd\alpha)(r+1) - 4b(d+c\alpha),$$

ossia *eguale* a $4\big((r+1)C - D\big)$; adunque sarà

$$\text{tang.}\mu_{r+1} = bc\beta : \big((r+1)^2 C + (r+1)(C-2D) + b^2 - D\big)$$

e però $\quad \text{tang.}\mu_r = bc\beta : \big(r^2 C + r(C-2D) + b^2 - D\big).$

Evidentemente, il massimo angolo esterno corrisponderà a quel numero r, che renderà minimo il denominatore di questo valore trovato della tang.μ_r, e però a quello che soddisfarà le due relazioni

$$r^2 C + r(C-2D) + b^2 - D < \text{od} = (r-1)^2 C + (r-1)(C-2D) + b^2 - D,$$

$$r^2 C + r(C-2D) + b^2 - D < (r+1)^2 C + (r+1)(C-2D) + b^2 - D,$$

cioè le $r < \text{od} = \frac{D}{C}$, $r > \frac{D}{C} - 1$ ad esse equivalenti, le quali insegnano, che il massimo angolo μ_r corrisponderà ad r eguale al maggior numero intero di quelli non maggiori di $\frac{D}{C}$. E quindi ponendo questo valore d'r nelle espressioni di tang.μ_r, x_r, y_r, si avrà la grandezza ed il vertice dell'angolo richiesto.

Osservazione. Qui pure, come nella proposizione antecedente, se il valore d'r risultasse negativo o maggiore dell'n, il massimo angolo esterno del poligono non apparterrebbe evidentemente a quella porzione del poligono stesso, che è fra i punti C, A, ma bensì all'una od all'altra delle rimanenti parti di esso medesimo.

Proposizione quarta.

I vertici degli angoli del poligono contemplato nelle proposizioni antecedenti sono tutti nella parabola conica, la cui equazione fra le x, y, coordinate di essa, riportata agli assi Ex - - -, Ey - - - è la seguente

$$(7) \text{ - - - } (Bx - Ay)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)AB(Ay + Bx) + \left(1 + \frac{2}{n}\right)A^2B^2 = 0.$$

La equazione (3) dà

$$r = \frac{1}{2ab}(bx_r - ay_r + abn) \text{ e però } r+1 = \frac{1}{2ab}\big(bx_r - ay_r + ab(n+2)\big);$$

e questi valori dei numeri r, $r+1$, sostituiti nella (4), somministrano fra le x_r, y_r, qualunque sia il numero intero r, la equazione

$$4a^2b^2x_r = c(bx_r - ay_r + abn)\big(bx_r - ay_r + ab(n+2)\big),$$

che equivale visibilmente tanto alla

$$\left(bx_r - ay_r + ab(n+1)\right)^2 - 4ab^2(n+1)x_r - a^2b^2 = 0,$$

quanto alla

$$(bx_r - ay_r)^2 - 2ab(n+1)(bx_r + ay_r) + a^2b^2n(n+2) = 0,$$

le quali, per essere $a = \frac{A}{n}$, $b = \frac{B}{n}$, si riducono alle seguenti

$$\left(Bx_r - Ay_r + \left(1 + \frac{1}{n}\right)AB\right)^2 - 4\left(1 + \frac{1}{n}\right)AB^2x_r - \frac{1}{n^2}A^2B^2 = 0,$$

$$(8) \text{ - - - } (Bx_r - Ay_r)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right)(Bx_r + Ay_r)AB + \left(1 + \frac{2}{n}\right)A^2B^2 = 0.$$

Ma quest'ultima si ottiene anco, ponendo nella (7) in luogo delle x, y rispettivamente x_r, y_r; adunque i punti corrispondenti a queste ultime coordinate, cioè i vertici degli angoli del poligono contemplato nelle proposizioni antecedenti, sono nella parabola rappresentata colla medesima equazione (7): appunto come è dichiarato nella proposizione attuale.

Corollario I. Facendo $x = 0$ nella medesima equazione (7) ovvero nella equivalente

$$(9) \text{ - - - } \left(Bx - Ay + \left(1 + \frac{1}{n}\right)AB\right)^2 - 4\left(1 + \frac{1}{n}\right)AB^2x - \frac{1}{n^2}A^2B^2 = 0,$$

si ha la

$$\left(Ay - \left(1 + \frac{1}{n}\right)AB\right)^2 = \frac{1}{n^2}A^2B^2 \quad \text{ossia} \quad y - \left(1 + \frac{1}{n}\right)B = \pm\frac{1}{n}B$$

cioè od $y = B$ ovvero $y = B + \frac{2}{n}B$; e però la parabola - - - $AMNC$ - - - rappresentata colla equazione (7) (fig. 3) sega la retta EAy - - - nel punto A ed anco in altro punto B della Ay - - -; il quale è distante dall'A di $\frac{2}{n}B$.

Così, colla stessa equazione (9) facendo $y = 0$, si trovano $x = A$, $x = A + \frac{2}{n}A$, i quali valori insegnano, che la medesima parabola sega la retta ECx - - - nel punto C ed in altro D, la cui distanza dal medesimo D eguaglia $\frac{2}{n}A$.

Corollario II. Si faccia la retta $AB = \frac{2}{n}B$, la $CD = \frac{2}{n}A$; e si conducano le due AC, BD, che saranno corde della parabola stessa - - - $AMNC$ - - - e parallele fra loro; giacchè, essendo

$$AB : CD = B : A, \text{ si ha } AB : CD = AE : CE.$$

Per questa proprietà, la retta - - - PQ - - - condotta pei punti P, Q di mezzo delle AC, BD passerà pel punto E, e sarà diametro dalla parabola. Vale a dire, la parabola, che si terrà, come si fa generalmente, per la svolta della strada, avrà i diametri ed anco l'asse paralleli alla retta EP condotta pel punto E e pel P di mezzo della AC.

Proposizione quinta.

Trovare le direzioni della svolta della strada ai termini di essa?

Nella proposizione antecedente abbiamo veduto, che, eliminando il numero r contenuto esplicitamente nelle due equazioni

$$ay_r - bx_r = ab(n-2r)\,, \quad x_r = r(r+1)c\,,$$

si ottiene la (8); e però, eliminando la quantità t dalle due

$$ay - bx = ab(n-2t)\,, \quad x = ct(t+1)\,,$$

o dalle loro equivalenti

$$(10) \text{ --- } x = ct(t+1)\,, \quad y = dt^2 + (d-2b)t + bn\,,$$

si avrà la (7); e conseguentemente la svolta della strada si potrà rappresentare, siccome si farà replicatamente, con queste due equazioni (10), nelle quali vi è la quantità t da eliminarsi. Questa medesima quantità indeterminata si terrà tanto in questa proposizione quanto in altre per la variabile principale.

Si chiamino p, q le coordinate di un punto qualunque della retta tangente la parabola nel punto corrispondente alle x, y.

Essendo

$$x = t(t+1)c; \quad y = t^2 d + (d-2b)t + bn$$

e però

$$x' = (2t+1)c\,, \quad y' = 2td + d - 2b\,,$$

la notissima equazione generale della retta tangente cioè la

$$(q-y)x' - (p-x)y' = 0$$

si riduce

$$\big(q - dt^2 - (d-2b)t - bn\big)(2t+1)c - \big(p - ct(t+1)\big)(2dt + d - 2b) = 0;$$

per cui la equazione della tangente la parabola sarà

$$c(2t+1)q - (2dt + d - 2b)p = bc(n + 2nt - 2t^2)$$

ossia

$$(11) \text{ --- } A(2t+1)q - B(2t - 2n - 1)p = \frac{1}{n}AB(n + 2nt - 2t^2).$$

Evidentemente, per il punto A si ha $t=0$; e però la equazione della retta toccante la parabola in questo punto cioè la direzione della svolta in questo suo termine sarà quella della retta rappresentata colla equazione

$$(12) \text{ --- } Aq + B(2n+1)p = AB,$$

la quale si ottiene col fare $t=0$ nella (11).

Così, siccome pel punto C della parabola è $t=n$, la toccante la parabola stessa in questo punto, cioè la direzione della svolta in questo punto medesimo,

sarà quella della retta $---CS---$, avente per equazione la

$$(13) \; --- \; A(2n+1)q+Bp=AB,$$

che si ottiene col fare $t=n$ nella stessa (11).

Corollario I. Nella equazione (12) si faccia $q=0$, e si avrà $p=\frac{A}{2n+1}$; e nella (13) facciasi $p=0$, ed avrassi $q=\frac{B}{2n+1}$. Quindi, determinata la retta ER *eguale* alla $(2n+1)$ *esima* parte della EC, e la ES *eguale* alla $(2n+1)$ *esima* parte della EA, ed unite le rette RA, SC saranno desse le direzioni della svolta della strada nei punti A, C termini di essa medesima.

Corollario II. Il triangolo ERA, pel quale si hanno

$$AE=B,\; ER=\frac{A}{2n+1}, \quad AR=\frac{H}{2n+1}, \quad \text{dove}$$

$$H=\sqrt{\left(A^2+(2n+1)^2B^2-2\alpha AB(2n+1)\right)},$$

dà $\text{sen}.EAR=\beta\frac{ER}{AR}=\frac{A\beta}{H}$, $\cos.EAR=(B-ER\cdot\alpha):AR$, ossia

$$\cos.EAR=\frac{1}{H}\left((2n+1)B-A\alpha\right);$$

e però sarà

$$(14) \; --- \; \cot.EAR=(2n+1)\frac{B}{A\beta}-\cot.E.$$

Con questa equazione si potrà determinare l'angolo fatto dalla svolta della strada nel suo termine A col tronco AB - - -, già esistente.

Similmente si trova

$$(15) \; --- \; \cot.ECS=(2n+1)\frac{A}{B\beta}-\cot.E.$$

Queste due equazioni (14), (15) evidentemente danno la seguente proporzione

$$\cot.EAR+\cot.E:\cot.ECS+\cot.E=B^2:A^2.$$

Corollario III. Essendo $Aq+Bp=0$, $A(2t+1)q-B(2t-2n-1)p=0$ le equazioni delle due rette, che passano per la origine delle coordinate, e sono parallele la prima alla - - - AC - - - e la seconda alla toccante qualsivoglia della parabola, affinchè questa toccante sia la particolare parallela alla retta - - - AC - - - la seconda delle medesime due equazioni dovrà essere identica alla prima; e però sarà

$$-\frac{B}{A}=\frac{B}{A}\cdot\frac{2t-2n-1}{2t+1} \quad \text{cioè} \quad t=\frac{n}{2};$$

e per conseguenza le coordinate del punto di contatto fra la parabola e quest' ultima sua toccante saranno

$$\frac{c}{4}n(n+2),\; \frac{d}{4}n^2-\frac{d}{2}n(2n+1)+bn \quad \text{ossia} \quad \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{A}{4},\; \frac{n+2}{n+1}\cdot\frac{B}{4}.$$

Evidentemente, il punto corrispondente a queste coordinate sarà quello della svolta della strada, il quale avrà dalla retta - - - AC - - - una distanza maggiore di quella di ogni altro punto della svolta medesima.

Proposizione sesta.

Trovare le coordinate di quel punto della svolta della strada, il quale è nell' arco sotteso della corda MN, lato $(r+1)$ *esimo* del poligono contemplato nelle prime tre proposizioni, ed ha da essa una distanza maggiore di quella di ogni altro punto dell' arco stesso?

Egli è evidente, che il punto, di cui si dimandano le coordinate, sarà quello di contatto fra la parabola e la retta sua tangente parallela alla - - - MN - - -.

La equazione della retta, che passa per la origine delle coordinate parallelamente alla tangente qualsivoglia della parabola è, come abbiamo veduto nella proposizione antecedente,

$$A(2t+1)q+B(2n+1-2t)p=0;$$

e quella della passante per la stessa origine e parallela alla retta - - - MN - - -, nella quale vi è il lato MN del poligono, si desume dalla (2), e risulta la seguente

$$A(r+1)q+B(n-r)p=0;$$

e però, siccome queste due rette debbono coincidere, affinchè sia soddisfatta la proposta proposizione, così la quantità t dovrà soddisfare la equazione

$$\frac{2n+1-2t}{2t+1}=\frac{n-r}{r+1}, \text{ la quale dà } t=r+\frac{1}{2}.$$

Ma per un punto qualunque della parabola si hanno

$$x=t(t+1)c, \quad y=(n-t)(n-t+1)d, \text{ ossia}$$

$$x=\left(r+\frac{1}{2}\right)^2c-\frac{c}{4}, \text{ ed } y=\left(n-r+\frac{1}{2}\right)^2d-\frac{d}{4};$$

adunque le coordinate richieste saranno le seguenti

$$x=(r+1)^2c-\frac{c}{4}, \quad y=(n-r)^2d-\frac{d}{4}.$$

Osservazione I. Si chiamino p_r, q_r le coordinate del punto di mezzo della corda MN.

Essendo

$$2p_r=x_r+x_{r+1}, \quad 2q_r=y_r+y_{r+1},$$

i valori (4) delle x_r, y_r danno

$$p_r=c(r+1)^2, \quad q_r=d(n-r)^2;$$

e però, per le speciali coordinate x, y, trovate dianzi, sarà

$$p_r - x = \frac{A}{4} : n(n+1), \quad q_r - y = \frac{B}{4} : n(n+1),$$

e conseguentemente

$$\sqrt{\left\{(p_r - x)^2 + 2\alpha(p_r - x)(q_r - y) + (q_r - y)^2\right\}} = \frac{1}{4} L : n(n+1),$$

dove L esprime $\sqrt{(A^2 + B^2 + 2AB\alpha)}$ cioè la retta ET diagonale del parallelogrammo costruito sulle rette EC, EA. Quindi, condotta pel punto di mezzo della corda MN e verso E la retta parallela alla EPT ed eguale alla parte $(2n+1)$ *esima* di una *quarta* parte della ET, nell'altro termine di essa avrassi il punto corrispondente alle coordinate x, y trovate nella proposizione: ciò che è singolare.

Così, eliminando il numero r dalle due equazioni

$$p_r = (r+1)^2 c, \quad q_r = (n-r)^2 d,$$

si trova la

$$(Bp_r - Aq_r)^2 - 2\left(1 + \frac{1}{n}\right) AB(Aq_r + Bp_r) + \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 A^2 B^2 = 0,$$

la quale insegna, che, i punti di mezzo dei lati del poligono contemplato già più volte, sono in una parabola eguale a quella rappresentata colla (7), e che è dessa tangente a tutti i lati nei punti di mezzo di essi medesimi.

Osservazione II. Approfitto di questa occasione per esporre la proposizione seguente, la quale, oltre avere molta analogia colla qui trattata, interessa in varie circostanze.

Proposizione settima.

Trovare un poligono circoscritto ad una parabola data, pel quale sia costante il rapporto di quelle rette parti analoghe componenti ogni suo lato, che hanno per termine comune il punto di contatto fra la parabola ed il lato formato con esse?

La origine delle coordinate sia nel vertice della parabola, l'asse delle ascisse x la toccante di essa in questo punto, e quello delle ordinate y lo stesso asse di essa medesima.

Sia $y = ax^2$ la equazione della parabola; e si chiamino p_r, q_r le coordinate del vertice di quell'angolo del poligono, che è compreso dai lati r, $r+1$ (*esimi*) di esso, ed x_r, y_r quelle del punto di contatto fra il suo lato r *esimo* e la parabola, ed $\frac{m}{n}$ il rapporto costante delle due parti di ogni lato di esso medesimo.

Le coordinate p_r, q_r, come appartenenti al punto comune alle rette tangenti la parabola nei punti corrispondenti alle ascisse x_r, x_{r+1}, hanno le proprietà rappresentate colle equazioni

$$q_r - 2ax_r p_r + ax_r^2 = 0, \quad q_r - 2ax_{r+1} p_r + ax_{r+1}^2 = 0,$$

le quali equivalgono evidentemente alle due

$$(16) \text{ - - - } 2p_r = x_r + x_{r+1}, \qquad (17) \text{ - - - } q_r = a x_r x_{r+1}.$$

Così, le due parti del lato *r esimo* del poligono comprese fra i punti corrispondenti alle ascisse p_r, x_r, p_{r+1} hanno fra loro il rapporto $\frac{m}{n}$ al pari delle due parti analoghe di qualunque altro lato di esso; e però ha luogo la proporzione

$$x_{r+1} - p_r : p_{r+1} - x_{r+1} = m : n,$$

la quale dà

$$(18) \text{ - - - } (m+n) x_{r+1} = m p_{r+1} + n p_r.$$

Dimodochè le quattro coordinate x_r, y_r, p_r, q_r sono tali funzioni del numero r, che soddisfanno, oltre la equazione $y_r = a x_r^2$, le tre (16), (17), (18) qui trovate.

Eliminando la p_r dalle due equazioni (16), (18), si trova la

$$m x_{r+2} - m x_{r+1} - n x_{r+1} + n x_r = 0 \quad \text{ossia} \quad \Delta(m x_{r+1} - n x_r) = 0,$$

che dà $m x_{r+1} - n x_r = A$; e questa somministra

$$x_r = A + B\left(\frac{n}{m}\right)^r,$$

dove A, B esprimono due costanti arbitrarie, anzi quest'ultima A è posta in vece della A antecedente *divisa* per $m-n$.

Il valore della x_r posto nelle equazioni (16), (17), $y_r = a x_r^2$, dà le seguenti

$$(19) \text{ - - - } p_r = A + \frac{m+n}{2m} B\left(\frac{n}{m}\right)^r,$$

$$(20) \text{ - - - } q_r = a\left(A + B\left(\frac{n}{m}\right)^r\right)\left(A + \frac{n}{m} B\left(\frac{n}{m}\right)^r\right),$$

$$y_r = a\left(A + B\left(\frac{n}{m}\right)^r\right)^2,$$

di cui le (19), (20) esprimono le coordinate od equazioni del poligono richiesto; e con esse si possono dimostrare facilmente le proprietà tutte del poligono medesimo.

Corollario I. Ponendo nella equazione (20) in luogo di $B\left(\frac{n}{m}\right)^r$ il suo valore $\frac{2m}{m+n}(p_r - A)$, cavato dalla (19), si ha la

$$q_r = a\left(A + \frac{2m}{m+n}(p_r - A)\right)\left(A + \frac{2n}{m+n}(p_r - A)\right)$$

ossia la seguente

$$(m+n)^2 q_r + a A^2 (m-n)^2 - 2aA(m-n)^2 p_r - 4amn p_r^2 = 0,$$

la quale esprime, che i vertici degli angoli del poligono sono anch'essi in una parabola conica; dimodochè, il poligono di cui si parla, è circoscritto ad una parabola ed inscritto in un'altra.

Evidentemente, queste due parabole hanno gli assi fra loro paralleli, e distanti l'un dall'altro di $-(m-n)^2 A : 4mn$.

Osservazione. Nel caso di $m=n$, in vece della equazione (18) si ha la $2x_{r+1}=p_r+p_{r+1}$, la quale combinata colla (16) dà

$$4x_{r+1}=2x_{r+1}+x_r+x_{r+2} \text{ ossia } \Delta^2 x_r=0,$$

e però $x_r=Ar+B$, ove A, B esprimono due costanti; e quindi sarà

$$y_r=a(Ar+B)^2, \quad p_r=Ar+B+\frac{1}{2}A, \quad \text{e} \quad q_r=a\left(Ar+B+\frac{1}{2}A\right)^2-a\frac{A}{4}.$$

Questo poligono è inscritto nella parabola, le cui coordinate p, q hanno la relazione $q=ap^2-a\frac{A^2}{4}$, per cui essa eguaglia evidentemente la stessa data, ciò che si accorda coll' ultima dichiarazione fatta nella osservazione della proposizione antecedente.

Proposizione ottava.

Trovare il punto della svolta di una strada, dove essa riescirà incurvata più che in qualunque altro punto di essa medesima?

Si ritenga la parabola espressa colle due equazioni

$$x=ct(t+1), \quad y=dt(t+1)-2bt+bn,$$

già usate nella proposizione quinta; ed indicate colle v, u, come nella proposizione seconda, le coordinate rettangole dello stesso punto corrispondente alle x, y in generale obblique, cioè sia $v=x+y\alpha$, $u=y\beta$; e si chiami R il raggio di curvatura della parabola e corrispondente alle stesse coordinate v, u.

Essendo

$$R=-\frac{(v'^2+u'^2)^{\frac{3}{2}}}{v'u''-u'v''}.$$

ove le derivate sono rispetto alla t, e $v'=x'+\alpha y'$, $u'=\beta y'$, $v''=x''+\alpha y''$, $u''=\beta y''$, si ha

$$R=(x'^2+y'^2+2x'y'\alpha)^{\frac{3}{2}} : \beta(x''y'-x'y'').$$

Ma $x'=(1+2t)c$, $y'=(1+2t)d-2b$, $x''=2c$, $y''=2d$, e però

$$x''y'-x'y''=4bc,$$

$$x'^2+y'^2+2x'y'\alpha=(2t+1)^2c^2+(2t+1)^2d^2+2cd\alpha(2t+1)^2-4b(c\alpha+d)(2t+1)+4b,$$

$$\text{cioè} \quad x'^2+y'^2+2\alpha x'y'=Ht^2-2Mt+N,$$

dove $H=4C$, $M=4D-2C$, ed $N=C-4D+4b^2$; adunque sarà

$$R=\frac{1}{4bc\beta}(Ht^2-2Mt+N)^{\frac{3}{2}}, \quad \text{ovvero} \quad R=\frac{\varphi^{\frac{3}{2}}}{4bc\beta}$$

posto $\varphi=Ht^2-2Mt+N$.

Siccome la massima incurvatura della svolta corrisponde al minimo valore del raggio R, così essa corrisponderà al valore della t, che renderà minima la funzione $\varphi(t)$ cioè al $t=\frac{M}{H}$. Ma questo valore della t dà

$$\varphi\left(\frac{M}{H}\right)=\frac{1}{H}(HN-M^2);$$

e per essere

$$H=4C,\ M=2(2bh-C), \text{ ed } N=C+4(b-h)b, \text{ dove } h=d+c\alpha,$$

$$\text{si ha } HN-M^2=16b^2(C-h^2)=16b^2c^2\beta^2;$$

adunque il minimo valore del raggio R, che denominerassi Q_n, sarà $2b^2c^2\beta^2:C^{\frac{3}{2}}$.

Ponendo in questa espressione del Q_n in luogo delle quantità b, c, $C^{\frac{1}{2}}$; i loro valori $\frac{B}{n}$, $\frac{A}{n(n+1)}$, $\frac{L}{n(n+1)}$, risulta

$$(21) \text{ - - - } Q_n=2\beta^2\frac{A^2B^2}{L^3}\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Ora passo a trovare i valori di quelle coordinate x, y della parabola, le quali corrispondono al $t=\frac{M}{H}$, che saranno evidentemente le coordinate del punto richiesto vertice della parabola stessa, della quale è porzione la svolta della strada.

Per essere $x=c(t+1)t$, hassi $x=\frac{M}{H^2}(M+H)c$; ma è

$$M+H=2(2bh+C) \text{ e però } M(M+H)=4(4b^2h^2-C^2);$$

e per tanto pel vertice sarà

$$x=\frac{c}{4C^2}(4b^2h^2-C^2)=\frac{b^2c^2h^2}{C^2}-\frac{c}{4}, \text{ cioè}$$

$$(22) \text{ - - - } x=\frac{AB^2}{L^4}(B+A\alpha)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{\frac{1}{4}A}{n(n+1)},$$

giacchè è $c=\frac{A}{n(n+1)}$, $C=\frac{L^2}{n^2(n+1)^2}$ ed $h=\frac{B+A\alpha}{n(n+1)}$.

Similmente trovasi

$$(23) \text{ - - - } y=\frac{A^2B}{L^4}(A+B\alpha)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{\frac{1}{4}B}{n(n+1)}.$$

Corollario I. Si compiscano, il parallelogrammo $AECT$ (fig. 4) ed i rettangoli $CVXT$, $AZYT$; e si ponga l'angolo $CET=\lambda$, e l'$AET=\delta$: evidente-

mente si hanno

$$ET=L,\ EZ=B\alpha,\ EV=A\alpha,\ EX=B+A\alpha,\ EY=A+B\alpha,$$

ed anco

$$\frac{B}{L}=\frac{\text{sen.}\lambda}{\beta},\quad \frac{A}{L}=\frac{\text{sen.}\delta}{\beta},\quad \frac{A+B\alpha}{L}=\cos.\lambda,\quad \frac{B+A\alpha}{L}=\cos.\delta.$$

Con queste relazioni le equazioni o formole (21), (22), (23) agevolmente si riducono alle

$$Q_n=2\left(1+\frac{1}{n}\right)A\cdot\frac{1}{\beta}\text{sen.}\delta\,\text{sen.}^2\lambda,$$

$$x=\frac{A}{n}\left(\frac{n+1}{\beta^2}\cos.^2\delta\,\text{sen.}^2\lambda-\frac{1}{4(n+1)}\right),$$

$$y=\frac{B}{n}\left(\frac{n+1}{\beta^2}\text{sen.}^2\delta\cos.^2\lambda-\frac{1}{4(n+1)}\right).$$

Così, posto $EV=k$, $EZ=i$, $CV=h$, $\frac{1}{2}L=g=EP$, le stesse equazioni (21), (22), (23) danno le seguenti

$$Q_n=\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{h^2B^2}{g^3},$$

$$x=\frac{A}{16n}\left((n+1)\frac{(B+k)^2}{g^4}B^2-\frac{4}{n+1}\right),$$

$$y=\frac{B}{16n}\left((n+1)\frac{A^2}{g^4}(A+i)^2-\frac{4}{n+1}\right),$$

le quali non contengono funzioni trigonometriche.

Corollario II. Si chiamino P, Q le coordinate dell'asse della parabola: esso deve passare pel punto corrispondente alle x, y, trovate qui sopra, e pel corollario secondo della proposizione quarta dev'essere parallelo alla retta ET; e però avrà luogo la proporzione

$$Q-y:P-x=B:A;$$

e conseguentemente la equazione di esso sarà

$$AQ-BP=Ay-Bx;$$

cioè pei valori delle x, y, trovati nella proposizione, sarà

$$AQ-BP=\left(1+\frac{1}{n}\right)\frac{A^2B^2}{L^4}(A^2-B^2)\beta^2,$$

e pei primi, trovati nel corollario antecedente, sarà in vece

$$AQ-BP=\left(1+\frac{1}{n}\right)AB\frac{1}{\beta}\text{sen.}(\delta-\lambda).$$

Osservazione. Dalle espressioni valori del Q_n, qui sopra esposte, risulta che esso si impicolisce collo aumentare il numero n, per cui, aumentando questo numero, si conseguirà bensì con maggiore esattezza la linea della svolta della strada, ma si aumenterà la massima piegatura della svolta medesima; e però interessante può riescire la proposizione seguente.

Proposizione nona.

Trovare il più grande valore del numero n, che dà il corrispondente valore del raggio Q_n, non minore di un dato V, riconosciuto necessario per la svolta della strada, avuto riguardo agli sterzi delle vetture e dei carri?

Per la eguaglianza (21) essendo $Q_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right) P$, dove P esprima la quantità $2\beta^2 \frac{A^2 B^2}{L^3}$ indipendente dall'n, il valore richiesto dovrà soddisfare le due relazioni

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) P > \text{ od } = V, \quad \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) P < V,$$

che equivalgono alle

$$1 + \frac{1}{n} > \text{ od } = \frac{V}{P}, \quad 1 + \frac{1}{n+1} < \frac{V}{P}$$

e però alle seguenti

$$n < \text{ od } = \frac{P}{V - P}, \quad \text{ed } n > \frac{P}{V - P} - 1,$$

le quali insegnano, che il numero intero, valore richiesto dall'n, dev'essere il più grande di quelli, che non saranno maggiori del $\frac{P}{V - P}$.

Osservazione. Evidentemente, il più piccolo valore del Q_n corrisponde al più grande dell'n cioè ad $\frac{1}{n} = 0$ ed è P ossia $2 \frac{A^2 B^2}{L^3} \beta^2$; ed il più grande corrisponde al più piccolo del numero n cioè ad $n = 2$ ed è $\frac{3}{2} P$, vale a dire *tre metà* dell'antecedente.

Proposizione decima.

Dato il punto di uno dei due tronchi rettilinei di una strada, nel quale si deve cominciare la sua svolta; trovare quello dell'altro tronco rettilineo di essa, nel quale si debba terminare la svolta, affinchè la sua massima incurvatura riesca minore di quella di ogni altra svolta determinabile analogamente?

La svolta si debba cominciare nel punto C del tronco rettilineo CD - - -; e si ritenga $EC = A$, sen.$E = \alpha$, cos.$E = \beta$; e chiamisi x la distanza dal punto E

al richiesto nel tronco AB - - -; e pongasi

$$x^2 + 2A\alpha x + A^2 = L^2, \quad \text{ed} \quad \frac{x^2}{L^3} = \varphi(x).$$

Essendo

$$Q_n = 2\beta^2\left(1 + \frac{1}{n}\right)A^2\varphi(x),$$

il punto richiesto corrisponderà al valore della x, che renderà massima

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{L^3}.$$

Facilmente si trovano

$$\varphi'(x) = \frac{x}{L^5}\xi(x), \quad \varphi''(x) = \left(\frac{x}{L^5}\right)'\xi(x) + \frac{x}{L^5}\xi'(x),$$

$$\text{dove } \xi(x) = 2A^2 + A\alpha x - x^2, \quad \text{e però } \xi'(x) = A\alpha - 2x.$$

Quindi il valore della x, corrispondente al punto richiesto, sarà quello soddisfacente la equazione

$$\xi(x) = 0 \quad \text{cioè la} \quad x^2 - A\alpha x - 2A^2 = 0,$$

la quale sciolta rispetto alla x, ed ommesso il valore negativo, dà

$$x = \frac{A}{2}\left(\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + 8)}\right).$$

Questo valore della x corrisponde effettivamente ad un massimo del Q_n, giacchè la medesima equazione $\xi(x) = 0$ riduce

$$\varphi''(x) = \frac{x}{L^5}\xi'(x) = -\frac{1}{L^5}(2A^2 + x^2)$$

quantità *negativa*; e somministra

$$\varphi = \frac{\psi(\alpha)}{3A\sqrt{6}} \quad \text{dove} \quad \psi(\alpha) = \left(\alpha + \sqrt{(\alpha^2 + 8)}\right)^2 : \left(2 + \alpha^2 + \alpha\sqrt{(\alpha^2 + 8)}\right)^{\frac{3}{2}};$$

per cui il minimo valore assoluto del Q_n sarà

$$\frac{A}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\psi(\alpha) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Corollario. Essendo $Q_n = \frac{A}{3}\left(1 + \frac{1}{n}\right)\psi(\alpha) \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$, risulta, che i valori del Q_n corrispondenti a diversi valori della A saranno a questi ordinatamente proporzionali; risultamento interessante, giacchè in generale neppure il punto C è individuato.

Osservazione I. Il valore della x dato dalla equazione $x^2 - A\alpha x - 2A^2 = 0$ o dalla sua equivalente $\left(x - \frac{1}{2}A\alpha\right)^2 = 2A^2 + \frac{1}{4}A^2\alpha^2$, si può determinare graficamente colla regola seguente.

Si faccia Ea (fig. 5) perpendicolare ed eguale alla EC, e dal punto b di mezzo della EC conducasi cd perpendicolare alla Ey ed eguale alla Ca; indi facciasi cf eguale alla Ed; e sarà Ef la x richiesta.

Di fatto, si ha $(Ef-fc)^2=(Ec)^2=(cd)^2+(Ed)^2=(aC)^2+(Eb)^2a^2$ cioè

$$(Ef-fc)^2 \text{ ossia } \left(Ef-\frac{1}{2}Aa\right)^2=2A^2+\frac{1}{4}A^2a^2$$

e conseguentemente Ef *eguale* appunto alla x.

Osservazione II. Se la retta Ef ossia l'x risultasse minore del prolungamento della BA cioè di B, converrebbe terminare la svolta nello stesso termine A del tronco rettilineo AB - - -.

Proposizione undicesima.

Trovare quella svolta AMC (fig. 6) parabolica della strada ---$BAMCD$---, che è tangente ai tronchi rettilinei AB - - -, CD - - - nei punti dati A, C?

La parabola si riferisca agli assi Ex - - -, Ey - - -; e si rappresenti colla equazione

$$(24) \text{ - - - } (y+Ex)^2+2Fy+2Gx-H=0:$$

si debbano determinare i coefficienti E, F, G, H in modo, che essa riesca tangente agli assi Ex - - -, Ey - - - nei punti C, A.

La equazione derivata esatta della (24) evidentemente è la

$$(25) \text{ - - - } (y+Ex)(y'+Ex')+Fy'+Gx'=0,$$

qualunque sia la variabile principale.

Nelle equazioni (24), (25) si pongano i valori delle x, y, y' corrispondenti al punto C, cioè vi si faccia $x=A$, $y=0$, $y'=0$; e si avranno le due

$$A^2E^2+2AG-H=0, \quad AE^2+G=0:$$

nelle stesse (24), (25) si faccia anco $x=0$, $y=B$, $x'=0$, che sono i valori delle x, y, x' corrispondenti al punto A; e si avranno le

$$B^2+2BF-H=0, \quad B+F=0.$$

Queste quattro equazioni ottenute, che rappresentano le proprietà pei coefficienti E, F, G, H, affinchè la parabola sia la richiesta, danno visibilmente

$$F=-B, \quad H=-B^2, \quad G=-\frac{B^2}{A}, \quad \text{ed } E=\pm\frac{B}{A};$$

e però la effettiva equazione della parabola stessa sarà

$$\left(y\pm\frac{B}{A}x\right)^2-2By-2\frac{B^2}{A}x+B^2=0$$

cioè la seguente

$$(26) \text{ - - - } (Ay-Bx)^2-2AB(Ay+Bx)+A^2B^2=0:$$

si è qui ommesso il segno *positivo* comparso pel coefficiente E, giacchè se esso si ritenesse, la equazione risultante esprimerebbe la retta - - - AC - - - e non la parabola.

Corollario. La equazione (26), essendo equivalente alla

$$(Bx-Ay+AB)^2=4B^2Ax,$$

si riduce facilmente alla $Bx-Ay+AB=2B\sqrt{Ax}$, ed anco alla seguente

$$\sqrt{Ay}+\sqrt{Bx}=\sqrt{AB};$$

e però la equazione fra le p, q, coordinate della retta - - - TQ - - -, tangente la svolta parabolica nel punto corrispondente alle x, y sarà

$$q\sqrt{Ax}+p\sqrt{By}=y\sqrt{Ax}+x\sqrt{By},$$

la quale dà

$$EQ=\frac{1}{B}(Bx+\sqrt{ABxy}), \text{ ed } AT=\frac{1}{A}(AB-Ay-\sqrt{ABxy}) \text{ ossia}$$

$$AT=\frac{1}{A}(Bx+\sqrt{ABxy});$$

giacchè dalla equazione

$$(\sqrt{Bx}+\sqrt{Ay})^2=AB$$

della parabola emerge

$$AB-Ay-\sqrt{ABxy}=Bx+\sqrt{ABxy}.$$

Quindi avrassi

$$EQ:AT=\frac{1}{B}:\frac{1}{A}=A:B.$$

Similmente, si dimostra che sta

$$MT:QT=AT:AE=EQ:EC.$$

Osservazione I. Da queste ultime due proprietà della parabola si desume facilmente, come caso particolare, la regola seguente per trovare più punti della attuale svolta parabolica di una strada.

Si trovi 1 (fig. 7) punto di mezzo della retta EA ed il 2 punto di mezzo della EC; indi il 3 di mezzo della retta 12, e questo sarà un punto della svolta, anzi un punto di contatto di essa colla retta 12. Così si trovino 4, 5, 6, 7 punti di mezzo ordinatamente delle rette 13, 1A, 2C, 23, e poi gli 8, 9 di mezzo delle 45, 67, e questi saranno altri due punti della svolta, anzi saranno anche essi punti di contatto tra essa medesima e le rette 45, 67. Similmente procedendo, si potranno determinare quanti punti si vorranno della stessa svolta attuale.

Osservazione II. Paragonando la equazione (26) alla (7) si comprende, che la prima emerge dalla seconda col porre in questa *zero* in vece di $\frac{1}{n}$ cioè col farvi n infinito; e però la parabola contemplata in questa proposizione sarà l'ultima della serie di quelle contemplate nella proposizione quarta, ritenuta per prima di quelle la corrispondente all' $n=2$ cioè quella rappresentata colla equazione

$$(27) - - - (Bx-Ay)^2 - 3AB(Ay+Bx) + 2A^2B^2 = 0,$$

la quale si ha col porre $n=2$ nella stessa (7). Dimodochè, tutte le svolte parabolichè, ottenibili colla regola esposta al principio di questa Nota, saranno tra mezzo a quelle appartenenti alle parabole rappresentate colle equazioni (26), (27).

Osservazione III. Siccome la svolta rappresentata colla equazione (26) è il caso di $\frac{1}{n}=0$ di quella rappresentata colla (7); così, credo superflua la esposizione delle proprietà della prima, giacchè si possono desumere immediatamente dalle analoghe della seconda, col porre *zero* in vece di $\frac{1}{n}$: non voglio ommettere però la relazione seguente, che è utile ed anco singolare.

Il minimo raggio di curvatura di quella parabola, che è rappresentata colla equazione (26), si chiami P: essendo P il valore di

$$Q_n = 2\frac{A^2B^2}{L^3}\left(1+\frac{1}{n}\right)\beta^2$$

corrispondente ad $\frac{1}{n}=0$, si avrà $P=2\frac{A^2B^2}{L^3}\beta^2$; e però sarà

$$Q_n = P + \frac{1}{n}P,$$

cioè il minimo raggio di curvatura della parabola, descritta in parte col segare le rette EA, EC ciascuna in n parti eguali, sarà eguale al P, minimo raggio dell'ultima parabola contemplata, *più* la *n esima* parte di questo medesimo raggio.

Osservazione IV. Talvolta, sia per la posizione dei tronchi AB---, CD--- della strada o per quella dei semplici loro termini A, C, ovvero pel numero n, il vertice della parabola, della quale dev' essere parte la svolta della strada, non risulta nella svolta medesima; e però reputo interessante la seguente proposizione.

Proposizione dodicesima.

Quali sono le condizioni o proprietà, che si debbono verificare, affinchè il vertice della parabola, alla quale appartiene la svolta della strada sia nella svolta medesima?

Comincio col caso di $\frac{1}{n}=0$, cioè dalla svolta contemplata nella proposizione antecedente.

Dalle equazioni (22), (23) si hanno pel vertice di questa parabola

$$x=\frac{A}{L^4}(B^2+AB\alpha)^2, \quad y=\frac{B}{L^4}(A^2+AB\alpha)^2;$$

ma affinchè il vertice cada effettivamente nella svolta, dev'essere $x<A$ ed $y<B$; adunque dovranno essere soddisfatte le due relazioni seguenti

$$\frac{A}{L^4}(B^2+AB\alpha)^2<A, \quad \frac{B}{L^4}(A^2+AB\alpha)^2<B,$$

ossia le

$$B^2+AB\alpha<A^2+2AB\alpha+B^2,$$

$$A^2+AB\alpha<A^2+2AB\alpha+B^2;$$

cioè dovrà essere $A+B\alpha>0$ ed anco $B+A\alpha>0$: condizioni, le quali avranno sempre luogo, quando l'angolo E sia acuto o retto.

Pel caso della parabola rappresentata colla equazione (7), essendo per il vertice

$$x=\frac{A}{L^4}(B^2+AB\alpha)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{\frac{1}{4}A}{n(n+1)},$$

$$\text{ed} \quad y=\frac{B}{L^4}(A^2+AB\alpha)^2\left(1+\frac{1}{n}\right)-\frac{\frac{1}{4}B}{n(n+1)};$$

le due relazioni a soddisfarsi saranno evidentemente

$$(B^2+AB\alpha)^2<\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2L^4, \quad (A^2+AB\alpha)^2<\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2L^4,$$

le quali si riducono con facilità alle seguenti

$$2A(A+B\alpha)>\frac{1}{n}(B^2-A^2), \quad 2B(B+A\alpha)>\frac{1}{n}(A^2-B^2).$$

Osservazione I. Mancando le condizioni qui esposte, il vertice della parabola, alla quale apparterrà la svolta della strada, non sarà nella svolta medesima; e però il minimo valore del raggio R, interessante in tal caso, corrisponderà all'uno od all'altro termine della svolta stessa; e conseguentemente esso si avrà, facendo $t=0$ ovvero $t=n$ nella espressione

$$(Ht^2-2Mt+N)^{\frac{3}{2}}:4bc\beta,$$

trovata nella proposizione ottava.

In questo caso medesimo riesciranno utili manifestamente le proprietà esposte nei due primi corollari della proposizione quinta.

Osservazione II. Quando il minimo raggio di curvatura di quella svolta parabolica di una strada, che è tangente nei suoi estremi ai due tronchi rettilinei della strada medesima fosse per riescire sufficientemente grande per le voltate

delle vetture, essa si dovrebbe preferire all' altra, giacchè la strada risultante non avrebbe angolosità neppure ai termini della svolta; ma siccome la sua determinazione riesce assai più complicata dell' altra, cioè di quella indicata al principio di questa Nota, così molti pratici per questo unico motivo preferiscono quest' ultima ad essa; e pertanto utile può riescire per essi la seguente proposizione.

Proposizione tredicesima.

Trovare, colla regola esposta al principio di questa Nota, la svolta parabolica AMC (fig. 8) tangente ai tronchi rettilinei AB---, CD--- di una strada nei punti A, C?

Si conduca la retta ---$EWPT$--- pel punto P di mezzo della AC, e pel W comune ai prolungamenti delle BA, DC: si faccia WE eguale alla *n esima* parte della WP, e conducansi le EAb---, ECd---; indi si trovi la svolta, colla regola esposta al principio di questa Nota, dividendo le rette EA, EC in n parti eguali, e nella ipotesi che i due tronchi rettilinei, là chiamati AB---, CD---, siano qui gli Ab---, Cd---; e questa sarà la svolta richiesta, vale a dire parabolica e tangente nei punti A, C alle AB---, CD--- attuali tronchi rettilinei della strada.

Si compisca il parallelogrammo $EATC$.

Essendo $EW=\frac{1}{n}WP$, e $PT=EP$, si ha $WT=\frac{1}{n}(2n+1)WP$ e però

$$WT:WE=2n+1:1.$$

Ma evidentemente è $WT:WE=A$ ossia $EC:ER$; adunque sarà

$$EC:ER=2n+1:1 \quad \text{cioè} \quad ER=\frac{1}{2n+1}EC.$$

Così, per essere $WT:WE=CT$ ossia $EA:ES$ hassi pure

$$EA:ES=2n+1:1, \quad \text{e per tanto} \quad ES=\frac{1}{2n+1}EA.$$

Quindi, pel corollario primo della proposizione quinta, la parabola descritta colla regola dianzi indicata, sarà tangente alle rette RAB---, SCD--- nei loro punti A, C; e conseguentemente sarà dessa la richiesta.

Proposizione quattordicesima.

Trovare quel punto di uno dei due tronchi rettilinei di una strada, nel quale vi dovrà essere tangente quella svolta parabolica, che deve passare per un punto dato ed essere tangente all'altro tronco rettilineo in un punto pure dato?

Ritengo le denominazioni e la figura usate per la proposizione undicesima; e suppongo che, la svolta debba essere tangente in C al tronco CD---, e passare pel punto corrispondente alle coordinate $x=a$, $y=b$; e la soluzione

della proposizione si ridurrà a trovare il punto della retta EA---, ove dessa sarà toccata dalla svolta parabolica.

La distanza del punto richiesto dall'E si chiami z; e si sostituiscano a, b, z in vece delle x, y, B nella equazione

$$\sqrt{A}y+\sqrt{B}x=\sqrt{AB},$$

esposta nel corollario della proposizione undicesima; e si avrà la

$\sqrt{bA}+\sqrt{az}=\sqrt{Az}$, la quale dà $\sqrt{z}=\dfrac{\sqrt{Ab}}{\sqrt{A}-\sqrt{a}}$ e però $z=\dfrac{Ab}{(\sqrt{A}-\sqrt{a})^2}$.

Evidentemente, affinchè la svolta tocchi il tronco di strada AB---, dovendo essere $z>$ od $=B$, si dovrà verificare la relazione seguente

$$Ab>\text{ od }=B(\sqrt{A}-\sqrt{a})^2.$$

Proposizione quindicesima.

Trovare la svolta parabolica di una strada, la quale debba essere tangente ai due tronchi rettilinei della strada medesima, e passare per due punti dati?

Si chiamino a, b; a', b' le coordinate dei due punti dati, ed u, z le distanze dal punto E di quei due punti delle rette EC---, EA---, dove la svolta richiesta dovrà essere tangente a queste medesime due rette.

Nella medesima equazione

$$\sqrt{A}y+\sqrt{B}x-\sqrt{AB}=0,$$

esposta nel corollario della proposizione undicesima, si pongano separatamente u, z, a, b ed u, z, a', b' in luogo della quantità A, B, x, y; e si avranno le due

$$\sqrt{bu}+\sqrt{az}-\sqrt{uz}=0,$$

$$\sqrt{b'u}+\sqrt{a'z}-\sqrt{uz}=0$$

a soddisfarsi colle u, z richieste.

Eliminando $\sqrt{uz}$ da queste due equazioni, si ha la

$$(\sqrt{b'}-\sqrt{b})\sqrt{u}+(\sqrt{a'}-\sqrt{a})\sqrt{z}=0$$

$$\text{ossia}\quad \sqrt{u}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt{a'}}{\sqrt{b'}-\sqrt{b}}\sqrt{z},$$

la quale riduce la prima o l'equivalente

$$(\sqrt{a}-\sqrt{u})\sqrt{z}+\sqrt{b}\cdot\sqrt{u}=0 \text{ alla } \sqrt{ba'}-\sqrt{ab'}+(\sqrt{a}-\sqrt{a'})\sqrt{z}=0,$$

$$\text{che dà } \sqrt{z}=\frac{\sqrt{ab'}-\sqrt{a'b}}{\sqrt{a}-\sqrt{a'}};\ \text{ e però sarà } \sqrt{u}=\frac{\sqrt{ab'}-\sqrt{a'b}}{\sqrt{b'}-\sqrt{b}},$$

$$\text{cioè } u=\frac{1}{n^2}(n\sqrt{a}+m\sqrt{b})^2,\quad \text{e}\quad z=\frac{1}{m^2}(n\sqrt{a}+m\sqrt{b})^2,$$

dove $m=\sqrt{a}-\sqrt{a'}$, ed $n=\sqrt{b'}-\sqrt{b}$. Vale a dire, la svolta parabolica

richiesta sarà quella, la quale riescirà tangente alle rette EC---, EA--- nei punti aventi dal punto E distanze eguali ai valori delle u, z, qui trovati; e conseguentemente essa avrà per equazione

$$m\sqrt{y}+n\sqrt{x}=m\sqrt{b}+n\sqrt{a}.$$

Anco per questa proposizione, affinchè la svolta tocchi effettivamente i tronchi CD---, AB---, dovrà essere il valore della u non minore della A e quello della z non minore della B.

Proposizione sedicesima.

Fra le svolte paraboliche tangenti ai due tronchi rettilinei di una strada, trovare la perpendicolare ad una retta data, ed anco la tangente ad una retta pure data?

Sì l'una che l'altra svolta richiesta si terrà per conosciuta, quando si conosceranno i punti nei quali dovranno essere tangenti ai due tronchi rettilinei della strada.

Comincio a trovare la prima. Riportata la retta data, cioè quella alla quale dev'essere perpendicolare la svolta richiesta, ai soliti due assi, sia rappresentata colla equazione $q=ap+b$, dove p, q esprimono l'ascissa e l'ordinata di un punto qualunque di essa.

La equazione $\sqrt{Ay}+\sqrt{Bx}-\sqrt{AB}=0$ della parabola dà

$$y'=-\frac{B}{A}\sqrt{\frac{Ay}{Bx}};$$

ma affinchè la svolta sia perpendicolare alla retta data, dev' essere

$$1+a\alpha+(a+\alpha)y'=0,$$

e le x, y debbono soddisfare la equazione della retta medesima; adunque le x, y coordinate del punto comune alla parabola richiesta ed alla retta data, insieme ai parametri A, B soddisfaranno le tre equazioni seguenti

$$0=\sqrt{Ay}+\sqrt{Bx}-\sqrt{AB},$$

$$0=B(a+\alpha)\sqrt{Ay}-A(a\alpha+1)\sqrt{Bx},$$

$$0=y-ax-b.$$

Le prime due danno

$$\sqrt{Bx}=B(a+\alpha)\sqrt{AB}:\big((a+\alpha)B+A(a\alpha+1)\big),$$

$$\sqrt{By}=A(a\alpha+1)\sqrt{AB}:\big((a+\alpha)B+A(a\alpha+1)\big),$$

e però $x=B^2A(a+\alpha)^2:\big((a+\alpha)B+A(a\alpha+1)\big)^2,$

ed $y=A^2B(a\alpha+1)^2:\big((a+\alpha)B+A(a\alpha+1)\big)^2,$

valori i quali, sostituiti nella terza delle medesime equazioni, somministrano la

$$(28) \text{ - - - } (1+a\alpha)^2 BA^2 - a(a+\alpha)^2 AB^2 - b\left((a+\alpha)B + A(1+a\alpha)\right)^2 = 0,$$

che rappresenta la relazione necessaria dei soli parametri A, B, affinchè la parabola sia la richiesta; e con essa si potrà determinarne uno, purchè si conosca l'altro di essi medesimi; e quindi rimarrà individuata la svolta qui richiesta.

Passo a trovare la seconda, cioè quella che dev' essere tangente ad una retta data, la quale supporrò rappresentata colla equazione $cq + dp = cd$, dove c, d esprimono le parti degli assi delle p, q intercette tra essa e la origine delle medesime coordinate p, q.

Affinchè la svolta sia tangente a questa retta, dovrà essere $y' = -\frac{d}{c}$; e però le coordinate x, y del punto di contatto ed i parametri A, B dovranno insieme soddisfare le tre equazioni

$$\sqrt{Ay} + \sqrt{Bx} - \sqrt{AB} = 0, \quad cB\sqrt{Ay} - dA\sqrt{Bx} = 0, \quad cy + dx - cd = 0.$$

Le prime due di queste equazioni si possono desumere dalle due occorse pel caso antecedente, facendo $\alpha = 0$, ed $a = \frac{c}{d}$; e però si avrà immediatamente

$$x = A\left(\frac{Bc}{Bc + Ad}\right)^2, \quad y = B\left(\frac{Ad}{cB + Ad}\right)^2;$$

e questi valori delle x, y riducono la terza delle medesime equazioni alla

$$AB - Ad - Bc = 0,$$

colla quale si potrà determinare uno dei parametri A, B, purchè si conosca l'altro; e dà $Bc + Ad = AB$, per cui si hanno

$$x = \frac{c^2}{A}, \quad y = \frac{d^2}{B}$$

per coordinate del punto di contatto.

Evidentemente questi risultamenti si possono avere immediatamente colle proprietà della parabola esposte nel corollario della proposizione undicesima.

Osservazione. Se la svolta, che dev'essere perpendicolare alla retta rappresentata colla equazione $q = ap + b$, lo dovesse essere nel punto corrispondente alla ascissa $p = h$, i parametri A, B dovrebbero soddisfare, oltre la equazione (28), anco la

$$h = (a+\alpha)^2 AB^2 : \left((a+\alpha)B + A(a\alpha+1)\right)^2,$$

cioè, posto $ah + b = k$, essi dovrebbero soddisfare questa e la seguente

$$k = (a\alpha+1)^2 BA^2 : \left((a+\alpha)B + A(a\alpha+1)\right)^2,$$

le quali danno facilmente

$$A = \frac{h}{k}\left(1 + \frac{k(a+\alpha)}{h(a\alpha+1)}\right)^2, \quad \text{e} \quad B = k\left(1 + \frac{h(a\alpha+1)}{k(a+\alpha)}\right)^2.$$

Così, se la svolta, che dev'essere tangente alla retta avente per equazione $cq+dp=cd$, il dovesse essere nel punto corrispondente ad una data ascissa $p=g$, i parametri A, B per essa dovrebbero soddisfare le equazioni

$$\frac{c^2}{A}=g,\quad \frac{d^2}{B}=\frac{d}{c}(c-g),$$

le quali somministrerebbero $A=\frac{c^2}{g}$, $B=\frac{cd}{c-g}$.

Quando poi la svolta dovesse in vece essere tangente anco alla retta segante gli assi delle p, q alle distanze c_1, d_1 dalla origine, i parametri si avrebbero, sciogliendo le due equazioni

$$AB-Ad-Bc=0,\quad AB-Ad_1-Bc_1=0;$$

e le coordinate dei punti di contatto sarebbero evidentemente le

$$\frac{c^2}{A},\ \frac{d^2}{B};\ \frac{c_1^2}{A},\ \frac{d_1^2}{B}.$$

Proposizione diciassettesima.

Trovare i cigli della strada svolta contemplata nella proposizione undicesima, supposto essi paralleli alla parabola là considerata ed anco equidistanti da essa medesima?

Nella equazione (26) si ponga $x=A\theta^2$, ove θ esprime una indeterminata; e si avrà

$$(Ay-AB\theta^2-AB)^2-4A^2B^2\theta^2=0,$$

cioè $y=B(\theta-1)^2$; e però la parabola rappresentata colla equazione (26) si potrà rappresentare anco colle due

$$x=A\theta^2,\quad y=B(\theta-1)^2,$$

dove θ esprima una quantità da eliminarsi, che si terrà per la variabile principale.

La distanza di ogni ciglio, dalla parabola anzidetta, si chiami d; e chiaminsi v, u le coordinate rettangole del punto, al quale corrispondono le x, y in generale obblique, e p, q le coordinate rettangole dei cigli e corrispondenti alle stesse v, u.

La teorica delle linee parallele dà

$$p=v\mp\frac{du'}{\sqrt{(v'^2+u'^2)}},\quad q=u\pm\frac{dv'}{\sqrt{(v'^2+u'^2)}}.$$

Essendo $x=A\theta^2$, $y=B(\theta-1)^2$ e però $x'=2A\theta$, $y'=2B(\theta-1)$, e $v=x+\alpha y$, $u=\beta y$ per cui $v'=x'+\alpha y'$, $u'=\beta y'$ ossia

$$v'=2(A\theta+B\alpha\theta-B\alpha),\ \text{ed}\ u'=2\beta B(\theta-1),$$

evidentemente si hanno

$$p = A\theta^2 + \alpha B(\theta - 1)^2 \mp \beta B(\theta - 1)\, d : \sqrt{(L^2\theta^2 - 2H^2\theta + B^2)},$$

$$q = \beta B(\theta - 1)^2 \pm (A\theta + \alpha B\theta - B\alpha)\, d : \sqrt{(L^2\theta^2 - 2H^2\theta + B^2)},$$

dove $L^2 = A^2 + 2\alpha AB + B^2$ come altrove, ed $H^2 = B(B + A\alpha)$.

Osservazione. Colle qui trovate espressioni delle p, q si potranno determinare facilmente quanti punti si vorranno dei cigli della strada, svolta di cui si parla; giacchè essi corrisponderanno ai valori delle p, q, ottenibili coll'individuare la θ; ed anco si potranno istituire altre ricerche relative ai cigli stessi, per esempio che tra essi si possa movere con moto uniforme ordinario un carro comune sterzato convenientemente.

OSSERVAZIONE PRIMA.

Quando i due tronchi rettilinei della strada a raccordarsi siano situati come i due AB - - -, CD - - - (fig. 9), la svolta si suole fare composta di due archi parabolici CM, MA tangenti l'uno all'altro in M, ed anco, il primo tangente in C alla retta CD ed il secondo alla AB nel punto A; dimodochè, individuato il punto M e la direzione comune ai due tronchi CM, MA o della strada in questo medesimo punto, qualora già non lo sia, come accade quasi sempre, si determineranno le parti CM, MA della svolta colle stesse regole esposte in questa nota medesima.

OSSERVAZIONE SECONDA.

Sarebbe utile la conoscenza di quella linea svolta di una strada tangente ai due tronchi rettilinei in due punti di essi, che rendesse *minimo* lo sforzo delle bestie conducenti un carro od una vettura da una estremità all'altra di essa medesima, per cui mi era proposto di trattarne in questa osservazione; ma siccome le forze passive a contemplarsi per un carro in moto e sterzato cambiano colla sua costruzione, ed i risultamenti riescono complicati assai; così ho divisato di limitarmi al brevissimo cenno seguente, ove contemplo le varie forze passive in un modo puramente complessivo.

La curva CMA (fig. 10) tangente nei punti C, A alle rette CD ---, AB --- rappresenti la svolta della strada, e le rette MG, GF, HL, PQ rappresentino la spina asse del carro, il timone, e le due sale del carro sterzato dell'angolo FGN convenientemente alla svolta ed al moto di esso: la retta MGN perpendicolare alla PQ sarà tangente costantemente alla curva CMA nel suo punto M, e però la PQ - - - normale della curva o svolta stessa.

Si chiamino, x, y le coordinate rettangole del punto M della svolta; F lo sforzo diretto secondo GF - - - e necessario per conservare al carro il moto uniforme conveniente per esso, esclusa però quella parte di sforzo, che occor-

rerà naturalmente pei differenti gradi di sterzo, la quale si supporrà la stessa almeno pei piccioli, qualunque sia per essere la natura della linea continua CMA: A quella porzione costante dello sforzo F, che è necessaria pel moto della parte HLF del carro, avuto riguardo a tutte le forze passive; e B lo sforzo pure costante per movere la rimanente parte del carro e diretto secondo MGN, mentre lo A è diretto secondo GF.

In ultimo, avverto che supporrò K, punto comune ai prolungamenti delle rette PQ, HL, il centro della circonferenza osculatrice alla curva CMA in M, e gli sforzi, che di mano in mano occorrono per conservare il suddetto movimento uniforme, proporzionali agli archi corrispondenti della linea CMA medesima; e che porrò a invece di MG, ed R invece di MK.

Essendo A la porzione della sforzo F necessaria per mantenere il moto nella parte anteriore del carro, sarà $F-A$ e propriamente la

$$(F-A)\cos.NGF=(F-A)\cos.k=(F-A)\frac{R}{\sqrt{(R^2+a^2)}}$$

sua componente secondo GN quella, che manterrà lo stesso moto nella rimanente parte del carro medesimo, e conseguentemente avrassi

$$(F-A)\frac{R}{\sqrt{(R^2+a^2)}}=B \quad \text{cioè} \quad F=A+B\sqrt{\left(1+\frac{a^2}{R^2}\right)},$$

$$\text{od anco} \quad F=A+B\sqrt{\left(1+\frac{a^2y''^2}{(1+y'^2)^3}\right)}.$$

Ma lo sforzo totale per condurre il carro dal punto C all'A è la primitiva

$$\int F\sqrt{(1+y'^2)}\,dx$$

estesa fra questi medesimi due punti; adunque la linea richiesta sarà quella, per la quale riescirà minima la primitiva di

$$A\sqrt{(1+y'^2)}+B\sqrt{\left(1+y'^2+\frac{a^2y''^2}{(1+y'^2)^2}\right)},$$

estesa anch'essa dal termine C all'A; e che sarà tangente le rette CD - - -, AB - - - in questi medesimi due punti.

PARTE SECONDA

Seguono tre Capitoli che terminano la prima Sezione del Trattato SUL CALCOLO DEGLI INTEGRALI DEFINITI (*Vedi Fascicolo I.° del Tomo II.° pag.* 105)

CAPO XVI.

Uso dell' immaginario.

151. In tutti gli antecedenti capitoli avrà il lettore notato uno studio particolare di evitare l'uso dell'immaginario: e se pure si rammenterà qualche passo in cui venne adoperato, si rammenterà insieme indicato il modo col quale poteasi farne senza. Questa ritrosia non è priva di ragione, perchè a molti assurdi può condurre l'immaginario quando non s'impieghi con somma cautela: epperò dopo Laplace ebbe a dire il sig. Lacroix (*) essere lecito servirsene come mezzo di ricerca, ma i risultati con esso ottenuti abbisognare di conferma. Giustissima è una tale sentenza: vada innanzi il metodo fondato sull'immaginario quasi un esploratore, e ci sarà di molto vantaggio, essendo facile immaginare un modo esatto di dimostrazione quando già sappiasi lo scopo a cui è diretto. Io, come dissi, mi conformai di già a questa sentenza: e lo farò anche nel presente capitolo appositamente scritto per trattare più in largo un così interessante argomento.

Ora qui sulle prime dirò che in due diverse maniere trovo usato l'immaginario per la ricerca dei valori degli integrali definiti: la prima è quella che lo introduce nelle costanti indeterminate di cui le formole sono composte: ed è poi la seconda che lo fa comparire anche nei limiti dell'integrale, e ne intacca la stessa variabile. Entrambe soggiacciono a non lievi difficoltà, la seconda però assai più della prima: quindi è che riserbando il resto a miglior tempo, non farò in questo capo parola che di quel metodo il quale fornisce nuove formole d'integrali definiti rendendo immaginarie alcune costanti.

152. A giustificare quanto ho detto circa la facilità di cadere in errore quando si fanno immaginarie le costanti nelle formole integrali basterà provare con esempj la seguente proposizione. *L'immaginario senza avvertirci c'induce talvolta a credere sussistenti certe condizioni che pur sono sciolte, e tal altra non ci avvisa dell'introduzione di qualche condizione che pur è necessaria.*

Per convincerci della prima parte della proposizione osservisi la formola

$$\int_0^\infty dx \cdot e^{-(b-a)x} = \frac{1}{b-a}$$

dove a, b sono quantità reali positive, e che subito si dimostra partendo dalla formola d'integrale indefinito

$$\int dx \cdot e^{-(b-a)x} = -\frac{e^{-(b-a)x}}{b-a}.$$

È qui evidente la condizione $a < b$, perchè altrimenti nella definizione dell'integrale il termine $-\frac{e^{-(b-a)\infty}}{b-a}$ invece di essere zero sarebbe infinito.

(*) *Traité du Calcul.* T. III, pag. 489.

Se ora pongasi $a\sqrt{-1}$ per a avremo

$$\int_0^\infty dx \cdot e^{-bx} \cdot e^{ax\sqrt{-1}} = \frac{1}{b - a\sqrt{-1}}$$

ossia

$$\int_0^\infty dx \cdot e^{-bx} \cos.ax + \sqrt{-1} \int_0^\infty dx \cdot e^{-bx} \sin.ax = \frac{b}{a^2+b^2} + \frac{a}{a^2+b^2}\sqrt{-1}$$

equazione da cui, paragonando a parte i termini moltiplicati per $\sqrt{-1}$, si hanno le formole (b) del num. 29. In tal processo analitico è facile indursi a credere che la condizione $a < b$ sussistente per la formola da cui siamo partiti si mantenga anche nelle formole (b) ora menzionate. Eppure così non è, come ognuno può persuadersi col metodo rigoroso del citato num. 29: nel passaggio dal reale all'immaginario la condizione si perde.

Viceversa dicemmo al num. 148 che la formola $(\mu\mu)$ potevasi prontamente avere dalla $(\varkappa\varkappa)$ ove si metta $k\sqrt{-1}$ per k: siccome dunque nella $(\varkappa\varkappa)$ k non ha restrizione, è troppo naturale il portarsi a credere che non l'abbia nemmeno nella $(\mu\mu)$. Eppure vedemmo, mediante un andamento di dimostrazione esatta, che nella $(\mu\mu)$ deve essere $k < 1$. Ecco una condizione, che usando il passaggio dal reale all'immaginario entra di nascosto, non avendone da quel metodo alcun sintomo.

153. Ad onta di tali pericoli sarebbe vero danno il rigettare dall'analisi un metodo il quale spesso ci conduce con somma rapidità a risultati che per altra via otteniamo assai lentamente. Già ne vedemmo un esempio nel numero precedente: eccone un altro. Sappiamo essere (num. 64 formola (α))

$$\int_0^\infty dx \cdot e^{-kx^m} x^{n-1} = \frac{1}{m k^{\frac{n}{m}}} \Gamma\left(\frac{n}{m}\right).$$

Facciasi immaginaria la costante k scrivendo per essa il binomio $b + a\sqrt{-1}$: si noti che $\frac{1}{b+a\sqrt{-1}} = \frac{b-a\sqrt{-1}}{a^2+b^2}$; avremo

$$\int_0^\infty dx \cdot e^{-bx^m} \cdot e^{-ax^m\sqrt{-1}} x^{n-1} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{m}\right)}{m} \cdot \frac{(b - a\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}}{(a^2+b^2)^{\frac{n}{m}}}.$$

Se nel primo membro mettasi $\cos.ax^m - \sqrt{-1} \cdot \sin.ax^m$ in luogo del fattore $e^{-ax^m\sqrt{-1}}$ e si osservi che l'espressione $(b - a\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}$ si può scomporre nella somma di due parti, l'una tutta reale e l'altra tutta moltiplicata per $\sqrt{-1}$, le quali parti sono

$$\frac{(b+a\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}} + (b-a\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}}{2}; \quad -\frac{(b+a\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}} - (b-a\sqrt{-1})^{\frac{n}{m}}}{2};$$

si otterranno prontamente dalla precedente le due formole (λ), (μ) che al num. 88 ci risultarono da calcoli non brevi.

154. Si sarà potuto capire dagli adotti esempj, che ogni formola a cui si applichi l'indicato artificio ne somministra due. Ecco, dietro la scorta del Legendre (*), come in tale maniera si giunga ad una formola importante e nuova.

La formola (π) del num. 91, ove pongasi kz per z, è

$$\int_0^\infty dz \cdot \frac{z^{\alpha-1}}{1+kz} = k^{-\alpha} \cdot \frac{\pi}{\sin.\alpha\pi}$$

colla condizione $\alpha < 1$.

Pongasi $k = \cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta$, dove l'angolo θ è una nuova costante indeterminata. Si rifletta alle due identità

$$\frac{1}{1+kz} = \frac{1+z\cos.\theta - \sqrt{-1}\cdot z\sin.\theta}{1+2z\cos.\theta+z^2}$$

$$k^{-\alpha} = \cos.\alpha\theta - \sqrt{-1}\cdot\sin.\alpha\theta;$$

e la solita scomposizione ci presenterà le due formole

$$\int_0^\infty dz \cdot \frac{z^{\alpha-1}(1+z\cos.\theta)}{1+2z\cos.\theta+z^2} = \frac{\pi}{\sin.\alpha\pi}\cos.\alpha\theta$$

$$(a) \qquad \int_0^\infty dz \cdot \frac{z^{\alpha}}{1+2z\cos.\theta+z^2} = \frac{\pi}{\sin.\alpha\pi} \cdot \frac{\sin.\alpha\theta}{\sin.\theta}.$$

Questa seconda, che sussiste colla condizione $\alpha < 1$, è quella che dicemmo degna di rimarco. Il Legendre vi trovò la proprietà che α può prendere il segno negativo, restando però sempre, astrazion fatta dal segno, minore dell'unità: talchè si ha anche

$$(b) \qquad \int_0^\infty dz \cdot \frac{z^{-\alpha}}{1+2z\cos.\theta+z^2} = \frac{\pi}{\sin.\alpha\pi} \cdot \frac{\sin.\alpha\theta}{\sin.\theta},$$

ove il secondo membro è come nella (a). La dimostrazione si fa speditamente trasformando nella (a) l'integrale col porre $z = \frac{1}{x}$.

Osserva altresì il suddetto geometra che delle due formole trovate insieme coll'uso dell'immaginario la compagna della (a) può da essa dedursi, talmente che in questo caso una sola è la formola meritevole d'attenzione. Infatti si cangi nella (a) α in $\alpha - 1$, che è quantità negativa minore di 1, astrazione fatta dal segno; il cangiamento è lecito a motivo della (b). L'equazione risultante si sommi colla (a) moltiplicata per $\cos.\theta$, e sortirà la formola che precede la stessa (a).

Lo studioso che ama nelle formole maggiore generalità, può consultare il citato Autore nel luogo indicato.

155. Si sommino le due formole (a), (b), poi il corso della variabile da *zero* all'∞ si rompa nelle due parti da *zero* a 1, e da 1 all'∞; il secondo integrale si trasformi ponendo $z = \frac{1}{x}$, e si troverà anch'esso definito tra i limiti *zero*, 1.

(*) *Exercices de Calcul Integral.* P. IV, pag. 101.

Si dimostrerà così essere

$$\int_0^\infty dz \cdot \frac{z^\alpha + z^{-\alpha}}{1 + 2z\cos.\theta + z^2} = 2\int_0^1 dx \cdot \frac{x^\alpha + x^{-\alpha}}{1 + 2x\cos.\theta + x^2};$$

e in conseguenza

$$(c) \qquad \int_0^1 dx \cdot \frac{x^\alpha + x^{-\alpha}}{1 + 2x\cos.\theta + x^2} = \frac{\pi}{\sin.\alpha\pi} \cdot \frac{\sin.\alpha\theta}{\sin.\theta}$$

dove il secondo membro è ancora quello stesso delle formole (a), (b). Questa formola (c) può subito dedursi dalla $(\nu\nu)$ del num. 148, facendovi $n=1$, $m=\alpha$: e si noti che anche di là si desume la condizione $\alpha<1$. Abbiamo per tal modo relativamente alla formola (c) quella verificazione, che al num. 151 consigliammo di fare sui risultati ottenuti coll'uso dell'immaginario.

156. Riprendasi la formola (a) del num. 72: se in luogo della costante m si pone il binomio $\cos.\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\theta$, e si osservano le identità

$$\frac{1}{(\cos.\theta + \sqrt{-1}\cdot\sin.\theta)^2 + x^2} = \frac{\cos.2\theta + x^2 - \sin.2\theta\sqrt{-1}}{1 + 2\cos.2\theta x^2 + x^4}$$

$$\frac{e^{-r(\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta)}}{\cos.\theta + \sqrt{-1}\sin.\theta} = e^{-r\cos.\theta}\cos.(\theta + r\sin.\theta) - e^{-r\cos.\theta}\sin.(\theta + r\sin.\theta)\sqrt{-1}$$

si ottengono al solito le due formole

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{(\cos.2\theta + x^2)\cos.rx}{1 + 2\cos.2\theta x^2 + x^4} = \frac{\pi}{2} e^{-r\cos.\theta}\cos.(\theta + r\sin.\theta)$$

$$(d) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.rx}{1 + 2\cos.2\theta x^2 + x^4} = \frac{\pi}{2\sin.2\theta} \cdot e^{-r\cos.\theta}\sin.(\theta + r\sin.\theta).$$

Sottraggasi alla prima di queste la seconda moltiplicata per $\cos.2\theta$, e sortirà

$$(e) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{x^2\cos.rx}{1 + 2\cos.2\theta x^2 + x^4} = \frac{\pi}{2\sin.2\theta} \cdot e^{-r\cos.\theta}\sin.(\theta - r\sin.\theta)$$

che risulta anche dalla (d) derivata due volte per la costante r. Se nella (d) si pone $\theta = \frac{\pi}{4}$, la formola che ne risulta è la (x) del num. 79.

Similmente dalla (b) del num. 72 si cavano le due

$$(f) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{x\sin.rx}{1 + 2\cos.2\theta x^2 + x^4} = \frac{\pi}{2\sin.2\theta} e^{-r\cos.\theta}\sin.(r\sin.\theta)$$

$$(g) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{x^3\sin.rx}{1 + 2\cos.2\theta x^2 + x^4} = \frac{\pi}{2\sin.2\theta} e^{-r\cos.\theta}\sin.(2\theta - r\sin.\theta),$$

la prima delle quali per $\theta = \frac{\pi}{4}$ diventa la (u) del num. 79. La (g) risulta altresì dalla precedente derivata due volte per la costante r.

Le quattro formole (d), (e), (f), (g) sono di Legendre (*). Si è qui mostrato come le (e), (g) risultino dalle (d), (f) e come queste combinino in un caso particolare con due altre già ottenute senza l'uso dell'immaginario. Dimostrare senza l'uso dell'immaginario le formole generali (d), (f) per uniformarsi a quanto si è insinuato al num. 151, richiede un'analisi più lunga di quella del num. 79 ma in gran parte ad essa somigliante. L'ommettiamo per brevità, e ci accontentiamo di dire in conferma delle stesse formole che il sig. Poisson ha provato (**) potersi benissimo conservare tutto il calcolo con cui si dimostrano le formole (a), (b) del num. 72 anche nell'ipotesi di m immaginaria.

157. Il Legendre nel luogo citato fa vedere come possono aversi formole più generali delle surriferite, e ciò facendo similmente $m=\cos.\theta+\sqrt{-1}\sin.\theta$ nelle formole che danno i valori degli integrali

$$(h)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{\cos.rx}{(m^2+x^2)^k}\,;\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{x\sin.rx}{(m^2+x^2)^k}$$

e di cui le formole (a), (b) del num. 72 sono un caso particolare per $k=1$. Conviene pertanto cercare le espressioni equivalenti agli integrali (h) supposta k numero qualunque intero e positivo. A tale effetto pongansi

$$(i)\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{\cos.rx}{(m^2+x^2)^k}=\pi A_k\,;\qquad \int_0^\infty dx\cdot\frac{x\sin.rx}{(m^2+x^2)^k}=\pi B_k$$

e derivando per la costante m formeremo facilmente le due equazioni alle differenze miste

$$(j)\qquad A_{k+1}=-\frac{1}{2mk}\left(\frac{dA_k}{dm}\right);\qquad B_{k+1}=-\frac{1}{2mk}\left(\frac{dB_k}{dm}\right).$$

Tratteremo la prima di queste con un metodo analogo a quello tenuto al num. 97. Facciasi

$$(l)\qquad A_k=\frac{(-1)^{k+1}}{2^k\Gamma(k)}u_k$$

essendo u_k una funzione di k e di m da determinarsi: ci risulterà l'equazione

$$u_{k+1}=\frac{1}{m}(u_k)'$$

indicando ora e in seguito per tutto questo numero cogli apici le derivate per m. Troveremo colla continua sostituzione

$$u_k=\frac{1}{m}\left(\cdots\left(\frac{1}{m}\left(\frac{1}{m}(u_1)'\right)'\right)'\cdots\right)';$$

le indicate derivazioni per m sono di numero $k-1$. Questa stessa formola servirà a dare anche il valore di B_k desunto dalla seconda della (j). Si porrà poi

(*) *Exercices de Calcul Intégral.* P. III, pag. 359.
(**) *Journal de l'École Polyt.* Cah. XVIII, pag. 339.

per u_1 il valore dedotto dalla (l) ove per A_1 mettasi l'equivalente espressione $\frac{1}{2m} e^{-mr}$ data dalla (a) del num. 72: e operando similmente nel secondo caso, avremo le formole

$$(m) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.rx}{(m^2+x^2)^k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^k \Gamma(k)} \cdot \frac{1}{m} \left(- - - \left(\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} e^{-mr} \right)' \right)' \right)' - - - \right)'$$

$$(n) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{x \sin.rx}{(m^2+x^2)^k} = \frac{(-1)^{k+1}}{2^k \Gamma(k)} \cdot \frac{1}{m} \left(- - - \left(\frac{1}{m} \left(\frac{1}{m} \left(e^{-mr} \right)' \right)' \right)' - - - \right)'$$

ritenendo le indicate derivazioni per m di numero $k-1$. Non è sotto la precedente forma che i valori dei due integrali definiti in questione compajono nella citata opera. Dietro l'esame delle formole particolari pei valori 1, 2, 3 - - - di k conchiuse il Legendre per analogia le formole sviluppate generali: potrà il lettore consultarle, e gli gioverà ad erudizione.

158. Un artificio simile a quello spiegato ne' precedenti numeri potrà usarsi a fine di accrescere l'elenco delle altre formole integrali definite di cui ci siamo occupati nel Capo XIV. Pongasi $a+x\sqrt{-1}$ in luogo di x nella

$$\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot e^{-ix} = \frac{1}{e^x - 1}$$

del num. 147, la quale è di facilissima dimostrazione, e si avranno immediatamente le (d) del num. 126. Partendo dalle (r), (s), (t), (u) del num. 131, di forma somigliante a quella delle (a), (b) del num. 72 per integrali continui, e facendovi immaginaria la x, come in queste ultime si è fatto della m, si avranno nuovi risultati degnissimi di attenzione. Il numero delle nuove formole si accrescerà a piacimento adoperando in luogo delle (r), (s), (t), (u) formole più generali trovate con un metodo molto simile all'usato nel numero precedente.

CAPO XVII.

Uso degli integrali duplicati.

159. Accade alle volte che, proposto un integrale definito duplicato, si possa cominciando da una variabile fare sparire mediante l'uso di formole note uno dei due segni integrali, ma non il secondo: e invece cominciando dall'altra variabile si possano successivamente fare sparire entrambi i segni integrali. Si ha allora un integrale definito equivalente a una formola finita: questo è un artificio dovuto a Laplace, che riesce felicemente in certi casi difficili a trattarsi cogli altri metodi.

Vediamo primieramente come con questo mezzo si dimostra prontamente la formola (λ) del num. 32. Poniamo

$$z = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \cdot \sin.rx\, e^{-xy}.$$

S'incominci dall'integrazione per y, osservando la formola

$$(a) \qquad \int_0^\infty dy \cdot e^{-ny} = \frac{1}{n}$$

che subito si dimostra passando per l'integrale indefinito, ritenuta n quantità positiva. Avremo

$$z = \int_0^\infty dx \cdot \sin.rx \int_0^\infty dy \cdot e^{-xy} = \int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.rx}{x};$$

e non possiamo progredire, supponendo di non conoscere la formola che vogliamo dimostrare.

Ora s'incominci dall'integrazione per x: otterremo

$$z = \int_0^\infty dy \int_0^\infty dx \cdot e^{-xy} \sin.rx = \int_0^\infty dy \cdot \frac{r}{r^2+y^2}$$

a motivo della prima formola (b) del num. 29: e per essere

$$(b) \qquad \int_0^\infty dy \cdot \frac{r}{r^2+y^2} = \frac{\pi}{2};$$

come si prova passando per l'integrale indefinito, giusta quanto si disse anche al num. 76; abbiamo per z due valori, il cui confronto dà la formola in questione.

160. Laplace dimostrò pel primo con questo mezzo la formola (a) del numero 72 (*). Facciasi

$$z = \int_0^\infty dx \int_0^\infty dy \cdot 2\, e^{-y^2(m^2+x^2)}\, y \cos.rx.$$

S'incominci dall'integrazione per y, riflettendo che la formola

$$\int_0^\infty dy \cdot 2y\, e^{-y^2(m^2+x^2)} = \frac{1}{m^2+x^2}$$

si deduce subito dalla (a) col porre $y^2 = u$; avremo

$$z = \int_0^\infty dx \cdot \cos.rx \int_0^\infty dy \,.\, 2y\, e^{-y^2(m^2+x^2)} = \int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.rx}{m^2+x^2}.$$

Prendendo ora a rovescio le integrazioni, conviene scrivere

$$z = \int_0^\infty dy \cdot 2y\, e^{-m^2y^2} \int_0^\infty dx \cdot e^{-y^2x^2} \cos.rx.$$

L'integrale per x può eliminarsi mediante la formola (η) del num. 66 ove facciasi $a = y^2$, $b = r$; risulta

$$z = \sqrt{\pi} \int_0^\infty dy \cdot e^{-m^2y^2 - \frac{r^2}{4y^2}}.$$

(*) *Théorie analytique des Probabilités*. P. II, Chap. I, n. 26.

Presentemente richiamisi la formola (ε) del num. 83, e vi si ponga $x = my$, $a = \frac{mr}{2}$, dedurremo

$$\int_0^\infty dy \cdot e^{-m^2y^2 - \frac{r^2}{4y^2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2m} e^{-mr};$$

e in conseguenza dalla precedente, $z = \frac{\pi}{2m} e^{-mr}$. Il paragone dei due valori di z presenta il risultato desiderato.

161. È questo il luogo opportuno per discutere (siccome avevamo promesso al num. 35) un caso di eccezione in cui non è lecita negli integrali definiti duplicati l'inversione delle integrazioni, alla maniera praticata nei due numeri precedenti, conducendo essa a risultati differenti. Esaminiamo pertanto primieramente quale sia la dimostrazione che ci persuade lecita l'inversione di cui parliamo. Sia

$$(\gamma) \qquad \int_a^b dx \int_h^k dy \cdot f(x, y)$$

un integrale definito duplicato: poniamo

$$\frac{k-h}{m} = \theta; \quad \frac{b-a}{n} = \omega,$$

essendo m, n numeri interi che debbono essere successivamente ingranditi fino all'infinito. Avremo a motivo del principio esposto al num. 120

$$\int_h^k dy \cdot f(x, y) = \lim.\left\{\theta f(x, h) + \theta f(x, h+\theta) + \cdots + \theta f(x, k)\right\};$$

e integrando i due membri di questa equazione per x, e definendo l'integrazione fra i limiti a, b,

$$(\delta) \qquad \int_a^b dx \int_h^k dy \cdot f(x, y)$$

$$= \lim.\left\{\theta \int_a^b dx \cdot f(x, h) + \theta \int_a^b dx \cdot f(x, h+\theta) + \cdots + \theta \int_a^b dx \cdot f(x, k)\right\}.$$

Ora per lo stesso principio del num. 120

$$\int_a^b dx \cdot f(x, h) = \lim.\left\{\omega f(a, h) + \omega f(a+\omega, h) + \cdots + \omega f(b, h)\right\}$$

$$\int_a^b dx \cdot f(x, h+\theta) = \lim.\left\{\omega f(a, h+\theta) + \omega f(a+\omega, h+\theta) + \cdots + \omega f(b, h+\theta)\right\}$$

$$(\varepsilon) \quad \int_a^b dx \cdot f(x, h+2\theta) = \lim.\left\{\omega f(a, h+2\theta) + \omega f(a+\omega, h+2\theta) + \cdots + \omega f(b, h+2\theta)\right\}$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$\int_a^b dx \cdot f(x, k) = \lim.\left\{\omega f(a, k) + \omega f(a+\omega, k) + \cdots + \omega f(b, k)\right\}.$$

Fatte tutte le sostituzioni di questi valori (ε) nella precedente (δ), si trova che

l'integrale duplicato (γ) equivale al limite della somma di tutti i termini della serie doppia

$$(\zeta)\qquad \begin{array}{c} \omega\theta f(a,h)+\omega\theta f(a+\omega,h)+\cdots+\omega\theta f(b,h) \\ +\omega\theta f(a,h+\theta)+\omega\theta f(a+\omega,h+\theta)+\cdots+\omega\theta f(b,h+\theta) \\ +\omega\theta f(a,h+2\theta)+\omega\theta f(a+\omega,h+2\theta)+\cdots+\omega\theta f(b,h+2\theta) \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ +\omega\theta f(a,k)+\omega\theta f(a+\omega,k)+\cdots+\omega\theta f(b,k) \end{array}$$

la quale si stende all'infinito per due versi mentre ω, θ continuamente impiccioliscono accostandosi a zero.

Se avessimo preso in senso inverso le integrazioni, avremmo trovato l'integrale duplicato

$$(\eta)\qquad \int_h^k dy \int_a^b dx \cdot f(x,y)$$

equivalente al limite di una serie doppia fatta di termini identicamente eguali a quelli della precedente (ζ) e solamente scritti con diverso ordine. Adunque i due integrali duplicati (γ), (η) che sono limiti di una stessa quantità hanno eguali valori.

Si vede essenziale per l'antecedente dimostrazione che possa usarsi il principio del num. 120, ossia che possa considerarsi ogni integrale come limite della somma di una serie infinita. Richiamando pertanto la condizione indicata nel citato numero come necessaria perchè il principio sussista, stabiliremo il Teorema. « L'inversione delle integrazioni negli integrali duplicati, come (γ), « è lecita e conduce al medesimo risultato finale quando la funzione $f(x,y)$ « contenuta sotto il doppio segno non diventa infinita per nessuna combina- « zione di valori particolari delle variabili x, y compresi fra i quattro limiti « a, b; h, k. »

162. Per mostrare con un esempio la diversità del risultato finale quando non è adempiuta la condizione contenuta nel precedente teorema, prenderemo, dietro la scorta del sig. Cauchy (*), a calcolare il valore dell'integrale duplicato

$$(\vartheta)\qquad z=\int_{-\alpha}^{\alpha} dx \int_{-\beta}^{\beta} dy \cdot \frac{\sqrt{-1}}{(x+y\sqrt{-1})^2}$$

dove α, b, α, β esprimono quantità reali e positive; è evidente che fra i quattro limiti vi è la combinazione dei valori particolari $x=0$, $y=0$ che rende infinita la funzione sottoposta al doppio segno.

Cominciando dall'integrazione per y ed osservando essere

$$\int dy \cdot \frac{\sqrt{-1}}{(x+y\sqrt{-1})^2}=-\frac{1}{x+y\sqrt{-1}}=-\frac{x-y\sqrt{-1}}{x^2+y^2};$$

(*) *Exercices de mathématiques*. Tom. I, pag. 85.

viene

$$z = \sqrt{-1}\int_{-\alpha}^{\alpha} dx \cdot \left(\frac{b}{x^2+b^2} + \frac{\beta}{x^2+\beta^2}\right) + \int_{-\alpha}^{\alpha} dx \cdot \left(\frac{x}{x^2+\beta^2} - \frac{x}{x^2+b^2}\right).$$

Abbiamo gl' integrali indefiniti

$$\int dx \cdot \left(\frac{b}{x^2+b^2} + \frac{\beta}{x^2+\beta^2}\right) = \text{Arc.tan.}\frac{x}{b} + \text{Arc.tan.}\frac{x}{\beta}$$

$$\int dx \cdot \left(\frac{x}{x^2+\beta^2} - \frac{x}{x^2+b^2}\right) = \frac{1}{2}\log.\frac{x^2+\beta^2}{x^2+b^2}.$$

e in conseguenza

$$(\iota) \qquad z = \sqrt{-1}\left\{\text{Arc.tan.}\frac{a}{b} + \text{Arc.tan.}\frac{a}{\beta} + \text{Arc.tan.}\frac{\alpha}{b} + \text{Arc.tan.}\frac{\alpha}{\beta}\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\log.\frac{(a^2+\beta^2)(\alpha^2+b^2)}{(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)}.$$

Ora prenderemo le integrazioni a rovescio e ponendo

$$(\varkappa) \qquad u = \int_{-\beta}^{b} dy \int_{-\alpha}^{\alpha} dx \cdot \frac{\sqrt{-1}}{(x+y\sqrt{-1})^2},$$

osserveremo prima essere

$$\int dx \cdot \frac{\sqrt{-1}}{(x+y\sqrt{-1})^2} = -\frac{\sqrt{-1}}{x+y\sqrt{-1}} = -\frac{x\sqrt{-1}+y}{x^2+y^2}$$

e quindi aversi

$$u = -\sqrt{-1}\int_{-\beta}^{b} dy \cdot \left(\frac{a}{a^2+y^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}\right) + \int_{-\beta}^{b} dy \cdot \left(\frac{y}{\alpha^2+y^2} - \frac{y}{a^2+y^2}\right).$$

Qui pure noteremo gl' integrali indefiniti

$$\int dy \cdot \left(\frac{a}{a^2+y^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2+y^2}\right) = \text{Arc.tan.}\frac{y}{a} + \text{Arc.tan.}\frac{y}{\alpha}$$

$$\int dy \cdot \left(\frac{y}{\alpha^2+y^2} - \frac{y}{a^2+y^2}\right) = \frac{1}{2}\log.\frac{\alpha^2+y^2}{a^2+y^2}$$

e quindi otterremo

$$(\lambda) \qquad u = -\sqrt{-1}\left\{\text{Arc.tan.}\frac{b}{a} + \text{Arc.tan.}\frac{b}{\alpha} + \text{Arc.tan.}\frac{\beta}{a} + \text{Arc.tan.}\frac{\beta}{\alpha}\right\}$$
$$+ \frac{1}{2}\log.\frac{(\alpha^2+b^2)(a^2+\beta^2)}{(a^2+b^2)(\alpha^2+\beta^2)}.$$

Confrontando le (ι), (λ) si scorge che i due valori di z, u sono diversi relativamente alla prima parte moltiplicata per $\sqrt{-1}$, il che è quanto voleasi provare. La differenza $z - u$ prende un valore molto semplice a motivo della formola generale

$$\text{Arc.tan.}\frac{A}{B} + \text{Arc.tan.}\frac{B}{A} = \frac{\pi}{2}$$

che prontamente si dimostra riducendo i due archi ad un solo mediante un teorema noto e riferito al num. 31; l'applicazione di tal formola ha luogo quattro volte sopra il valore di $z-u$ che risulta di otto termini tutti moltiplicati per $\sqrt{-1}$: tal valore diventa così $2\pi\sqrt{-1}$.

Risostituendo a z, u gl'integrali duplicati che ne sono rappresentati (equazioni $(\mathfrak{Z})$, $(\varkappa)$) e dividendo per $\sqrt{-1}$, si forma l'equazione rimarcabile

$$(\mu) \qquad \int_{-\alpha}^{a} dx \int_{-\beta}^{b} dy \cdot \frac{1}{(x+y\sqrt{-1})^2} - \int_{-\beta}^{b} dy \int_{-\alpha}^{a} dx \cdot \frac{1}{(x+y\sqrt{-1})^2} = 2\pi.$$

Ognuno avrebbe ritenuto zero il secondo membro di tale equazione prima della preziosa osservazione che abbiamo riferita e che è dovuta al sig. Cauchy. Questa eccezione divenne poi per opera dello stesso Geometra base di una teorica assai interessante, come mostreremo nella Seconda Sezione di questo Trattato.

163. L'uso degli integrali duplicati per la ricerca dei valori degli integrali definiti si combina talvolta colla teorica della trasformazione degli stessi integrali, che richiamiamo in poche parole. Quando un integrale duplicato $\int dx \int dy \cdot V(x, y)$ si vuol trasformare per due altre variabili u, t usando due equazioni note

$$(\nu) \qquad x = \varphi(u, t), \qquad y = \psi(u, t);$$

si sostituiscono nella $V(x, y)$ ad x, y i precedenti valori; e tutta la funzione si moltiplica pel binomio differenziale

$$(\xi) \qquad \frac{dx}{du} \cdot \frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dy}{du}$$

preso sempre col segno positivo.

Ciò per la trasformazione degli integrali duplicati indefiniti. Se questi sono definiti, ed a, b sono i limiti di x; α, β quelli di y: per applicare i limiti convenienti alle nuove variabili u, t nell'integrale trasformato, bisogna prendere le equazioni inverse delle (ν)

$$(o) \qquad u = \phi(x, y); \qquad t = \phi_1(x, y)$$

e vedere qual è il più piccolo e il più gran valore che può assumere tanto la u che la t considerando simultaneamente i due corsi delle x, y fra i limiti primieramente assegnati e notando le combinazioni de' loro valori più favorevoli per la maggior depressione o pel maggiore aumento del valore composto: gli esempj schiariranno questo discorso.

Vogliasi il valore dell'integrale definito (*)

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{1}{1+x^n}$$

essendo n quantità reale positiva. Pongasi

(*) Lacroix: *Traité du Calcul*. Tom. III, pag. 484, n.° 1205.

$$z=\int_0^\infty dx\int_0^\infty dy\cdot e^{-y(1+x^n)};$$

può eseguirsi l'integrazione per y (veggasi più sopra, formola (α)): otteniamo così

$$z=\int_0^\infty dx\cdot\frac{1}{1+x^n}.$$

Ora si dovrebbero prendere a rovescio le due integrazioni ed effettuarle una dopo l'altra, come si è fatto negli esempj dei numeri 159, 160. Ciò non essendo facile, si trasforma l'integrale duplicato ponendo

$$x=\frac{t}{u},\quad y=u^n;$$

sono queste le due equazioni corrispondenti alle (ν). La

$$V=e^{-y(1+x^n)}$$

diventa nel nostro caso

$$V=e^{-u^n-t^n},$$

il fattore (ξ) si trova nu^{n-2}; e così l'integral doppio trasformato indefinito è

$$\int du\int dt\cdot n\,e^{-u^n-t^n}u^{n-2}.$$

Per sapere presentemente quali limiti applicare alle nuove variabili, convien cercare le equazioni inverse corrispondenti alle (o): queste sono

$$u=y^{\frac{1}{n}},\quad t=xy^{\frac{1}{n}}$$

da cui si vede che dando ad x, y valori da zero all'infinito, i valori di u, t non possono discendere al di sotto di zero, e possono salire fino all'infinito; perciò i limiti delle nuove variabili sono ancora *zero* e l'infinito, e si ha

$$z=n\int_0^\infty du\cdot e^{-u^n}u^{n-2}\int_0^\infty dt\cdot e^{-t^n}.$$

Questo integrale duplicato è di tal natura che può considerarsi come il prodotto di due integrali definiti semplici. Richiamata la formola (α) del Capo IX, ne deduciamo

$$z=\frac{1}{n}\Gamma\left(\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

ossia per la formola (l) del Capo VIII,

$$z=\frac{\pi}{n\sin.\frac{\pi}{n}}.$$

Pertanto dal confronto dei due valori di z

$$\int_0^\infty dx\cdot\frac{1}{1+x^n}=\frac{\pi}{n\sin.\frac{\pi}{n}}$$

che è un caso particolare della (ρ) del Capo XI. Può consultarsi per erudizione (*) con quali lunghe e laboriose operazioni si pervenne dapprima a questa formola.

164. Appartiene a questa trasformazione degli integrali definiti duplicati una bella analisi del sig. Poisson (**) mediante la quale si ha la dimostrazione generale della formola di relazione fra gl'integrali Euleriani di prima e seconda specie; ed è quella di cui facemmo anticipatamente cenno al num. 61 (formola (z) del Capo VIII).

Abbiamo per la definizione della funzione *gamma* le due equazioni

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty dx\cdot e^{-x}x^{p-1};\quad \Gamma(q)=\int_0^\infty dy\cdot e^{-y}y^{q-1}.$$

Il prodotto di queste può scriversi

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\int_0^\infty dx\int_0^\infty dy\cdot e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}$$

considerando il secondo membro come un integrale duplicato per la stessa ragione che avemmo nel numero precedente di considerare un integrale duplicato come il prodotto di due integrali semplici.

Si trasformi tale integrale duplicato usando le due equazioni

$$x=\frac{u}{1+t},\quad y=\frac{ut}{1+t}$$

che corrispondono alle precedenti (ν); avremo

$$V=e^{-x-y}x^{p-1}y^{q-1}=e^{-u}\frac{u^{p+q-2}t^{q-1}}{(1+t)^{p+q-2}}.$$

Il fattore (ξ) risulterà dopo alcune operazioni $\frac{u}{(1+t)^2}$: quindi avremo l'integrale trasformato indefinito

$$\int du\int dt\cdot e^{-u}\frac{u^{p+q-1}t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}.$$

A sapere i limiti da assegnarsi a queste nuove variabili, cerchiamo le equazioni inverse corrispondenti alle (o): queste sono

$$u=x+y;\quad t=\frac{y}{x},$$

dalle quali si scorge che dando a x, y valori da zero all'infinito, possono i valori di u, t discendere fino a zero ma non mai al di sotto, e possono salire all'infinito. Adunque anche qui i limiti delle nuove integrazioni restano lo zero

(*) Lacroix: *Traité du Calcul*. T. III, pag. 418 et suiv.
(**) *Journal Polyt.* Cah. XIX, pag. 477.

e l'infinito, e si ha

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\int_0^\infty du\int_0^\infty dt\cdot e^{-u}\frac{u^{p+q-1}\,t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}$$

che può scriversi

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=\int_0^\infty dt\cdot\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}\cdot\int_0^\infty du\cdot e^{-u}\,u^{p+q-1}.$$

Il secondo degli integrali del secondo membro, per la formola (b) del num. 51, si vede essere $\Gamma(p+q)$: pertanto

$$\int_0^\infty dt\cdot\frac{t^{q-1}}{(1+t)^{p+q}}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Trasformiamo l'integrale del primo membro ponendo

$$t=\frac{1}{1-x}-1,\ \text{da cui}\ x=1-\frac{1}{1+t},$$

ai limiti $t=0$, $t=\infty$ corrisponderanno i limiti $x=0$, $x=1$; e avremo dopo alcune facili riduzioni

$$\int_0^1 dx\cdot x^{q-1}(1-x)^{p-1}=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

Ora l'integrale del primo membro è quella stessa funzione che chiamammo (p, q) al num. 59 (formola (t) del Capo VIII). Per tal maniera la formola (z) dello stesso Capo è rigorosamente provata.

Scolio. A questo luogo in cui si parla degli integrali definiti duplicati dovrebbero riferirsi alcune formole più o meno generali di molta celebrità ed utilità; ma essendo esse quelle medesime che servono alla trasformazione delle funzioni, le riserbiamo per la Seconda Sezione.

CAPO XVIII.

Sulla discontinuità nelle funzioni espresse per mezzo d'integrali definiti: e sulle formole di limite.

Ho raccolto in questo Capo un buon numero di quelle considerazioni che valgono a spiegare alcune delle maggiori difficoltà nella teorica che espongo. Ho messa attenzione per dare a queste dottrine una fusione che lasci sentire il meno possibile di mancanze: ma il lettore si accorgerà che qui resta ancora molto a fare. Intanto per conseguire una certa chiarezza mi è d'uopo pigliar le mosse un poco da lontano.

165. Rammento, come feci sul principio del Capo VI (quantunque ad altro scopo) che si danno funzioni diverse di forma ed eguali di valore. Se con due

di queste $f(a)$, $\varphi(a)$ si compone una equazione identica

$$(1) \qquad f(a) = \varphi(a),$$

siamo soliti dire che i valori numerici cavati tanto da $f(a)$ come da $\varphi(a)$ dando ad a successivi valori particolari sono sempre eguali, e che perciò l'equazione è sempre vera: ma questo fatto patisce qualche eccezione.

Siano

$$f(a) = 1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1}$$

$$\varphi(a) = \frac{1 - a^n}{1 - a}$$

dove n rappresenta un numero qualunque intero e positivo. L'equazione (1) sussiste sempre per infiniti valori di a *tranne il caso di* $a = 1$: per questo caso $f(a) = n$, e $\varphi(a) = \frac{0}{0}$, che non si sa che cosa sia (supponendo per un momento di non avere altre cognizioni): un tale valore di $\varphi(a)$ non è compreso nella formola $\frac{1 - a^n}{1 - a}$.

Sia per un secondo esempio preso da Lagrange

$$f(a) = \int_\alpha^\beta dx \cdot x^a; \qquad \varphi(a) = \frac{\beta^{a+1} - \alpha^{a+1}}{a + 1},$$

l'equazione (1) sussiste sempre per tutti i valori di a tranne il caso $a = -1$; in tal caso la formola algebrica espressa da $\varphi(a)$ non dà il valore dell'integrale definito, ma bisogna andarlo a prendere in una formola di forma trascendente che è $\log. \frac{\beta}{\alpha}$.

166. Visti questi esempj che si attaccano a ciò che nella nostra scienza è ammesso da gran tempo, non farà più un grand'urto se diremo, poste

$$f(a) = \int_0^\infty dx \cdot \frac{x \sin. a x}{1 + x^2}; \qquad \varphi(a) = \frac{\pi}{2} e^{-a},$$

l'equazione (1) sussiste per tutti i valori positivi di a maggiori di zero: per $a = 0$ l'equazione è falsa, il valore dell'integrale definito per un tal caso non è compreso nella formola $\frac{\pi}{2} e^{-a}$ (*).

Di questi salti, di questi casi in cui il valore di un integrale definito corrispondente al valor particolare di una costante non può più prendersi in una formola nota, ma deve cercarsi in un'altra di forma tutta diversa, il ramo d'analisi che esponiamo presenta frequenti esempj, ed è questa una osservazione

(*) Vedi la formola (*b*) del Capo X, n.° 72; vedi anche Poisson: *Journal Polyt.* Cah. XIX, pag. 61. Nota.

che bisogna rendersi familiare. Ben è vero che havvi una differenza notabile tra questi casi e quelli addotti nel numero precedente: in quelli la comparsa dello $\frac{0}{0}$ ci avvertiva del salto, e quindi una preziosa regola del calcolo differenziale ci faceva trovare la nuova forma di funzione che dà il valor giusto: in questi non abbiamo un sintomo che ci avverta dell'errore che incontriamo, se non è la stranezza dei risultati evidentemente assurdi che indi si cavano.

167. Ma proseguiamo con una discussione anche più attenta il fatto di due funzioni $f(a)$, $\varphi(a)$ di forma diversa, e che danno per infiniti valori di a eguali valori finali; vedremo che qualche volta la seconda $\varphi(a)$ non ha soltanto un caso in cui discorda dalla prima, ma molti ed anche infiniti. Anzi può accadere che volendo cavare altrimenti, cioè da diversa forma di funzione, tutti i valori che prende $f(a)$ corrispondentemente a quelli di a da $-\infty$ a $+\infty$, converrà assumere in luogo di $\varphi(a)$ diverse forme successive

Così l'equazione

$$(2) \qquad \frac{1}{1-a} = -\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot a^{-i}$$

è vera per tutto il tratto dei valori di a da $-\infty$ a -1, giacchè per esso il secondo membro è sempre una serie infinita convergente; pei valori di a da -1 a $+1$ la precedente equazione è falsa, ed è vera invece la seguente

$$(3) \qquad \frac{1}{1-a} = \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot a^i \,;$$

avendo poi a valori da 1 all'infinito, la precedente (3) è falsa, e sussiste come innanzi la (2).

168. Si notino con $f_1(a)$, $f_2(a)$, $f_3(a)$--- le diverse forme di funzioni (che chiameremo *secondarie*) colle quali si riesce ad accompagnare la $f(a)$ (che chiameremo funzione *primaria*) per tutti i suoi valori corrispondenti a quelli di a da $-\infty$ a $+\infty$; cioè $f_1(a)$ dia gli stessi valori di $f(a)$ da $-\infty$ fino ad un valore α, la $f_2(a)$ dia gli stessi valori di $f(a)$ da $a=\alpha$ fino ad $a=\beta$, la $f_3(a)$ gli stessi valori di $f(a)$ da $a=\beta$ fino ad $a=\gamma$, ecc.; si presentano molte osservazioni:

1.ª L'uso delle funzioni secondarie $f_1(a)$, $f_2(a)$, ecc. è molto prezioso in analisi, perchè spesso (principalmente nelle quistioni fisiche) non si hanno che cognizioni imperfette intorno alla funzione primaria $f(a)$, e possono determinarsi, se non tutte, almeno alcune delle $f_1(a)$, $f_2(a)$, ecc.; quando riesca di conoscere una delle secondarie che corrisponda appunto al tratto della $f(a)$ che ci abbisogna, è come se conoscessimo la stessa $f(a)$. Anche secondo le idee antiche cercando di conoscere per serie una funzione che non si saprebbe determinare altrimenti si cercava in realtà una sostituzione di funzione a funzione del genere di quelle di cui qui si discorre.

2.ª Ma se nell'uso di una funzione secondaria sortiamo dai limiti entro i quali sussiste la sua corrispondenza colla primaria, noi cadremo in errori anche gravissimi. Potrei mostrare, se non fosse un uscir d'argomento, che certi ri-

sultamenti strani ed anche assurdi nel maneggio delle formole algebriche vengono per la maggior parte da questo principio. L'attenzione al bisogno di dimettere talvolta una forma secondaria per assumerne un'altra, è il mezzo con cui si sciolgono le più gravi difficoltà, principalmente, come vedremo, nel calcolo degl'integrali definiti.

3.ª Il caso contemplato ai precedenti numeri 164, 165 di un solo valore della $f(a)$ saltante fuori della corrispondente $\varphi(a)$ ricade nella teorica generale che qui esponiamo. Può dirsi che allora ha luogo una funzione secondaria corrispondente alla primaria non per un tratto finito da $a=\alpha$ ad $a=\beta$, ma per un solo valore di a, come se questi limiti si avvicinassero fra loro di tanto che ne sparisse la differenza. I casi di eccezione del Teorema di Taylor discussi da Lagrange si possono ridurre a questa considerazione.

4.ª È da notarsi che i valori limiti della variabile per una funzione secondaria, alle volte sono compresi nella stessa funzione, alle volte esclusi. Così la (3) è vera pel valore limite $a=1$, ed è controversa la sua sussistenza pel valore limite $a=-1$; la (2) è falsa pel valore limite $a=1$, ed è vera pel valore dell'altro limite $a=\infty$.

5.ª È anche da osservarsi che una forma secondaria dismessa può tornare a diventar buona. Così la (2) è buona da $-\infty$ a -1, cessa di esserlo da -1 a $+1$, e ritorna buona da 1 a ∞.

6.ª Si può in queste considerazioni vedere l'origine di tutti i calcoli derivati (ver. gr. il principio del calcolo differenziale che viene dallo sviluppo delle funzioni in serie) e trovare la soluzione di quelle difficoltà sulle quali si sono agitate tante questioni. Avendo sott'occhio una formola $f(a)$ ed una secondaria $f_1(a)$, possiamo considerare o tutta la $f_1(a)$ o una parte di essa come una funzione derivata dalla $f(a)$: la relazione fra tale funzione derivata e la primaria $f(a)$ starà solo fra i limiti per cui sussiste la corrispondenza della funzione secondaria $f_1(a)$: fuori di questi limiti il valore della derivata di $f(a)$ dovrà prendersi in altra formola, o piuttosto quella derivata non esisterà.

169. Prolungheremo ancora di un numero quest'utile digressione per dire che dalle cose esposte si capisce come la teorica della discontinuità delle funzioni si divide naturalmente in due parti o questioni principali. Questione prima. Data una funzione $f(a)$, trovare tutte le funzioni secondarie $f_1(a)$, $f_2(a)$, $f_3(a)$, - - - (se ve ne ha) che si debbono succedere per seguirne i valori fra limiti noti, per esempio da α a β, da β a γ, ecc. Una tale questione è la meno difficile a risolversi: la teorica delle serie e l'attenzione ai limiti entro cui le serie sono convergenti sono il mezzo naturale per giungervi. Così le funzioni secondarie $f_1(a)$, $f_2(a)$, ecc. sono espresse da serie infinite, come i secondi membri delle (2), (3). Queste espressioni per serie si tramutano poi spesso in integrali definiti che equivalgono alla somma di quelle serie: e così le $f_1(a)$, $f_2(a)$, ecc. possono anche essere espresse per integrali definiti.

Questione seconda. Date diverse forme $f_1(a)$, $f_2(a)$, $f_3(a)$, - - - che voglionsi considerare come secondarie, trovare una forma unica primaria $f(a)$ che s'ac-

cordi colla $f_1(a)$ fra i limiti α, β, colla $f_2(a)$ fra i limiti β, γ, colla $f_3(a)$ fra i limiti γ, δ, ecc. Una tale questione è come l'inversa della precedente, e si scioglie più difficilmente colle teoriche analitiche che io pure ho trattato altrove (*).

Può osservarsi che quando la funzione primaria $f(a)$ è data sotto forma ordinaria, le secondarie $f_1(a)$, $f_2(a)$, ecc. sono espressioni per serie o per integrali definiti; e quando nella questione inversa le $f_1(a)$, $f_2(a)$, ecc. si assumono sotto forma ordinaria è invece la $f(a)$ che risulta espressa per serie o per integrali definiti. La precedente osservazione si trova costantemente avverata sopra un gran numero di casi particolari: ultimamente però il sig. Libri ha trovata la discontinuità anche in funzioni doppiamente esponenziali (**).

170. Ecco alcuni casi di discontinuità negli integrali definiti. Fourier (***) ha esaminato l'integrale $\int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.ax}{1+x^2}$, ed ha trovato che i suoi valori da $a=-\infty$ fino ad $a=0$ inclusivamente sono anche somministrati dalla formola $\frac{\pi}{2}e^a$, e da $a=0$ inclusivamente fino ad $a=\infty$ lo sono invece dalla formola $\frac{\pi}{2}e^{-a}$. Adunque facendo

$$(4) \qquad f(a)=\int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.ax}{1+x^2},$$

alla $f(a)$ corrispondono in questo caso due funzioni secondarie

$$f_1(a)=\frac{\pi}{2}e^a; \quad f_2(a)=\frac{\pi}{2}e^{-a}$$

la prima delle quali accompagna la $f(a)$ da $a=-\infty$ ad $a=0$, e poi deve essere rigettata; sottentra allora la seconda per tutto il rimanente tratto.

Ponendo

$$(5) \qquad f(a)=\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.ax}{x}$$

corrispondono alla $f(a)$ tre equazioni secondarie

$$f_1(a)=-\frac{\pi}{2}, \quad f_2(a)=0, \quad f_3(a)=\frac{\pi}{2};$$

la prima da $a=-\infty$ fino ad $a=0$ esclusivamente, la seconda per $a=0$ unicamente, e la terza da $a=0$ esclusivamente fino ad $a=\infty$ (****). Qui la discontinuità è anche più singolare per due circostanze; la prima, è il rimanere costante il valore della $f(a)$ pei due tratti da $-\infty$ a zero, e da zero a $+\infty$, quantunque la variabile muti continuamente, la seconda è l'influire che fa la quantità a solamente col suo segno e non colla sua grandezza.

(*) *Memorie della Società Italiana.* Tom. XX, pag. 573.
(**) *Mémoires de Mathématique et de Physique.* Florence 1829.
(***) *Théorie de la Chaleur*, pag. 435
(****) Libri. Opera citata, pag. 37.

Fourier ha osservata anche la discontinuità dell'integrale (*)

$$(6) \qquad f(a)=\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.x \cos.ax}{x}$$

cui corrispondono cinque funzioni secondarie

$$f_1(a)=0\,;\quad f_2(a)=\frac{\pi}{4}\,;\quad f_3(a)=\frac{\pi}{2}\,;\quad f_4(a)=\frac{\pi}{4}\,;\quad f_5(a)=0$$

la prima per tutto il tratto da $a=-\infty$ fino ad $a=-1$ esclusivamente, la seconda pel solo valore $a=-1$, la terza pei valori di a da -1 esclusivo a $+1$ esclusivo, la quarta pel solo valore $a=1$, la quinta per tutti i valori di a da 1 esclusivamente fino all'infinito positivo. Tutto ciò si dimostra facilmente ponendo la (6) sotto la forma

$$f(a)=\frac{1}{2}\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.(1+a)x}{x}+\frac{1}{2}\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.(1-a)x}{x}$$

e richiamando le proprietà dell'integrale (5) or ora notate. Il sig. Libri ha dedotte altre conseguenze assai curiose dall'integrale (5) che possono vedersi nell'opera sopra citata.

171. Trovo qualche esempio che mi persuade potersi anche sulle formole integrali definite discontinue eseguire la derivazione o l'integrazione per qualche costante indeterminata, come si disse nel Capo X, a fine di dedurne altre formole. Il sig. Poisson in un luogo della sua Memoria sul moto delle onde (**) scrive l'integrale (5) nel modo seguente

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.ax}{x}=\pm\frac{\pi}{2}$$

dove il doppio segno nel secondo membro è posto corrispondentemente ai due casi di a positiva e di a negativa. Integra poi la precedente formola per a fra i limiti *zero*, n, e ne deduce

$$(7) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \frac{1-\cos.nx}{x^2}=\pm\frac{\pi}{2}n.$$

In questa il primo membro non muta, sia che diansi ad n valori positivi o negativi, e non muta anche il secondo purchè abbiasi l'avvertenza di prendere il segno inferiore quando n riceve valori negativi.

172. Potranno anche applicarsi alle formole di cui parliamo le teoriche del Capo XI, ma si richiede molta oculatezza per non cadere in errore nella determinazione delle costanti arbitrarie introdotte dalle integrazioni. Infatti se a questo fine ci serviamo di due valori particolari presi in due tratti del corso della variabile ai quali corrispondono due diverse funzioni secondarie, avremo certamente un risultato falso: lo avremo giusto se li prenderemo in un tratto per cui la funzione del secondo membro rimane la stessa. Approfitterò del bi-

(*) *Théorie de la Chaleur*, pag. 433.
(**) *Mémoires de l'Institut de France*. Tom. I, pag. 71.

sogno di dar qui un esempio per risolvere una difficoltà eretta e non sciolta al num. 84. Si era colà trovata la formola

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos. rx}{m^2 + x^2} = Ae^{mr} + Be^{-mr}$$

essendo A, B due costanti da determinarsi che non contengono la r. La via che sembra più naturale si è di osservare primamente che siccome il primo membro non cangia mutando r in $-r$, anche il secondo non dovrà cangiare: così si avrebbe subito $A = B$. Ridotto per tal modo il secondo membro alla forma $A(e^{mr} + e^{-mr})$: si determinerebbe A ponendo $r = 0$ dietro la formola nota

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{1}{m^2 + x^2} = \frac{\pi}{2m};$$

e così il valore dell'integrale verrebbe

$$\frac{\pi}{4m}(e^{mr} + e^{-mr})$$

mentre dalla formola (a) del num. 72 risulta ben diverso.

L'errore nasce da ciò che nel precedente ragionamento si suppone restare la medesima la funzione del secondo membro per r positiva e per r negativa: invece, per ciò che si è detto al principio del num. 169, questi due casi appartengono a forme secondarie diverse.

Nello stesso numero 84 abbiamo fatto $r = 0$ nella (III) e non nella (II): in quest'ultima supposizione avremmo trovato il medesimo risultato erroneo notato qui sopra. Ma non poteva farsi $r = 0$ nella (II), perchè il valore zero di quell'integrale appartiene a una funzione secondaria diversa da quella che vale per r positiva, siccome si disse al num. 165.

Chi nulla sapesse della discontinuità che ha luogo ne' due precedenti integrali, cadrebbe troppo facilmente nel notato errore. Ma come saperlo se si trattasse di integrali non noti altrimenti? Abbiamo noi criterj generali per sifatta disamina? Ecco una osservazione che ci deve mettere in qualche diffidenza sull'uso delle dottrine del Capo XI in certi casi. Intanto queste riflessioni ci possono valere per rispondere a molte obbjezioni apparentemente insolubili.

173. Tutte le volte che cessa una condizione necessaria per la sussistenza di una formola, avviene un salto nella forma dell'espressione equivalente al valore dell'integrale definito. Dai precedenti capitoli possono raccogliersi molti esempj che provano visibilmente questa proposizione. Si richiamino le formole (c) del Capo XII num. 94. Abbiamo

$$\int_0^\pi d\varphi \cdot \frac{\cos. \varphi}{1 - 2a \cos. \varphi + a^2} = \frac{\pi a}{1 - a^2}$$

purchè sia $a^2 < 1$. Se questa condizione cessa di aver luogo, ed è invece $a^2 > 1$, trovammo essere

$$\int_0^\pi d\varphi \cdot \frac{\cos. \varphi}{1 - 2a \cos. \varphi + a^2} = \frac{\pi}{a(a^2 - 1)}.$$

La forma $f_1(a) = \frac{\pi a}{1-a^2}$ è diversa dalla forma $f_2(a) = \frac{\pi}{a(a^2-1)}$; nè sono riducibili l'una all'altra. Ciò deriva perchè si è tolta una condizione, e stabilita una condizione diversa.

174. La discontinuità di cui parliamo è anche più notoria nelle espressioni del Capo XIV dove i primi membri non sono integrali definiti continui ma somme di serie infinite.

Per un primo esempio. Richiamata la formola (x) del num. 133, se poniamo

$$(8) \qquad f(a) = \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos. ia}{i^2}$$

i valori di $f(a)$ corrispondenti al corso di a da zero all'infinito sono dati altrimenti da infinite forme secondarie che si succedono le une alle altre, cessando ognuna di essere buona fuori de'suoi limiti: cioè

$$\begin{array}{llll}
\text{da} \quad a=0 & \text{ad} \quad a=2\pi & & f_1(a) = \frac{a^2}{4} - \frac{\pi a}{2} + \frac{\pi^2}{6} \\
\text{da} \quad a=2\pi & \text{ad} \quad a=4\pi & & f_2(a) = \frac{a^2}{4} - \frac{3\pi a}{2} + \frac{13\pi^2}{6} \\
\text{da} \quad a=4\pi & \text{ad} \quad a=6\pi & & f_3(a) = \frac{a^2}{4} - \frac{5\pi a}{2} + \frac{37\pi^2}{6} \\
\text{ecc.} & \text{ecc.} & \text{ecc.} & \text{ecc.}
\end{array}$$

Da $a = -\infty$ fino ad $a = 0$ avremo un'altra infinita serie di forme secondarie.

Per un secondo esempio. Riprendasi la formola (v) del num. 132; ponendo

$$(9) \qquad f(a) = \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{\cos. ia}{i^2 - x^2}$$

abbiamo

$$\begin{array}{llll}
\text{da} \quad a=0 & \text{ad} \quad a=2\pi & & f_1(a) = \frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x} \cdot \frac{\cos.(\pi - a)x}{\sin. \pi x} \\
\text{da} \quad a=2\pi & \text{ad} \quad a=4\pi & & f_2(a) = \frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x} \cdot \frac{\cos.(3\pi - a)x}{\sin. \pi x} \\
\text{da} \quad a=4\pi & \text{ad} \quad a=6\pi & & f_3(a) = \frac{1}{2x^2} - \frac{\pi}{2x} \cdot \frac{\cos.(5\pi - a)x}{\sin. \pi x} \\
\text{ecc.} & \text{ecc.} & \text{ecc.} & \text{ecc.}
\end{array}$$

E qui pure ha luogo un'altra infinita serie di forme secondarie pei valori negativi di a. Sarebbe facile moltiplicare esempj simili ai due riferiti mediante altre formole di quel Capo, per esempio, mediante le (t), (bb), (cc), ecc.

175. Negli esempj del numero precedente le formole secondarie sono buone anche pei limiti, come si accennò sulla fine del num. 132. Se invece avessimo preso a distendere tutte le formole secondarie che possono dedursi dalla (w) e dalle altre formole simili avremmo dovuto notare che esse sbalzano per que' valori estremi; di qui un'altra serie di forme secondarie che valgono per un

valore di a, e che non si estendono ad alcuno immediatamente precedente o immediatamente seguente, siccome avemmo occasione di rimarcare anche in due esempj riferiti al num. 169.

Di qui altresì un' osservazione corrispondente a quella fatta più sopra al num. 171. Il metodo tenuto ai numeri 131, 132 per determinare le costanti A, B della equazione (6) è riuscito bene perchè i valori particolari assunti nei limiti erano compresi nella formola generale da essi limiti rinchiusa. Se invece avessimo cercato collo stesso metodo le formole equivalenti all'una o all'altra delle due espressioni

$$\Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{i \sin. i\theta}{i^2 - x^2}; \quad \Sigma_1^\infty \Delta i \cdot \frac{i \sin. i\theta}{i^2 + x^2}$$

(rivedi in quel Capo le formole (s), (u)) ci saremmo incontrati in risultamenti erronei, perchè i limiti entro cui stanno le formole sono esclusi dalle stesse formole.

Rammento una singolarità notata al num. 139, cioè che sussistendo una formola anche pei limiti entro i quali è compresa, se derivisi per la costante indeterminata che allora riguardasi come variabile, può la formola derivata non più sussistere per gli stessi limiti. Ne abbiamo già veduti parecchi esempj tanto per formole d'integrali continui quanto per formole d'integrali finiti. Tale è la formola (b) del num. 72 derivata dalla (a); tali le formole di cui parlammo qui sopra, cioè le (s), (u) del num. 131 derivate dalle (r), (t). Chi ha ben compresa la dottrina della discontinuità finora spiegata non troverà in ciò di che farsi meraviglia; perchè l'operazione di derivazione esige la sussistenza della formola che si deriva almeno per due valori consecutivi della variabile, e non si vede la stessa necessità nella formola derivata; può questa dunque essere più ristretta, estendersi cioè ad un valore di meno nel principio, e nel fine, il che è appunto quanto si trova avverato.

176. Alla teorica della discontinuità dei valori degl'integrali definiti si attacca naturalmente quella delle formole considerate vere unicamente come *formole di limite*: di cui abbiamo replicatamente anticipato un cenno ai num. 103, 127.

Data un'equazione fra una formola integrale definita e una espressione corrispondente non affetta da segno integrale, supponiamo che siavi in ambi i membri una costante indeterminata che può prendere infiniti valori, e può anche essere soggetta a qualche condizione. Diasi a quella costante un valore particolare, ver. gr., come è più frequente, lo zero o l'unità. Discende allora da quella formola un'altra più particolare: quest'ultima è poi sempre vera? e in qual senso? Ecco la questione che prendiamo ad esaminare.

Se mai il valore particolare attribuito alla costante togliesse una condizione necessaria per la sussistenza della formola, o, ciò che torna lo stesso, sortisse dai limiti entro cui la formola è vera, in tal caso la formola dedotta sarà manifestamente erronea. Ma si danno formole che sono al limite della condizione, che sentenziate a tutto rigore di principj dovrebbero dirsi false, e che nondi-

meno si vorrebbero tener vere in un certo senso: sono quelle di cui intendiamo parlare. Spieghiamoci meglio cogli esempj.

Al num. 29. trovammo la formola

$$(10) \qquad \int_0^\infty dx \cdot e^{-bx} \cos.ax = \frac{b}{a^2 + b^2}.$$

Se esaminiamo il calcolo colà fatto per giungervi vedremo che b deve essere una quantità positiva anche piccola, estremamente piccola finchè si vuole, ma non propriamente zero: in tale supposizione quel calcolo non regge più. Pertanto la formola

$$(11) \qquad \int_0^\infty dx \cdot \cos.ax = 0$$

chiamata (ϑ) al num. 84, che nasce dalla precedente per $b=0$, dovrà ritenersi vera, o no?

Non trovo che siamo autorizzati ad asserirlo, perchè quando si manca ad una condizione la forma dell'espressione equivalente all'integrale può saltare (vedi più sopra num. 172). Nondimeno i signori Poisson e Cauchy ammisero formole simili alla precedente (11) dicendo che in tal caso devesi riguardare il valore dell'integrale in cui la condizione cessa come un limite dei valori dell'integrale in cui la condizione sussiste (*).

Il sig. Poisson dichiara apertamente (nel primo de'luoghi citati) che in tal caso la costante non compare perchè ha un valore infinitamente vicino a quello del limite, ma deve considerarsi implicitamente. Così in sostanza siamo ancora dentro i limiti e non precisamente al limite: le espressioni come la (11) non corrispondono perfettamente all'idea che se ne ha in mente, essendovi alcun che di sottinteso.

177. A me pare che si potrebbe fissar meglio il concetto lasciato alquanto vago per l'introdotta nozione dell'infinitamente piccolo. Io vorrei distinguere *formole di uso pratico* e *formole di uso teorico*. Intendo per le prime quelle che non si adoperano come teoremi su cui basare nuove deduzioni analitiche, ma che si riducono immediatamente a numeri usandone nelle applicazioni. Intendo per le seconde quelle che si adoperano come teoremi su cui basare nuove deduzioni analitiche. Nel primo senso l'uso delle formole come la (11) deve accettarsi con franchezza non potendone risultare errore. Infatti supponiamo che dovessimo ridurre a numeri una formola come la (10) in cui b non fosse zero ma dovesse essere una quantità minore d'ogni assegnabile. È evidente che possiamo prenderne il valore dal secondo membro della (11): se dal far ciò risultasse differenza, non sarebbe più vero che b è quantità minore d'ogni assegnabile, contro l'ipotesi. Nelle applicazioni ai problemi fisici le quantità che qui chiamiamo minori di ogni assegnabile sono ancora quantità ben lontane da zero, perchè i nostri sensi sono grossolani: e fossero anche le cento e le

(*) *Journal Polyt.* Cah. XIX, pag. 409, 431, 572.

mille volte più perfetti, il discorso varrebbe sempre egualmente. Io dunque accetto le *formole di limite*, come la (11), per formole *vere* nella pratica quando si debbono ridurre immediatamente a numeri, nè da questa accettazione temo alcun inconveniente. Sotto quest' aspetto mi piace di vederle spesse volte assai più semplici di quelle da cui furono dedotte. Ma ne userei con estrema diffidenza in maniera teorica, perchè quel principio di errore che non fa niente nelle riduzioni numeriche, potrebbe traviarmi nel progresso di un ragionamento o di un calcolo.

Che la formola (11) possa condurre in errore quando si adopera teoricamente, è asserzione di cui avremo una prova nella Seconda Sezione di questo Trattato. Intanto farò notare come da queste considerazioni riceva naturale spiegazione un paradosso notato dal sig. Cauchy (*) e da altri, il bisogno cioè di dover aspettare a far zero alcune costanti dopo eseguite certe operazioni, mentre, fatte zero innanzi, conducono all' errore. Se si fanno zero prima di quelle seconde operazioni, si ottengono formole vere soltanto nell' uso pratico che si adoperano ad uso teorico, quindi si fa ciò che non si deve fare, come sopra si è spiegato.

Non è però che sempre si abbia a cadere in errore quando le formole di limite si adoperano ad uso teorico. Può tale essere la loro forma, e tale l'indole delle operazioni che si eseguiscono sopra di esse che i risultati vengano gli stessi che si sarebbono ottenuti se invece delle medesime si fossero adoperate le formole non ridotte al limite (per esempio la (10) invece della (11)) e poi si fossero ridotte le costanti al limite dopo finite le operazioni. Questo però non sarebbe che un accidente, nè potrebbe legittimare un uso per lo meno pericoloso, e di cui siamo certi che in tanti casi escono erronee conseguenze.

178. Aperte queste vedute, troviamo di dover fare alcune riflessioni circa varie formole date nei capitoli antecedenti.

La precedente formola (11) fu adoperata ad uso teorico al num. 84: adunque le formole che ivi furono dimostrate (le (a), (b) del num. 72) potrebbero essere messe in dubbio; ma avventuratamente ne abbiamo vedute altrove diverse dimostrazioni che non vanno soggette alla stessa difficoltà. Convien dunque dire che in questo caso l'uso teorico di una formola, che non può ritenersi vera che in uso pratico, non conduce ad errore per quell' accidente che notammo sul fine del precedente numero.

La formola (5) del presente Capo dovrebbe ritenersi formola di limite considerandola dedotta col far $b=0$ nella (h) del num. 75, ma ne abbiamo la dimostrazione diretta del Frullani data al num. 32, da cui pare di poter conchiudere che questa formola non sia solo vera come formola di limite, ma anche assolutamente. A quella dimostrazione del Frullani però potrebbe obbjettarsi l'uso di una serie infinita di cui non è assicurata la convergenza (num. 41).

(*) *Journal Polyt.* Cah. XIX, pag. 573.

Le formole (e) del num. 127 sono formole di limite dedotte dalle (d) del num. 126, e non potrebbero dirsi sicure fuorchè in uso pratico. Nondimeno noi d'una di esse usammo teoricamente al num. 131. Ciò può mettere qualche diffidenza sulle formole ivi dedotte; ma avviene qui come nell'uso della precedente (11) al num. 84: convien dire che non risulti errore perchè il risultato si dimostra anche in altra maniera (vedi l'opera colà citata).

Il lettore potrà moltiplicare queste considerazioni.

179. Rimane una osservazione importante: e tanto più in quanto che relativamente alla medesima potrebbe taluno non prendere nel giusto senso le parole di un grande Geometra vivente. Il sig. Poisson scrisse al num. 56 della sua Memoria sugli integrali definiti (*).

« Vi sono tre differenti integrali che si sanno determinare sotto forma fi-
« nita per mezzo di processi indipendenti dalla conoscenza dell'integrale
« $\int_0^\infty dx \cdot \cos.ax$, e di cui quest'integrale può essere riguardato siccome il limite;
« ora giova osservare ch'essi conducono tutti e tre al medesimo valore di que-
« sta quantità. In effetto, essendo a, b due costanti positive qualunque, abbiamo

$$« \int_0^\infty dx \cdot e^{-bx} \cos.ax = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

$$« \int_0^\infty dx \cdot e^{-bx^2} \cos.ax = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{b}}\, e^{-\frac{a^2}{4b}}$$

$$« \int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.ax}{1 + bx^2} = \frac{\pi}{2\sqrt{b}}\, e^{-\frac{a}{\sqrt{b}}};$$

« e queste tre formole s'accordano a dare $\int_0^\infty dx \cdot \cos.ax = 0$ quando vi si fa
« $b = 0$, e si suppone che la costante a non è zero. Questa osservazione ci porta
« a conchiudere che *gl'integrali delle quantità periodiche hanno sempre il me-*
« *desimo valore, comunque diversi siano gl'integrali determinati di cui si pos-*
« *sono riguardare siccome limiti;* ma sarebbe difficilissimo dimostrare questa
« proposizione in tutta la sua generalità. »

Se da questo passo alcuno si tenesse autorizzato a ritenere la stessa conseguenza per ogni formola integrale considerata come limite di varie formole integrali più generali e fra loro differenti, sarebbe facile per via d'esempj provare ch'egli s'inganna.

Primo esempio. Il valore della formola

$$S_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.(2h+1)bx}{\sin.bx} \cdot \frac{x}{1+x^2}$$

considerata come limite della formola che è la terza delle (λ) del num. 139,

(*) *Journal Polyt.* Cah. XIX, pag. 431.

per $c=0$, risulta

$$\frac{\pi e^{-(2h+1)b}}{e^b - e^{-b}} + \frac{\pi}{2}.$$

Il valore della stessa formola considerata come limite della quarta delle (λ) ora citate, per $c=0$, riesce

$$\frac{\pi e^{-(2h+1)b}}{e^b - e^{-b}} - \frac{\pi}{2}.$$

Il valore poi assoluto di essa formola integrale è invece

$$\frac{\pi e^{-(2h+1)b}}{e^b - e^{-b}}.$$

Un secondo esempio affatto simile al riferito può aversi dalle formole (ψ) del num. 142; un terzo dalla formola di cui parlammo più sopra al num. 165, ed altri. Questo argomento è stato trattato con qualche estensione dal sig. Cauchy nel secondo de' Supplementi alla sua Memoria sugl' integrali definiti presentata all'Istituto di Francia l'anno 1814.

Pertanto è indubitato che il valore di una formola di limite può risultare diverso essendo dedotto da diverse formole e non coincidere col vero valore trovato assolutamente.

Io mi sento condotto a credere che il valore di una formola di limite è anche il suo valor vero assolutamente preso quando risulti eguale da ambe le formole nelle quali la costante che si riduce a zero è di segno contrario. Così siccome le formole

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.(-ax)}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a}; \quad \int_0^\infty dx \cdot \frac{\cos.ax}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

danno entrambe come formola di limite per $a=0$

$$\int_0^\infty dx \cdot \frac{1}{1+x^2} = \frac{\pi}{2},$$

questa sarà vera anche assolutamente: ciò infatti si prova con dimostrazione diretta. Ma dirò colle parole dell' Autore sopra citato, sarebbe difficile dimostrare la proposizione in tutta la sua generalità.

180. Noteremo che anche le formole di limite vanno soggette alla discontinuità per le variabili che rimangono, come le altre formole integrali. Il caso più strano che possa addursi ad esempio è quello recato dal Poisson nel luogo più sopra citato. Ammessa la formola $\int_0^\infty dx \cdot \cos.ax = 0$, sarà questa vera nel senso di una formola di limite per tutti i valori di a da zero esclusivamente in avanti; ma per $a=0$ il valore della formola è invece infinito. Qui la discontinuità è tanto forte, che passando a da zero ad un valor piccolissimo, il valore della formola salta dall' infinito a zero. Questo fatto analitico che sembra sulle

prime incredibile, ha nondimeno una facile dimostrazione dalla sola ispezione della seconda formola (β) del num. 29.

181. Il valor particolare preso da una costante entro una formola integrale definita induce talvolta in essa una singolarissima proprietà che è bene di far conoscere. Se la formola integrale si scompone nella somma di una serie di formole integrali simili (num. 9) spezzando più volte il corso della variabile fra i due limiti, nell'anzidetto caso trovasi che tutto il valore dell'integrale è aggruppato in un brevissimo tratto di tal corso, ed è zero per tutto il rimanente. Prendo ad esempio la formola $\int_0^b dx \cdot \frac{1-a^2}{1-2a\cos.x+a^2}$.

Supponendo il corso di x da *zero* a b diviso in tanti pezzi, cioè da *zero* ad α, da α a β, da β a γ, ecc., avremo

$$\int_0^b dx \cdot \frac{1-a^2}{1-2a\cos.x+a^2} = \int_0^\alpha dx \cdot \frac{1-a^2}{1-2a\cos.x+a^2}$$

$$+\int_\alpha^\beta dx \cdot \frac{1-a^2}{1-2a\cos.x+a^2} + \int_\beta^\gamma dx \cdot \frac{1-a^2}{1-2a\cos.x+a^2} + \text{ecc.}$$

Ora dalla formola integrale indefinita

$$\int dx \cdot \frac{1-a^2}{1-2a\cos.x+a^2} = 2\,\text{Arc.tan.}\left(\frac{1+a}{1-a}\tan.\frac{x}{2}\right)$$

che può dimostrarsi colla derivazione, troviamo

$$\int_0^\alpha dx \cdot \frac{1-a^2}{1-2a\cos.x+a^2} = 2\,\text{Arc.tan.}\left(\frac{1+a}{1-a}\tan.\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\int_\alpha^\beta dx \cdot \frac{1-a^2}{1-2a\cos.x+a^2} = 2\left\{\text{Arc.tan.}\left(\frac{1+a}{1-a}\tan.\frac{\beta}{2}\right) - \text{Arc.tan.}\left(\frac{1+a}{1-a}\tan.\frac{\alpha}{2}\right)\right\}$$

$$\int_\beta^\gamma dx \cdot \frac{1-a^2}{1-2a\cos.x+a^2} = 2\left\{\text{Arc.tan.}\left(\frac{1+a}{1-a}\tan.\frac{\gamma}{2}\right) - \text{Arc.tan.}\left(\frac{1+a}{1-a}\tan.\frac{\beta}{2}\right)\right\}$$

ecc. ecc. ecc.

Se in queste facciasi $a=1$ ci risulta il valore della prima formola integrale eguale a π e quello di tutte le altre eguale a zero. Adunque il valore della formola integrale

$$(12) \qquad \int_0^b dx \cdot \frac{1-a^2}{1-2a\cos.x+a^2}$$

ove b è qualunque anche grandissima quantità reale positiva, per $a=1$ deve ritenersi il medesimo che si avrebbe assumendo per b un valore piccolissimo che differisse da zero meno d'ogni quantità assegnabile.

182. Il Fourier dimostrò la stessa proprietà nell'integrale $\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.ax}{x}$ per quando a ha un valore grandissimo (*): in tal caso il valore della formola inte-

(*) *Théorie de la Chaleur*, pag. 548.

grale è tutto raccolto nel suo principio ed equivale a quello di $\int_0^\omega dx \cdot \frac{\sin.ax}{x}$ essendo ω una quantità piccolissima che differisce da zero meno d'ogni grandezza assegnabile. Darò qui un'idea del metodo da lui tenuto in tale dimostrazione, tanto più volentieri in quanto che sarà un esempio per indicare come si può esplorare il valore di un integrale definito per mezzo di costruzioni geometriche. Il metodo è indiretto, ma serve spesso mirabilmente; e consiste nel rappresentarsi una curva piana riferita a due assi ortogonali: l'ascissa è significata dalla variabile per cui è preso l'integrale, l'equazione della curva si ha eguagliando l'ordinata alla funzione sottoposta al segno integrale, l'integrale istesso poi esprime l'area piana compresa fra le due ordinate corrispondenti ai valori estremi dell'ascissa che sono i limiti dell'integrale.

Questo metodo applicato all'integrale $\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.ax}{x}$ dà una curva che taglia l'asse ai punti in cui i valori dell'ascissa sono $\frac{\pi}{a}$, $\frac{2\pi}{a}$, $\frac{3\pi}{a}$, ecc., corrispondendo all'origine l'ordinata a. Le successive sinuosità sono alternativamente positive e negative, e sovrastanno a parti sempre eguali dell'asse, ma diminuiscono semprepiù negli allontanamenti dall'origine, di modo che la curva si accosta indefinitamente alla retta che è asse delle ascisse. Più che si fa grande la quantità a, più diminuiscono le dette sinuosità e più presto la curva si stringe vicino alla retta: sempre però il primo punto della curva è notabilmente distante dall'origine nel verso dell'asse delle y. Passa il citato Autore a considerare il caso in cui la quantità a sia cresciuta fino a differire quasi nulla dall'infinito, e trova evidente che le sinuosità scompajano, o se pur qualche cosa ne resta, si distruggano a vicenda per la diversità dei segni, e non rimanga che l'area compresa fra l'origine e il primo punto d'incontro della curva coll'asse delle ascisse, area la quale è semprepiù piccola nella sua estensione secondo il verso delle x, ma semprepiù guadagna nel verso delle y. Dopo tutto questo risulta al Fourier manifesta l'enunciata proposizione: noi ne vedremo fra poco una dimostrazione procurata altrimenti.

183. Se invece della (12) prendasi la formola

$$(13) \qquad \int_0^b dx \cdot \frac{(1-a^2)\,f(m+x)}{1-2a\cos.x+a^2}$$

ove $f(m+x)$ è una funzione qualunque di $m+x$ che non diventa infinita per $x=0$, potremo dimostrare in essa la stessa proprietà che riscontrammo nella (12). Qui però non essendoci permesso il passaggio per l'integrale indefinito a motivo della funzione generica $f(m+x)$, useremo un'altro metodo che con piccole modificazioni è quel medesimo cui s'attenne più volte il sig. Poisson (*). Se facciasi

$$a=1-ig$$

(*) *Journal Poly-t.* Cah. XIX, pag. 434.

(A) $\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\sin qx}{1+q^2} = e^{-x}$ de x ffi.

$$= \frac{\ln(qx+q)}{2} - \frac{\ln(qx-q)}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{\beta q}{q} \cdot \ln q \cdot \cos qx = \frac{1}{2}\int \frac{\beta q}{q} \cdot \ln q\,(x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{\beta q}{q} \cdot \ln(x-1)$$

ove g sia quantità qualunque, i un valore vicino allo zero per modo che la differenza ne sia inassegnabile, è manifesto che avremo dato alla a nella (13) un valore prossimissimo all'unità, come dicemmo voler fare.
Se inoltre pongasi

$$x = iy$$

essendo y una nuova variabile, ed i come sopra, avremo espressa anche l'altra condizione di non voler dare alla x che un corso piccolissimo.
Dopo ciò la (13) diventa, messi in luogo di $f(m+iy)$, cos.iy i corrispondenti sviluppi in serie,

$$\int_0^{\frac{b}{i}} dy \cdot \frac{i^2(2g - ig^2)\left(f(m) + f'(m)iy + f''(m)\frac{i^2y^2}{2} + \text{ecc.}\right)}{1 - 2(1-ig)\left(1 - \frac{1}{2}i^2y^2 + \frac{1}{24}i^4y^4 - \text{ecc.}\right) + (1-ig)^2}.$$

Il denominatore della quantità sotto il segno si riduce

$$i^2(g^2 + y^2) - i^3gy^2 - i^4\frac{y^4}{12} + \text{ecc.}$$

e però tutta la frazione può dividersi ne' suoi due termini per i^2; fatta la quale operazione essa risulta

$$\frac{2gf(m) + ig\left(2f'(m)y - gf(m)\right) + i^2gy\left(f''(m)y - gf'(m)\right) + \text{ecc.}}{g^2 + y - i^3gy^2 - i^2\frac{y^4}{12} + \text{ecc.}}$$

e, svolta in serie secondo le potenze di i, prende la forma

$$\frac{2gf(m)}{g^2+y^2} + iH + i^2K + \text{ecc.}$$

essendo H, K, ecc. quantità fatte di y e costanti senza la i.
Pertanto la formola (13) equivale alla serie

$$2gf(m)\int_0^{\frac{b}{i}} dy \cdot \frac{1}{g^2+y^2} + i\int_0^{\frac{b}{i}} dy \cdot H + i^2\int_0^{\frac{b}{i}} dy \cdot K + \text{ecc.}$$

che, avendo i il valor come sopra si è detto, può restringersi al solo primo termine, cioè alla espressione

$$2gf(m)\int_0^{\infty} dy \cdot \frac{1}{g^2+y^2}.$$

È noto il valore di questo integrale definito, che a noi pure occorse più volte, ed è $\frac{\pi}{2g}$; adunque il valore della formola (13) quando a è prossimissimo all'unità, risulta dimostrato eguale a $\pi f(m)$. Quanto si è detto al num. 180 intorno alla formola (12) riesce un caso particolare del teorema di questo numero.

184. Il teorema del num. 181 può dimostrarsi analiticamente in quest' altra maniera. Pongansi

$$a = \frac{c}{i}, \quad x = iy,$$

essendo c una quantità finita qualunque, ed i come nel numero precedente. Così la a ottiene un valore vicinissimo all' infinito, ed x ha un corso piccolissimo dopo lo zero.

La formola $\int_0^b dx \cdot \frac{\sin.ax}{x}$ si cambia nella $\int_0^{\frac{b}{i}} dy \cdot \frac{\sin.cy}{y}$ ossia, atteso il valore di i, nella formola

$$\int_0^\infty dy \cdot \frac{\sin.cy}{y}$$

che si sa eguale a $\frac{\pi}{2}$. Adunque la formola $\int_0^b dx \cdot \frac{\sin.ax}{x}$ e a maggior ragione la formola $\int_0^\infty dx \cdot \frac{\sin.ax}{x}$, quando a ha un valore grandissimo ottiene tutto il suo valore $\frac{\pi}{2}$ per un tratto brevissimo del corso della x; adunque il valore della stessa formola integrale da quel tratto innanzi è zero.

185. Trovo (*) una preziosa osservazione del sig. Poisson relativamente alle formole integrali di cui ora ci siamo occupati, che cioè sono prese per un tratto brevissimo del corso della variabile, e in cui una costante assume un valore particolare opportunamente scelto: egli la fece in occasione di un rapporto sulla Memoria del sig. Cauchy che conteneva la prima idea intorno alla dottrina degl' integrali singolari. L' osservazione sta in ciò, che dette formole integrali, per quanto spetta alla integrazione, possono essere indipendenti dalla forma di una funzione che entra come fattore della quantità sotto il segno. Così nell' esempio del num. 182 la forma f della funzione $f(m+x)$ non ha influito su quell' ultimo integrale definito da cui ci risultò il valore della formola (13) per a vicinissimo all' unità. Questa osservazione toglie il mistero di alcune formole generali di cui ci occuperemo nella Seconda Sezione.

Del resto il sig. Cauchy fa entrare anche le formole integrali ora menzionate nella sua teorica degl' integrali singolari da noi studiata nel Capo XIII. Io ho creduto meglio trattarle a parte, perchè qui pure havvi l' idea di un valore finito dell' integrale quantunque i suoi limiti differiscano fra loro meno d' ogni quantità assegnabile: ma havvi anche simultaneamente un' idea tutta propria di questi casi, quella di una costante che prende un valore opportunamente scelto, avendo fuori di questi casi una significazione generica.

(*) Lacroix: *Traité du Calcul.* Tom. III, pag. 499.

Porrò qui fine alla Prima Sezione di questo Trattato dichiarando, come più sopra sul fine del num. 163, che ad esaurire l'esposizione dei metodi conosciuti per la ricerca dei valori degl' integrali definiti resta a parlare di formole più o meno generali da cui si cava un numero prodigioso di risultati. Non poteva io però, per la ragione accennata nel numero citato, anticipare formole la cui sede naturale mi sembra dover essere nella Seconda Sezione.

Prevedo anche che taluno potrebbe farmi rimprovero per non aver io fin qui trattata la teorica dei così detti *Trascendenti Elittici* che si riducono anch' essi ad integrali definiti, defraudando così lo studioso di alcune brillanti scoperte recentemente celebrate fra i cultori della nostra scienza. Rispondo: che la teorica dei trascendenti elittici è cresciuta di tanto ai nostri giorni, che può considerarsi formare un ramo d'analisi a parte. Se io l'avessi esposta troppo in succinto ed incompletamente, non avrei corrisposto alla giusta aspettativa del leggitore: e se vi avessi dato una estensione almeno simile a quella con cui ne' precedenti Capitoli ho reso conto di altri moderni trovati, ciò mi avrebbe condotto assai lontano dal mio primo proposto. Quando le due Sezioni di questo Trattato incontrino dal pubblico approvazione ed incoraggiamento, potrà l'accennata teorica esser materia di una susseguente Appendice.

NOTE

Osservazione al Capo V.

Le teoriche esposte in questo Capo acquistano maggior luce per mezzo di una formola generale dovuta al sig. Cauchy e pubblicata recentissimamente dopo l'impressione di quel Capitolo. Sarà nostra premura renderne conto nella Seconda Sezione.

Aggiunta al numero 55.

Dicemmo in questo numero che il valore della quantità

$$(1) \qquad \frac{\Gamma(n+1-p)\,\Gamma(n+1+p)}{[\Gamma(n+1)]^2}$$

si accosta continuamente all'unità più che n diventa grande, ed è l'unità stessa quando n è infinita.

Non abbiamo colà dimostrata questa proposizione parendoci quasi evidente per l'eguaglianza delle tre quantità $n+1-p$, $n+1$, $n+1+p$ quando n si fa infinita. Ci accorgemmo però in seguito che un simile modo di ragionare, quantunque non senza esempio principalmente presso gli Scrittori dello scorso secolo, usato in altri casi conduce ad errore. Altronde l'importanza della formola trovata in quel numero è tale che ben merita ogni esattezza nella nuova dimostrazione ivi data. Esporremo qui dunque una prova rigorosa della anzidetta proposizione: tanto più volentieri in quanto che ciò fornisce l'occasione di dare altra formola importante relativa al trascendente *gamma* ed ommessa nel Capo VIII.

Richiamata la (*b*) del num. 51, rammentiamo altresì che l'espressione $e^{-x}x^p$ è eguale a zero tanto per $x=0$ quanto per $x=\infty$ quando p è quantità positiva. Abbiamo dalla (*b*)

$$(2) \qquad \Gamma(p+1)=\int_0^\infty dx\cdot e^{-x}x^p.$$

Trasformiamo l'integrale ponendo in luogo di x una funzione di una nuova variabile t quale risulta dall'equazione

$$(3) \qquad e^{-x}x^p=p^p e^{-p} e^{-t^2}.$$

Troviamo il valore di x in t espresso per serie. L'equazione di posizione (3) può scriversi

$$\left(\frac{x}{p}\right)^p e^{-(x-p)}=e^{-t^2}$$

da cui prendendo i logaritmi

$$p\log.\left(\frac{x}{p}\right)-(x-p)=-t^2.$$

Se facciasi

$$(4) \qquad x-p=u$$

l'ultima equazione diventa

$$p\log.\left(1+\frac{u}{p}\right)-u=-t^2.$$

Sostituiscasi al logaritmo la serie notissima, otterremo

$$-\frac{u^2}{2p}+\frac{u^3}{3p^2}-\frac{u^4}{4p^3}+\text{ecc.}=-t^2.$$

Da questa dedurremo u per t mediante un ritorno di serie ponendo

$$(5)\qquad u=At+Bt^2+Ct^3+Dt^4+\text{ecc.}$$

I valori dei coefficienti A, B, C, D, ecc. ci risulteranno dalle equazioni

$$\frac{A^2}{2p}-1=0$$

$$\frac{AB}{p}-\frac{A^3}{3p^2}=0$$

$$\frac{2AC+B^2}{2p}-\frac{A^2B}{p^2}+\frac{A^4}{4p^3}=0$$

$$\frac{AD+BC}{p}-\frac{A^2C+AB^2}{p^2}+\frac{A^3B}{p^3}-\frac{A^5}{5p^4}=0$$

$$\frac{2AE+2BD+C^2}{2p}-\frac{3A^2D+6ABC+B^3}{3p^2}+\frac{4A^3C+6A^2B^2}{4p^3}-\frac{A^4B}{p^4}+\frac{A^6}{6p^5}=0$$

ecc. ecc. ecc.

la risoluzione delle quali somministra

$$(6)\qquad \begin{aligned} &A=\sqrt{2p}\,;\quad B=\frac{2}{3},\quad C=\frac{1}{9\sqrt{2p}}\\ &D=-\frac{1}{27p},\quad E=\frac{1}{20\cdot 27p\sqrt{2p}},\ \text{ecc.}\end{aligned}$$

che dovranno sostituirsi nella (5) insieme col valore di u dato dalla (4) per ottenere la serie cercata.

Ora la (2) diventa per la (3)

$$\Gamma(p+1)=p^p\,e^{-p}\int_{-\infty}^{\infty}dt\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)e^{-t^2}.$$

Messo in questa in luogo di $\frac{dx}{dt}$ il suo valore

$$A+2Bt+3Ct^2+4Dt^3+5Et^4+\text{ecc.}$$

cavato dalla (5), avremo

$$\Gamma(p+1)=p^p\,e^{-p}\left\{A\int_{-\infty}^{\infty}dt\cdot e^{-t^2}+2B\int_{-\infty}^{\infty}dt\cdot e^{-t^2}t+3C\int_{-\infty}^{\infty}dt\cdot e^{-t^2}t^2\right.$$
$$\left.+4D\int_{-\infty}^{\infty}dt\cdot e^{-t^2}t^3+5E\int_{-\infty}^{\infty}dt\cdot e^{-t^2}t^4+\text{ecc.}\right\}.$$

I valori di tutti gli integrali definiti ch'entrano nella precedente serie sono stati trovati al num. 65: quindi la stessa serie diventa

$$\Gamma(p+1)=p^p\,e^{-p}\left\{A\sqrt{\pi}+\frac{3}{2}C\sqrt{\pi}+\frac{3\cdot 5}{4}E\sqrt{\pi}+\text{ecc.}\right\}.$$

Pongasi $p\Gamma(p)$ in luogo di $\Gamma(p+1)$, e caveremo dall'antecedente

$$\Gamma(p)=p^{p-\frac{1}{2}}\,e^{-p}\sqrt{2\pi}\left\{\frac{A}{\sqrt{2p}}+\frac{3C}{2\sqrt{2p}}+\frac{15E}{4\sqrt{2p}}+\text{ecc.}\right\}$$

la quale per la sostituzione dei valori (6) si riduce

$$(7) \qquad \Gamma(p) = p^{p-\frac{1}{2}} e^{-p} \sqrt{2\pi}\,(1+z)$$

essendo

$$(8) \qquad z = \frac{1}{12p} + \frac{1}{288p^2} + \text{ecc.}$$

La formola (7) è quella di cui più sopra abbiamo inteso parlare; per essa ci si fa palese che quando p è numero grandissimo, il valore di $\Gamma(p)$ ci è dato con grande approssimazione dall'espressione

$$p^{p-\frac{1}{2}} e^{-p} \sqrt{2\pi}.$$

Presentemente la quantità (1) può trasformarsi per la (7) e dopo alcune riduzioni prende l'aspetto

$$\left(1-\frac{p}{n+1}\right)^{n+1-\frac{1}{2}} \left(1+\frac{p}{n+1}\right)^{n+1-\frac{1}{2}} \left(\frac{n+1+p}{n+1-p}\right)^{p} \frac{(1+z')(1+z'')}{(1+z''')^2}$$

dove z', z'', z''' hanno rispettivamente per valore il secondo membro della (8) in cui successivamente siansi messe le quantità $n+1-p$, $n+1+p$, $n+1$ in luogo di p.

La riduzione dell'antecedente espressione all'unità quando $n=\infty$ risulta ora manifesta dopo una semplice ispezione.

Prevedo che taluno potrebbe ancora muovere una difficoltà, osservando che i valori degli integrali

$$(9) \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot e^{-t^2}, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} dt \cdot e^{-t^2} t, \quad \text{ecc.}$$

usati più sopra, sono stati trovati al num. 65 in conseguenza della formola (6) di quel capitolo che da noi fu fatta dipendere da quella stessa formola (l) num. 55, per la cui dimostrazione è necessario che la quantità (1) sia per $n=\infty$ eguale all'unità. Potrebbe adunque dire esservi qui petizione di principio, o circolo vizioso. Rispondo, che intanto si sono assunti in questa Nota per gl'integrali (9) i valori summentovati in quanto ci eravamo proposto di dimostrare nella stessa occasione l'interessante formola (7); ma per la proposizione che ci occupa relativamente alla quantità (1) non si esigeva la perfetta cognizione di quei valori, soltanto conveniva sapere di essi che non contengono la p, e che sono alternativamente zero pel secondo corollario del num. 22. Chiunque vorrà rifare il ragionamento mettendo in luogo degli integrali (9) altrettante costanti indipendenti da p pel primo, terzo, quinto, ecc., e zero per gli altri, si convincerà che la conclusione rimane la medesima.

FINE DEL TOMO SECONDO.

INDICE

DELLE MATERIE CONTENUTE NEL TOMO SECONDO
DEGLI OPUSCOLI MATEMATICI E FISICI

PARTE PRIMA

Sulla Meccanica celeste e sopra un nuovo calcolo chiamato calcolo dei limiti (A. L. CAUCHY)

Introduzione . . . . . pag. 1— 8

PARTE PRIMA

Considerazioni generali.

Formole per lo sviluppo delle funzioni in serie. Calcolo dei Limiti. » 9— 48

PARTE SECONDA

Applicazione alla Meccanica celeste.

§. 1.° *Variazioni delle costanti arbitrarie* . . . . . » 133—136
» 2.° *Equazioni differenziali del moto de' pianeti* . . . . . » 137—139
» 3.° *Integrazione delle formole che determinano i differenziali degli elementi elittici* . . . . . » 139—172
» 4.° *Sopra lo sviluppo della funzione* R *in serie convergente* . . » 261—288
» 5.° *Sopra i resti delle serie convergenti che rappresentano gli sviluppi di* R . . . . . » 288—299
Note *dei Traduttori* (FRISIANI, PIOLA) *Parte Prima* . . . . . » 49— 84
» » » » » » *Parte Seconda* . . . . » 173—202
» 301—316

Sulla Grandine (BELLANI)

Capitolo I. *Se i vapori considerati come tali, ossia prima di ridursi in gocce d'acqua possano costituire la grandine.* » 85— 94
» II. *Della figura della Grandine* . . . . . » 94—102
» III. *Della causa che produce il freddo sufficiente a congelare in aria la pioggia* . . . . . » 203—221
» IV. *Applicazione delle cause assegnate alla formazione ed all'ingrossamento della grandine* . . . . . » 222—236

Sulle svolte ordinarie delle strade (BORDONI) . . . . . » 317—343

PARTE SECONDA

Seguito e fine della Prima Sezione del Trattato

Sul Calcolo degli integrali definiti (PIOLA)

Capo XIV. *Sulle espressioni equivalenti alle somme delle serie infinite* . . . . . pag. 105—118
» XV. *Applicazione della teorica precedente alla ricerca dei valori di varii integrali definiti* . . . . . » 118—132
» XVI. *Uso dell'immaginario* . . . . . » 345—350
» XVII. *Uso degli integrali duplicati* . . . . . » 350—358
» XVIII. *Sulla discontinuità nelle funzioni espresse per mezzo d'integrali definiti: e sulle formole di limite* . . » 358—375
Note . . . . . » 376—378

Sui principj e sugli usi del calcolo dei residui (PIOLA) . . . . » 237—260

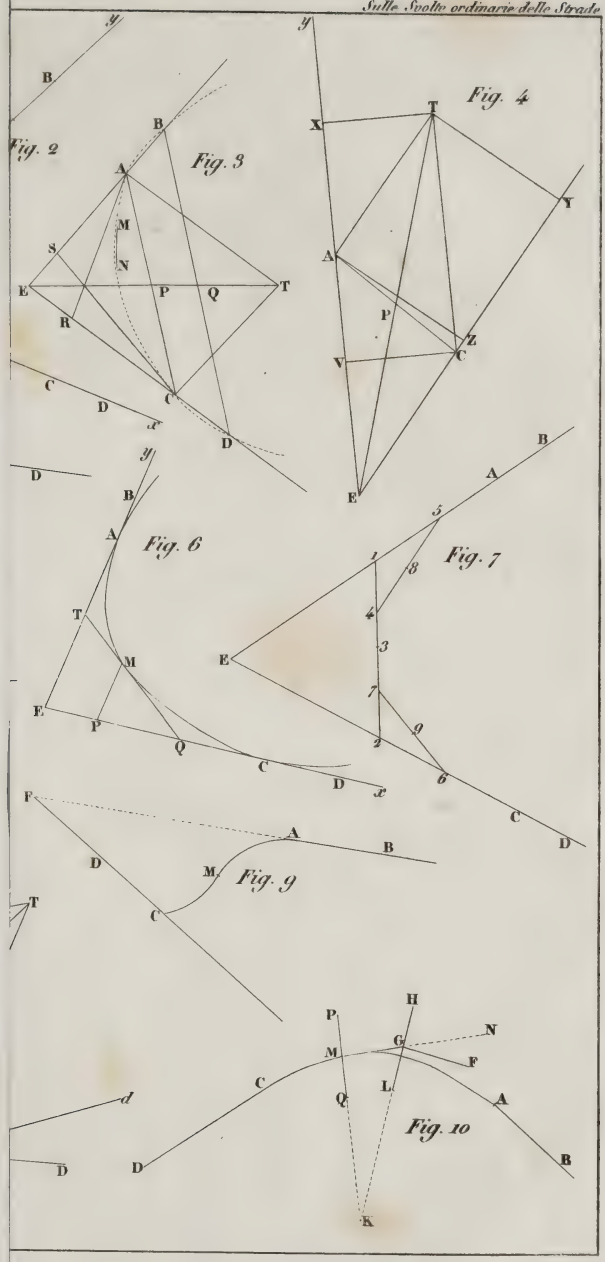
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 9
Fig. 10

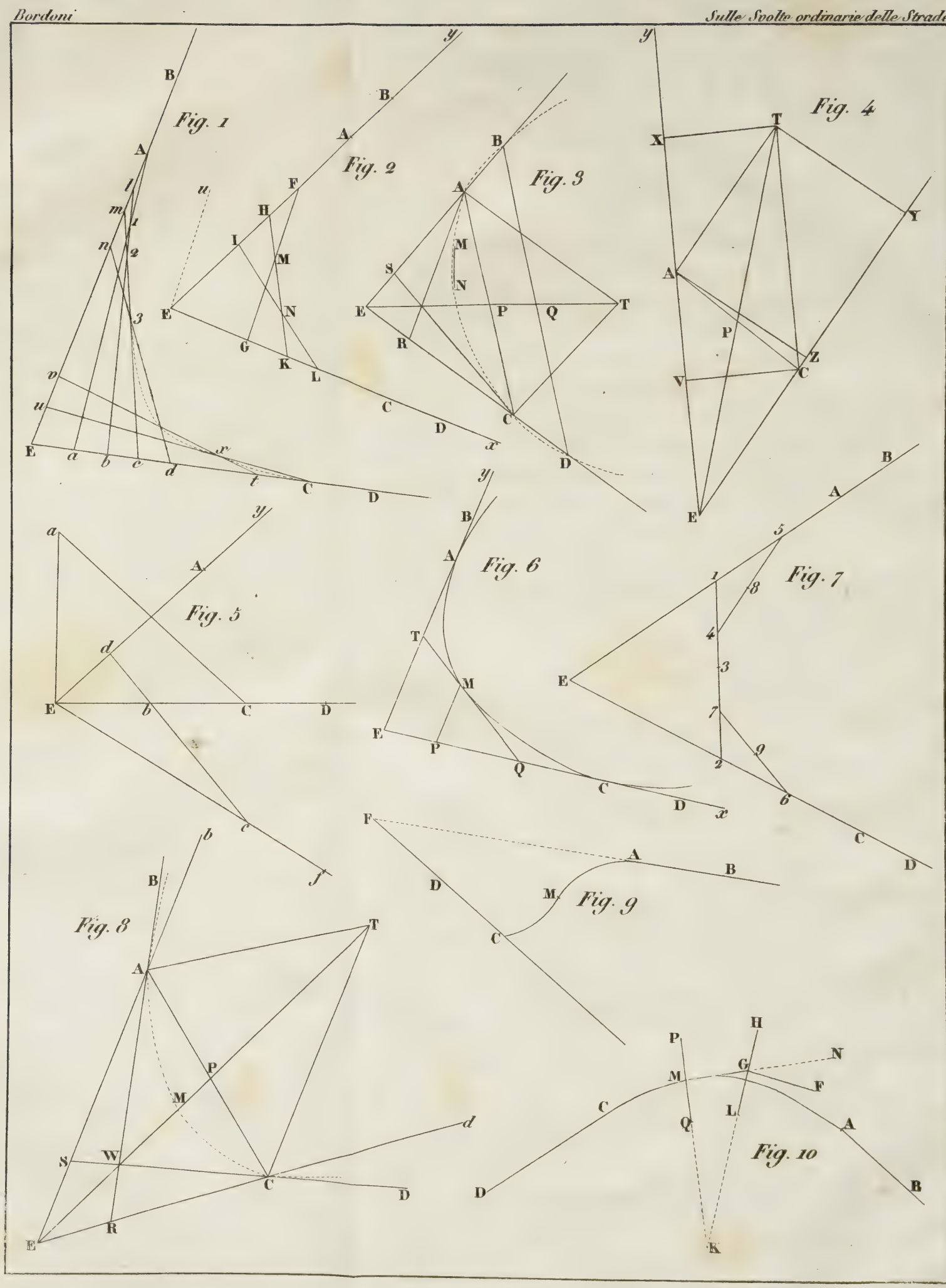
Fig. 1
Fig. 2
Fig. 3
Fig. 4
Fig. 5
Fig. 6
Fig. 7
Fig. 8
Fig. 9
Fig. 10

UNIVERSITY OF ILLINOIS-URBANA
3 0112 018278868